Βαγγέλης Κατσαντώνης ΑΜ: 1112201900079 (1)

Εργασία Γεωμετρικής Ανάλυσης. Θέμα: Θ. Lebesgue: Μια $f: I \to \mathbb{R}$ ($I$ κύβος στον $\mathbb{R}^n$), φραγμένη, είναι ολοκληρώσιμη ανν το σύνολο των σημείων ασυνέχειας της είναι μηδενοσύνολο.

---

Αρχικά παραθέτουμε έναν ορισμό και ένα σχετικό λήμμα.

Ορισμός: (ταλάντωση φραγμένης συνάρτησης). Για $x_0 \in S \subseteq \mathbb{R}^n$ και $f \in B(S;\mathbb{R})$ ορίζουμε την ταλάντωση της $f$ στο $x_0$ ως:

$$\tau_f(x_0) = \inf \{ \sup f(Q(x_0;\rho) \cap S) - \inf f(Q(x_0;\rho) \cap S) \mid \rho > 0 \},$$

όπου $Q(x_0;\rho)$ ο κύβος κέντρου $x_0$, ακτίνας $\rho$. Προφανώς $\forall x \in S$, $\tau_f(x) \geq 0$.

Λήμμα: Η $f$ είναι συνεχής στο $x_0$ ανν $\tau_f(x_0) = 0$.

Απόδειξη: "$\Rightarrow$": Έστω $f$ συνεχής στο $x_0$, τότε δεδομένου $\varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ έτσι ώστε $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$, $\forall x \in Q(x_0;\delta) \cap S$.

Άρα έχουμε: $\sup f(Q(x_0;\delta) \cap S) \leq f(x_0) + \varepsilon$, και

$$\inf f(Q(x_0;\delta) \cap S) \geq f(x_0) - \varepsilon$$

$\Rightarrow \tau_f(x_0) \leq 2\varepsilon$. Αφού $\varepsilon$ τυχόν, έπεται $\tau_f(x_0) = 0$.

"$\Leftarrow$": Έστω $\tau_f(x_0) = 0$. Τότε δεδομένου $\varepsilon > 0$, $\exists \rho > 0$ έτσι ώστε $\sup f(Q(x_0;\rho) \cap S) - \inf f(Q(x_0;\rho) \cap S) < \varepsilon$.

Τώρα για $x \in Q(x_0;\rho) \cap S$:

Έχουμε $\inf f(Q(x_0;\rho)\cap S) \leq f(x) \leq \sup f(Q(x_0;\rho)\cap S)$

Έχουσαν η ανισότητα ισχύει, και για $x = x_0$,

έπεται ότι $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. Άρα $f$ συνεχής στο $x_0$.

Είμαστε έτοιμοι να αποδείξουμε το Θ. Lebesgue:

<u>Θεώρημα</u>: Έστω $I$ κύβος στον $\mathbb{R}^n$, $f \in B(I;\mathbb{R})$. Αν $D$ το σύνολο των σημείων ασυνέχειας της $f$ στο $I$, τότε η $f$ είναι ολοκληρώσιμη στο $I$ ανν το $D$ είναι μηδενοσύνολο.

<u>Απόδειξη</u>: "$\Rightarrow$": Έστω $f$ ολοκληρώσιμη στο $I$.

Αρχικά, ορίζουμε $\forall n \in \mathbb{N}$ το $D_n := \{x \in I \mid \tau_f(x) \geq \frac{1}{n}\}$. Τότε

$D := \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n = \{x \in I \mid \tau_f(x) > 0\} \overset{\text{λήμμα}}{=\!=} \{x \in I \mid f \text{ ασυνεχής στο } x\}$.

Για να δείξουμε ότι το $D$ είναι μηδενοσύνολο, αρκεί να δείξουμε ότι $\forall n \in \mathbb{N}$ τα $D_n$ είναι μηδενοσύνολα.

Δεδομένου $n \in \mathbb{N}$ και $\varepsilon > 0$: Αφού $f$ ολοκληρώσιμη, $\exists$ διαμέριση $P$ του $I$ έτσι ώστε $U(f,P) - L(f,P) < \frac{\varepsilon}{2n}$. Έπειτα διαμερίζουμε το $D_n$ σε $D_n' = \{x \in D_n \mid \exists R \text{ κύβος ορισμένος από } P : x \in \operatorname{bd} R\}$ και σε $D_n'' = D_n \setminus D_n'$

• Για το $D_n'$: Δεδομένου κύβου $R$, γνωρίζουμε ότι το $\operatorname{bd} R$ είναι μηδενοσύνολο, οπότε και $\bigcup_R \operatorname{bd} R$ μηδενοσύνολο. Προφανώς $D_n' \subseteq \bigcup_R \operatorname{bd} R$, και άρα το $D_n'$ είναι μηδενοσύνολο. Άρα $\exists$ αριθμήσιμο κάλυμμα κύβων $\{Q_k\}_{k=1}^{\infty}$ του $D_n'$, έτσι ώστε $\sum_{k=1}^{\infty} v(Q_k) < \varepsilon/2$.

3

Για το $D_n''$: Έστω $R_1, \dots, R_\lambda$ οι κύβοι - ορθογώνιοι της διαμέρισης $P$ που περιέχουν στοιχεία του $D_n''$.

Για $i=1,\dots,\lambda$, $\exists x_i \in D_n'' : x_i \in R_i \setminus bd R_i$. Άρα $\exists \delta>0$ τέτοιο ώστε $Q(x_i;\delta) \subseteq R_i$, $\forall i=1,\dots,\lambda$.

Άρα έχουμε: $\frac{1}{n} \le \tau_f(x_i) \le \sup f(Q(x_i;\delta)) - \inf f(Q(x_i;\delta))$

$\le \sup f(R_i) - \inf f(R_i)$, $\forall i=1,\dots,\lambda$

Δηλαδή: $\frac{1}{n} v(R_i) \le v(R_i)(\sup f(R_i) - \inf f(R_i))$, $\forall i=1,\dots,\lambda$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{\lambda} \frac{1}{n} v(R_i) \le \sum_{i=1}^{\lambda} v(R_i)\sup f(R_i) - \sum_{i=1}^{\lambda} v(R_i)\inf f(R_i)$$

$$\le U(f,P) - L(f,P) < \varepsilon/2n.$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{\lambda} v(R_i) < \frac{\varepsilon}{2},$$ όπου τα $\{R_i\}_{i=1}^{\lambda}$ προφανώς καλύπτουν το $D_n''$. Άρα το $D_n''$ είναι μηδενοσύνολο, αφού $\varepsilon$ τυχόν.

Έπεται ότι το $D = D_n' \cup D_n''$ είναι μηδενοσύνολο.

"$\Leftarrow$": Αφού $f$ φραγμένη, $\exists M>0$ έτσι ώστε $|f(x)| \le M$, $\forall x \in I$.

Θα δείξουμε ότι η $f$ είναι ολοκληρώσιμη στο $I$ δείχνοντας ότι για αυθαίρετο $\varepsilon>0$, $\exists$ διαμέριση $P$ του $I$ έτσι ώστε $U(f,P) - L(f,P) < \varepsilon$.

Έστω λοιπόν $\varepsilon>0$. Θέτουμε $\varepsilon' = \dfrac{\varepsilon}{2M + 2v(I)}$

Αφού $D$ μηδενοσύνολο, $\exists \{Q_n\}_{n=1}^{\infty}$ ανοιχτό κάλυμμα κύβων του $D$, συνολικού όγκου $< \varepsilon'$.

Τώρα, $\forall a \in I \setminus D$, λόγω της συνέχειας $\exists\, Q_a$ ανοιχτός κύβος έτσι ώστε $|f(x) - f(a)| < \varepsilon'$, για $x \in Q_a \cap I$.

Τότε το $\{Q_a : a \in I \setminus D\} \cup \{Q_n : n \in \mathbb{N}\}$ είναι ανοιχτό κάλυμμα του $I$. Αφού $I$ συμπαγές και χωρίς βλάβη της γενικότητας, $\exists$ πεπερασμένο υποκάλυμμα $\{Q_1, \dots, Q_k, Q_{a_1}, \dots, Q_{a_s}\}$ που καλύπτει το $I$.

Συμβολίζουμε $Q_j' := Q_{a_j}$ για διευκόλυνση του συμβολισμού.

Έχουμε λοιπόν ότι τα ανοιχτά $Q_1, \dots, Q_k, Q_1', \dots, Q_s'$ καλύπτουν το $Q$, όπου για τα $Q_i$ ισχύει η σχέση $\sum_{i=1}^{k} v(Q_i) < \varepsilon'$. (1),

και για τα $Q_j'$ ισχύει η σχέση $|f(x) - f(y)| \leq 2\varepsilon'$, $x, y \in I \cap Q_j'$ (2).

Για περαιτέρω διευκόλυνση του συμβολισμού, συμβολίζουμε κάθε $Q_i$ με την τομή του με το $I$, και ομοίως για τα $Q_j'$.

Η "καινούργια" συλλογή κύβων $\{Q_i\}_{i=1}^{k}$, $\{Q_j'\}_{j=1}^{s}$ καλύπτει το $I$ και ικανοποιούν τις σχέσεις (1), (2) αντίστοιχα.

Χρησιμοποιώντας τα ακραία σημεία των διαστημάτων που απαρτίζουν τους κύβους αυτούς, ορίζουμε διαμέριση $P$ του $I$. Τότε κάθε κύβος $\{Q_i\}_{i=1}^{k}$, $\{Q_j'\}_{j=1}^{s}$ είναι ένωση κύβων ορισμένων της διαμέρισης $P$. Έστω $R$ το σύνολο των κύβων ορισμένων από τη $P$. Διαμερίζουμε το $R$ σε δύο ξένα υποσύνολα $R', R''$, έτσι ώστε $R' = \{J \in R : J \subseteq Q_i$ για κάποιο $i\}$,

και $R'' = \{J \in R : J \subseteq Q_j'$ για κάποιο $j\}$

Έχουμε: $\displaystyle\sum_{J\in R'} (\sup f(J)-\inf f(J))\, v(J) \le 2M \sum_{J\in R'} v(J)$ (3)

και $\displaystyle\sum_{J\in R''} (\sup f(J)-\inf f(J))\, v(J) \le 2\varepsilon' \sum_{J\in R''} v(J)$, (από σχέση (2)) (4)

Όμως, $\displaystyle\sum_{J\in R'} v(J) \le \sum_{i=1}^{k} \sum_{J\subseteq Q_i} v(J) = \sum_{i=1}^{k} v(Q_i) < \varepsilon'$ (5) (από σχέση (1))

και $\displaystyle\sum_{J\in R''} v(J) \le \sum_{J\subseteq I} v(J) = v(I)$ (6)

Άρα τελικά από τις σχέσεις (3),(4),(5),(6) παίρνουμε:

$$U(f,P) - L(f,P) = \sum_{J\in R} (\sup f(J)-\inf f(J))\, v(J)$$

$$= \sum_{J\in R'} (\sup f(J)-\inf f(J))\, v(J) + \sum_{J\in R''} (\sup f(J)-\inf f(J))\, v(J)$$

$$\le 2M\varepsilon' + 2\varepsilon' v(I) = \varepsilon .$$

$\square$