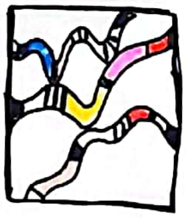
ΤΟ ΘΕΩΡΗΜΑ ΠΥΚΝΟΤΗΤΑΣ ΤΟΥ SARD ΜΕΣΩ ΤΟΥ ΘΕΩΡΗΜΑΤΟΣ ΑΔΡΗΣ ΣΥΝΘΕΣΗΣ ΤΩΝ KNESER-GLAESER.



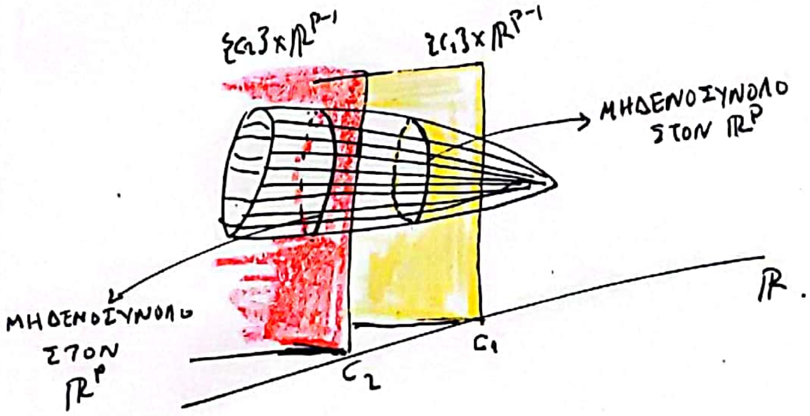
Έστω $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}^p$, με $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ ανοιχτό. Αν η f είναι C^r, $r>\max\{0,n-p\}$, τότε το σύνολο των κρίσιμων τιμών της είναι μηδενοσύνολο στον $\mathbb{R}^p$.

- Πρώτα δείχνουμε την περίπτωση $r=\infty$, δηλαδή η f να είναι λεία. Έτσι, όταν περάσουμε στη γενική δεν θα μας ξενίσει τόσο πολύ καθώς κάπως προοικονομείται από την αποδ για $r=\infty$.

- Για την απόδειξη της λείας περίπτωσης χρησιμοποιούμε <u>ΕΤΟΙΜΟ</u> το εξής αποτέλεσμα:

FUBINI

Αν $A\subseteq\mathbb{R}^p\equiv\mathbb{R}\times\mathbb{R}^{p-1}$ μετρήσιμο, <u>και</u> $\forall\, c\in\mathbb{R}$, το A τέμνει το υπερεπίπεδο $\{c\}\times\mathbb{R}^{p-1}$ σε σύνολο που έχει $(p-1)$-διάστατο μέτρο μηδέν, τότε το A είναι μηδενοσύνολο στον $\mathbb{R}^p$.



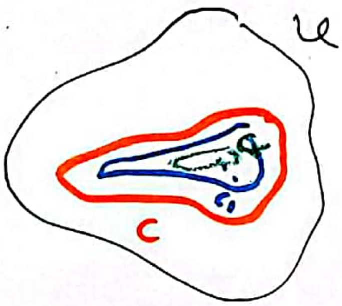
$r = \infty$

Αν $f: \mathcal{U} \to \mathbb{R}^p$, με $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ ανοιχτό, C^∞- συνάρτηση, τότε το $f(C) \subseteq \mathbb{R}^p$ είναι υποσύνολο μέτρου μηδέν

Η απόδειξη γίνεται με επαγωγή στο n, και για $n=0$, ο $\mathbb{R}^0$ έχει ένα μόνο σημείο, οπότε το θεώρημα ισχύει. Υποθέτουμε λοιπόν, ότι το Θ ισχύει για $n-1$.

→ C: τα κρίσιμα σημεία της f, $= \{x \in \mathcal{U} \mid \operatorname{rank} df_x < \min\{n,p\}\}$.

→ Ορίζουμε τα C_k ως το σύνολο των $x \in \mathcal{U}$ όπου όλες οι μερικές παράγωγοι τάξης $\leq k$ μηδενίζονται.



Τότε, $\forall k$ C_k κλειστό [έπεται γενικά από την αρχή μεταφοράς], και

$C \supset C_1 \supset C_2 \supset \dots \supset C_k \supset \dots$

ΛΥΝΕΤΑΙ ΣΕ 3 ΒΗΜΑΤΑ.

ΒΗΜΑ 1 : Το $f(C \setminus C_1)$ έχει μέτρο μηδέν

ΒΗΜΑ 2 : $\forall k \geq 1$, το $f(C_k \setminus C_{k+1})$ έχει μέτρο μηδέν

ΒΗΜΑ 3 : Για k αρκετά μεγάλο, $f(C_k)$ έχει μέτρο μηδέν.

Τότε, $C = (C \setminus C_1) \cup (C_1 \setminus C_2) \cup \dots \cup (C_{k-1} \setminus C_k) \cup C_k \Rightarrow$

$\Rightarrow f(C) = f(C \setminus C_1) \cup \dots \cup f(C_k) \Rightarrow$

ΜΗΔΕΝΟΣΥΝΟΛΟ   μηδενοσύνολο

$\Rightarrow f(C)$ ΜΗΔΕΝΟΣΥΝΟΛΟ.

Βήμα 1:

ο Μπορούμε να υποθέσουμε $p \geq 2$: Αν $p = 1 \to C_1 \equiv C \to C \setminus C_1 = \emptyset \to f(\emptyset) = \emptyset$.

→ Έστω $x_0 \in C \setminus C_1$. Ψάχνουμε ανοιχτό $V \subseteq \mathbb{R}^n$ γύρω από το x_0, ώστε $\boxed{f(V \cap C) \text{ να έχει μέτρο } 0.}$

$x_0 \in C \setminus C_1 \Rightarrow \dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_0) \neq 0$ για κάποια $1 \leq i \leq p$, $1 \leq j \leq n$, και, χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να θεωρήσουμε $i = j = 1$.

Τότε, για την $h : U \to \mathbb{R}^n$

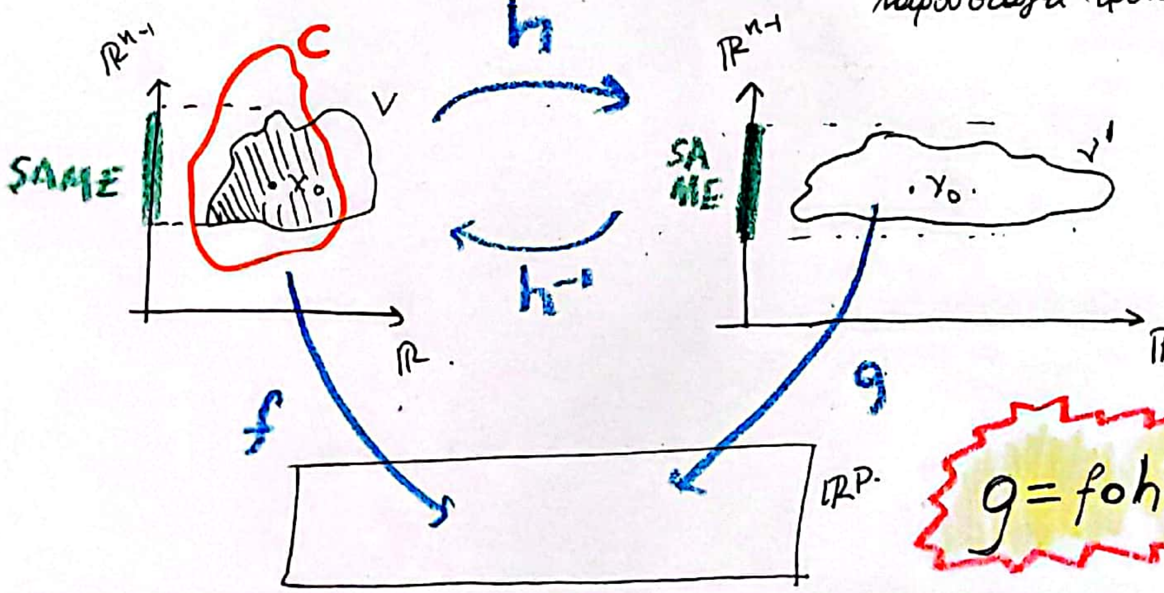
$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto (f_1(x_1, \dots, x_n), x_2, \dots, x_n) \quad \text{έχουμε}$$

$$\begin{array}{cc} \neq 0 & \text{ΑΔΙΑΦΟΡΟ} \end{array}$$

$$dh_{x_0} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_0) & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2}(x_0) & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n}(x_0) \\ 0 & & & \\ \vdots & & \boxed{I_{n-1}} & \\ 0 & & & \end{bmatrix} \Longrightarrow$$

$\Longrightarrow$ Το dh_{x_0} έχει full rank $\Rightarrow J_{h_{x_0}} \neq 0 \Rightarrow$ έχει τοπική αντίστροφο γύρω από το x_0: $\exists \underbrace{V, V'}_{\text{ανοιχτά}}$ και $h^{-1} : V' \to V$ με $h \circ h^{-1} = id_{V'}$, $\det(dh)\det(dh^{-1}) = 1$,

η h^{-1} μπορεί και είναι λεία, καθώς $Dh^{-1} \circ Dh = I_n$ δεν δείχνει να παρουσιάζει προβλ. στην ύπαρξη παραγώγου.



$$\boxed{g = f \circ h^{-1}}$$

ορίζουμε $g = f \circ h^{-1} \Rightarrow dg_y = df_x \circ dh^{-1} \Rightarrow \det(dg_y) = \det(df_x)\,\underbrace{\det(dh^{-1}_y)}_{\neq 0} \Rightarrow$

$\Rightarrow \underset{\underset{h(x)}{\shortparallel}}{y}$ κρίσιμο σημείο της $g \leftrightarrow x$ κρίσιμο σημείο της f στο V

$\updownarrow$

$x \in C \cap V$

ΑΡΑ x κρίσιμο σημείο για την f στο V $\leftrightarrow$ x κρίσιμο για την g, $x \in V \cap C$ $\leftrightarrow$

$\leftrightarrow C'$: Τα κρίσιμα της g είναι το $h(V \cap C)$.

ΑΡΑ $\boxed{g(C') = f \circ h^{-1}(h(V \cap C)) = f(V \cap C)}$ θέλουμε το $g(C')$ να είναι μηδενοσύνολο στον $\mathbb{R}^p$

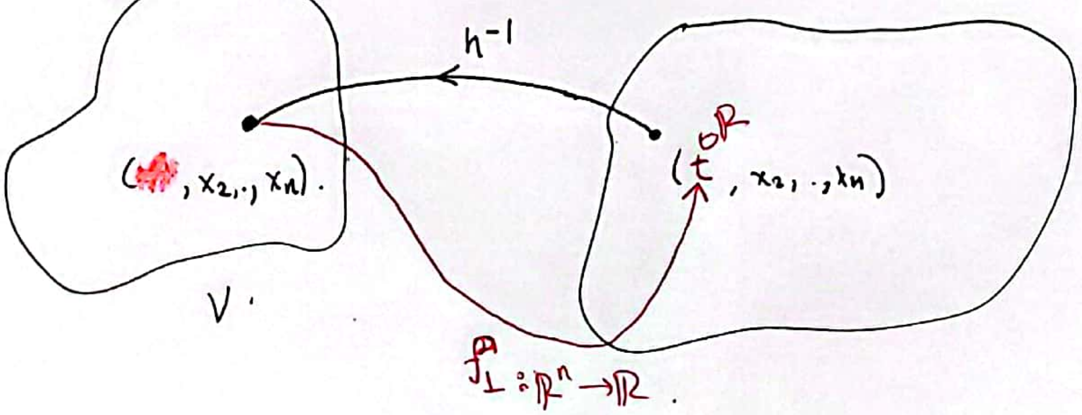
⚠ Η g, έτσι όπως κατασκευάστηκε, μεταφέρει σημεία του υπερεπιπέδου $(\{t\} \times \mathbb{R}^{n-1}) \cap V'$ μέσα στο $\{t\} \times \mathbb{R}^{p-1}$

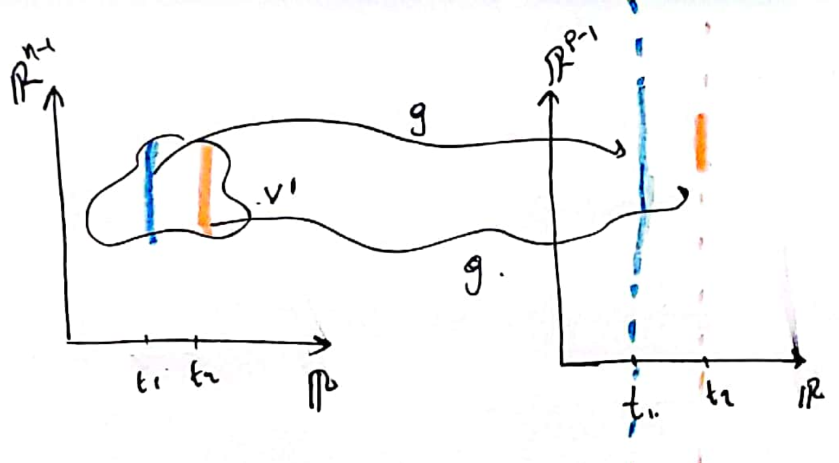
ΓΙΑΤΙ:

$$g(t, x_2, .., x_n) = f(h^{-1}(t, x_2, .., x_n)) =$$

$$= (f_1(h^{-1}(x)), f_2(h^{-1}(x)), .., f_p(h^{-1}(x))) =$$

$$= (f_1(h^{-1}(t, x_2, .., x_n)), y_2, .., y_p) = (t, y_2, .., y_p).$$





Έτσι νόημα λοιπόν να ορίσουμε $\forall t \in \mathbb{R}$ τον περιορισμό της g στο υπερεπίπεδο $\{x_1=t\}$.

$$g^t : (\{t\}\times\mathbb{R}^{n-1})\cap V' \longrightarrow t\times\mathbb{R}^{p-1}$$
$$x \longmapsto g(t,x)$$

λεία δεν θα παρουσιάζει πρόβλημα στην παράγωγο.

Μπορούμε να γράψουμε την παράγωγο της g

ως $$dg_{(t,x)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \boxed{\;} & (dg^t)_x \end{pmatrix}$$

Αδιάφορο, $\frac{\partial g_i}{\partial t}, i\geq 2$.

οπότε (dg^t) full rank $\longleftrightarrow$ dg full rank $\Longrightarrow$

$\Longrightarrow$ x κρίσιμο σημείο για την g^t $\longleftrightarrow$ (t,x) κρίσιμο για την g

$\forall t$: Η g^t είναι λεία, και ξεκινάει από $\mathcal{U}_t = \{(x_2,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^{n-1} \mid (t,x_2,\dots,x_n)\in t\times\mathbb{R}^{n-1}\cap V'\}$.

που είναι ανοιχτό $\forall t$

Άρα για αυτή ισχύει η επαγωγική υπόθεση, οπότε οι κρίσιμες τιμές της είναι σύνολο μέτρου μηδέν στο $t\times\mathbb{R}^{p-1}$. Οπότε, αφού $\forall t$ οι κρίσιμες τιμές της g^t είναι τομές των $g(C')$ με το $\{x_1=t\}$ υπερεπίπεδο, που έχουν $p-1$-διάστατο μηδέν 0, από Fubini το $g(C')$ είναι μηδενοσύνολο $\Longleftrightarrow$ το $f(V \cap C)$ είναι μηδενοσύνολο

Για $x_0 \in C \setminus C_1$ βρήκαμε V ανοιχτό $\subseteq \mathbb{R}^n$ ώστε $f(V \cap C)$ μηδενοσύνολο. Αφού το $C \setminus C_1$ μπορεί να καλυφθεί από αριθμήσιμα το πλήθος τέτοια ανοιχτά σύνολα το $f(C \setminus C_1)$ είναι επίσης μηδεν. - βλέπε τέλος Βήμα 2.

$\boxed{\text{Βήμα 2}}$ $\forall k \geq 1$ $f(C_k \setminus C_{k+1})$ μηδενοσύνολο. Έστω $x_0 \in C_k \setminus C_{k+1}$

Όπως πριν, μπορούμε να κάνουμε τοπική αλλαγή μεταβλητής, γύρω από το x_0 γιατί:

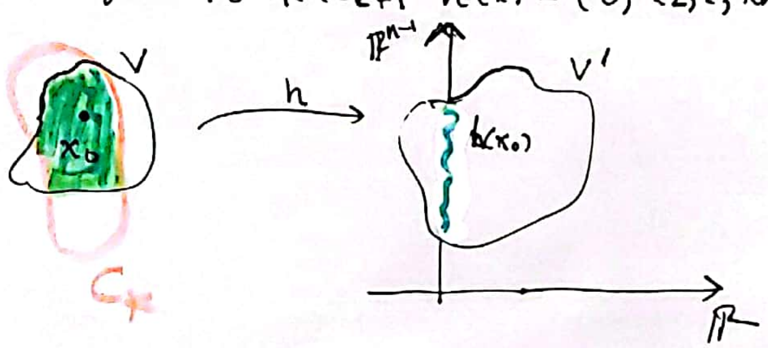
Αφού $x_0 \in C_k \setminus C_{k+1} \rightsquigarrow$ υπάρχει $(k+1)$-στή μερική παράγωγος στο x_0, ώστε $w(x_0) := \dfrac{\partial^{s_1+\dots+s_m} f}{(\partial x_1)^{s_1} \dots \partial x_{m}^{s_m}}(x_0) = 0$ και $\dfrac{\partial w}{\partial x_j}(x_0) \neq 0$. $\Sigma s_m = k$. Χωρίς απώλεια της γεν. μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\dfrac{\partial w}{\partial x_1}(x_0) \neq 0$.

Αυτό επιτρέπει να ορίσουμε όπως πριν, τοπικά αμφιδιαφόριση h

$$\text{με} \quad h(x_1, \dots, x_n) = (w(x_1, \dots, x_n), x_2, \dots, x_n).$$

γύρω από ανοιχτή περιοχή V του x_0.

και για $x \in C_k \setminus C_{k+1}$ $h(x) = (0, x_2, \dots, x_n)$



Η h φέρνει το $C_k \cap V$ μέσα στο υπερεπίπεδο $0 \times \mathbb{R}^{n-1}$

$g := f \circ h^{-1} : V' \longrightarrow \mathbb{R}^p$

ορίζουμε $\boxed{g_0 := g\big|_{(\{0\}\times\mathbb{R}^{n-1})\cap V'}}$

Τότε, $h(C_k \cap V) \subseteq (\{0\}\times\mathbb{R}^{n-1})\cap V'$, και μέσα στα κρίσιμα σημεία της g_0 είναι το $h(C_k \cap V)$ αφού περιέχουν το $h(C \cap V)$

οπότε $f(C_k \cap V) \subseteq g_0(\{\text{κρίσιμα σημεία της } g_0\})$ που έχει μέτρο μηδέν από την επαγ-υπόθεση

Άρα $f(C_k \cap V)$ μηδενοσύνολο.

- $\forall x \in C_k \setminus C_{k+1}$ υπάρχει $V_x : x \in V_x$, V_x ανοιχτό, $f(C_k \cap V_x)$ μηδενοσύνολο.

έτσι που τυχόν έχουμε πύκνωση από $x \in C_k \setminus C_{k+1}$, καλύπτουμε την περιοχή από $V = \bigcup_{x\in R} V_x$.

Το $C_k \setminus C_{k+1}$ μπορεί να καλυφθεί από αριθμήσιμα το πλήθος τέτοια V_{x_i}, αφού είναι το σύνολο των ρητών-σημείων του. και $\forall i$ $f(C_k \cap V_{x_i})$ μηδενοσύνολο, και

$C_k \cap V_{x_i} \supseteq (C_k \setminus C_{k+1}) \cap V_{x_i}$

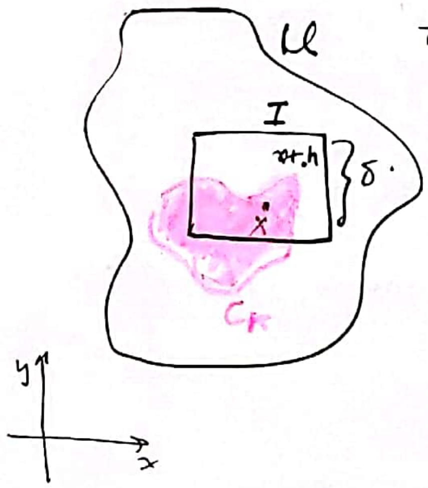
Άρα $C_k \setminus C_{k+1} \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} V_{x_i} \Rightarrow$

$\Rightarrow C_k \setminus C_{k+1} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \underbrace{[C_k \setminus C_{k+1}] \cap V_{x_i}}_{\subseteq C_k \cap V_{x_i}} \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} C_k \cap V_{x_i} \Rightarrow$

$\Rightarrow f(C_k \setminus C_{k+1}) \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} \underbrace{f(C_k \cap V_{x_i})}_{\text{μηδενο}}$ μηδενοσ. $\Rightarrow f(C_k \setminus C_{k+1})$ μηδενοσύν.

Βήμα 3 · $f(C_k)$ έχει μέτρο μηδέν για k αρκετά μεγάλο.

Πακέτο: Έστω $I \subset U$ κλειστός κύβος στο U παράλληλος στους άξονες, με πλευρά δ. Αρκεί νδο $f(C_k \cap I)$ έχει μέτρο 0. Το αποτέλεσμα έπεται, αφού μπορούμε τελικά να καλύψουμε το C_k επιτυχώς αριθμήσιμα τέτοιους κύβους.

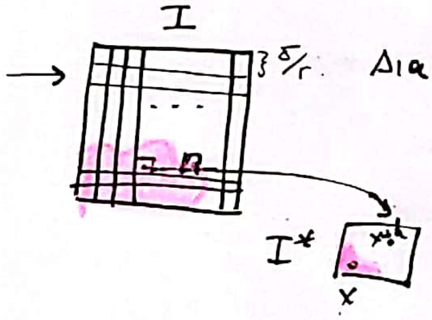


Για $x \in C_k \cap I$, $x+h \in I$ από Taylor και τον ορισμό του C_k παίρνουμε

• $f(x+h) = f(x) + \Big($ΟΡΟΙ ΠΟΥ ΠΕΡΙΕΧΟΥΝ ΜΕΡΙΚΕΣ ΠΑΡΑΓΩΓΟΥΣ ΣΤΟ x ΤΑΞΗΣ ΕΩΣ ΚΑΙ k, ΠΟΥ ΘΑ ΜΗΔΕΝΙΣΤΟΥΝ$\Big) + R(x,h) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow f(x+h) - f(x) = R(x,h), \text{ για } x+h \in I. \quad (1)$$

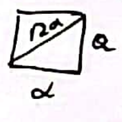
• $\|R(x,h)\| \leq C \cdot \|h\|^{k+1}$, (όπου C σταθερά $C = C(f,I)$). (2)

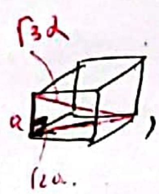


Διαμερίζουμε το I σε r^n κύβους πλευράς δ/r. Διαλέγουμε έναν από αυτούς I^*, με $C_k \cap I^* \neq \emptyset$.

Τότε, για $x \in C_k \cap I^*$, οποιοδήποτε σημείο του I^* μπορεί να γραφεί $y = x+h$

με $\|h\| \leq \sqrt{n}\left(\delta/r\right)$. (3)

$n=2$ 

Πυθαγ.
, $n=3$ 

, γενικεύεται για n διαστάσεις.

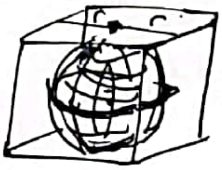
(1), (2), (3): $\|f(x+h) - f(x)\| \leq \|R(x,h)\| \leq C\|h\|^{k+1} \overset{k+1 \in \mathbb{N}}{\leq}$

$$\leq C \cdot \left(\frac{\sqrt{n}}{r} \cdot \delta\right)^{k+1} \quad (*), \text{ για } x \in C_k \cap I^*, \ x+h \in I^*$$

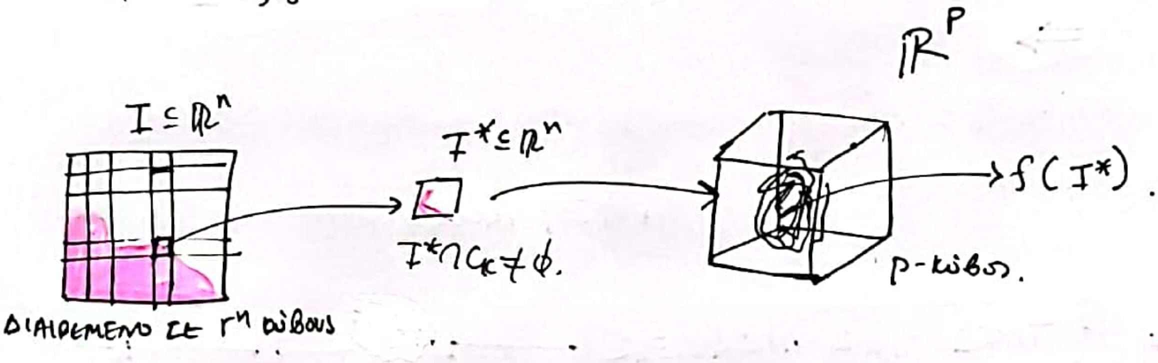
(*) δείχνει ότι $f(I^*)$ μπαίνει μέσα σε μπάλα κλειστή ακτίνας

$c\cdot\left(\frac{\sqrt{n}}{r}\cdot\delta\right)^{k+1}$ με κέντρο το $f(x_0)$
$\Rightarrow$ μπορεί να μπει σε κλειστό κύβο πλευράς

$2\cdot c\cdot\left(\frac{\sqrt{n}}{r}\cdot\delta\right)^{k+1}$ αφήνοντας αρκετό χώρο ακάλυπτο μέσα στον κύβο.



Έχουμε ότι, ξεκινώντας από το I



Το $C_k\cap I$ το πολύ να περιέχεται σε r^n το πλήθος υποκύβους του $\mathbb{R}^n$ πλευράς δ/r. καθένας από τους οποίους θα έχει εικόνα που μπαίνει σε κύβο στον $\mathbb{R}^p$ πλευράς $2\cdot c\left(\frac{\sqrt{n}}{r}\delta\right)^{k+1}$ $\mathcal{L}=\{I_i^*\}_{i=1}^{r^n}$ η κάλυψη του $C_k\cap I$ $\Rightarrow$

$$\Rightarrow f(C_k\cap I)\subseteq\bigcup^{r^n} f(I_i^*)\Rightarrow$$

$$\mu(f(C_k\cap I))\le \underbrace{V}_{\text{όγκος της κάλυψης}}\le r^n\cdot v(f(I^*))\le r^n\cdot\left(2c\left(\frac{\sqrt{n}}{r}\cdot\delta\right)^{k+1}\right)^p=$$

$$=r^n\cdot(2c)^p(\sqrt{n}\cdot\delta)^{p(k+1)}\cdot\frac{r^n}{r^{(k+1)\cdot p}}$$

$$=(2c)^p(\sqrt{n}\,\delta)^{p(k+1)}\cdot r^{n-(k+1)p}.$$

Αν $n-(k+1)p<0\Rightarrow k+1>n/p\Rightarrow k>\left(\frac{n}{p}-1\right)\wedge k\in\mathbb{N}$.

Υπάρχουν άπειρα K που να κάνουν τη δουλειά. Παίρνουμε κάποιο απο αυτά.

<u>και</u>

$V \leq C \cdot r^{n-(k+1)p}$.

παίρνοντας όλο και λεπτότερες διαμερίσεις, το V γίνεται όσο μικρό θέλουμε, (για $r \to \infty$. $V \to 0$)

Δηλαδή, για το $f(C_k \cap I)$

βρίσκουμε κάλυψη από κλειστούς κύβους με οσοδήποτε μικρό όγκο $\longrightarrow$ $f(C_k \cap I)$ ΜΗΔΕΝΟΣΥΝΟΛΟ.

ΤΕΛΟΣ ΤΗΣ ΑΠΟΔΕΙΞΗΣ

<u>Σχόλιο</u>: Αν και υπακούει στην απόδειξη η περίπτωση $n<p$ είναι "αυτόματη"!
- Αρκεί μάλιστα μόνο C^1 διαφορίσιμη, και όλο το U απεικονίζεται σε μηδενοσύνολο.

ΓΙΑΤΙ ορίζοντας $g: U \times \mathbb{R}^{p-n} \longrightarrow \mathbb{R}^p$

$(x_1,..,x_n,x_{n+1},..,x_p) \mapsto f(x_1,..,x_n)$

Τότε, η g θα είναι C^1, όπως κ οι συνιστώσες της.

Έχουμε ότι $U \equiv U \times \{0_{p-n}\} \subset U \times \mathbb{R}^{p-n}$ έχει μέτρο μηδέν.

$f(U) = g(U \times \{0\})$ έχει μέτρο 0, αφού

προέρχεται από σύνολο μέτρου μηδέν μέσω C^1 απεικόνισης

Δεν θα το δείξουμε εδώ!!

Γενική Περίπτωση

Έστω $f: U \to \mathbb{R}^p$, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ανοιχτό. Αν η f είναι C^r, $r > \max\{0, n-p\}$, τότε οι κρίσιμες τιμές της αποτελούν μηδενικό σύνολο στον $\mathbb{R}^p$.

Η απόδειξη που θα παρουσιάσουμε εδώ δεν υφίσταται χωρίς το Θεώρημα Αδρής Σύνθεσης (Rough decomposition theorem), το οποίο θα σημειώσουμε εδώ και δεν θα αποδείξουμε. Επιπλέον, αναφέρουμε ότι ο τρόπος απόδειξης του θεωρήματος του θα ακολουθήσει υπάρχει στο βιβλίο: Transversal mappings & Flows, Ralph Abraham.

ΘΕΩΡΗΜΑ ΑΔΡΗΣ ΣΥΝΘΕΣΗΣ ΤΩΝ KNESER-GLAESER.

Έστω $W \subseteq \mathbb{R}^m$, $V \subseteq \mathbb{R}^n$ ανοιχτά

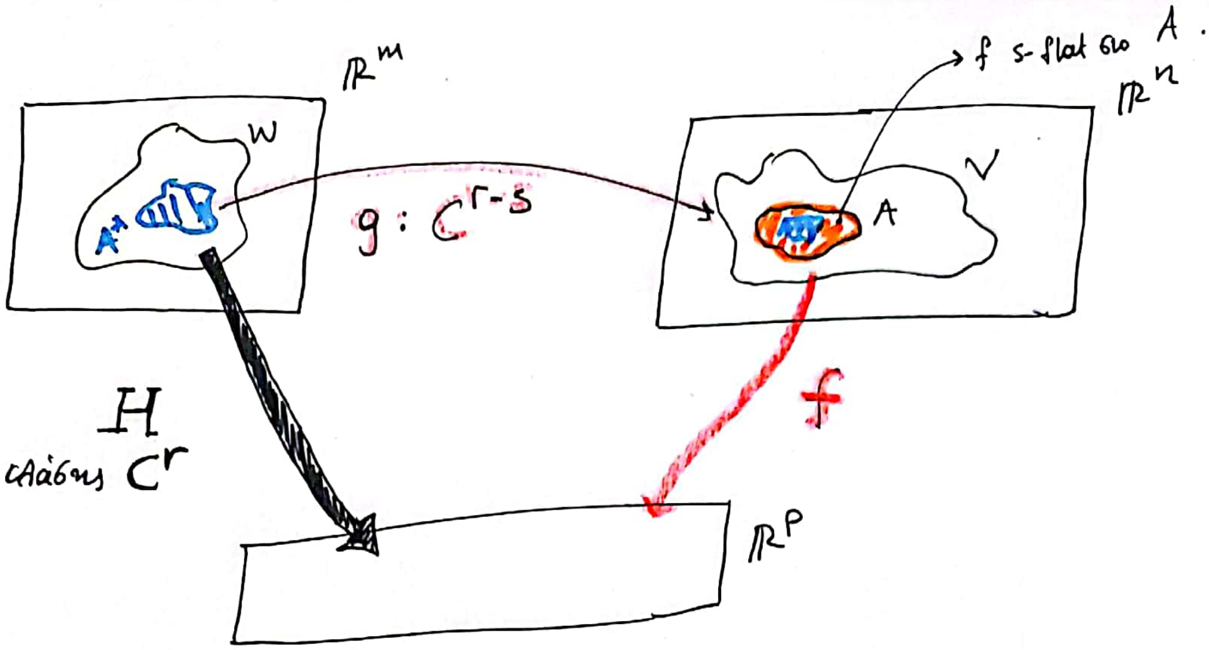
- $A^* \subseteq W$, $A \subseteq V$ σχετικά κλειστό στο V
- $f: V \to \mathbb{R}^p$ C^r-συν/ση ώστε στο A όλες οι μερικές παράγωγοι τάξης έως και s να μηδενίζονται (s-flat)
- $g: W \to V$ C^{r-s} συνάρτηση με $g(A^*) \subseteq A$.

ΤΟΤΕ ΥΠΑΡΧΕΙ ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΗ $H: W \to \mathbb{R}^p$

$\boxed{\text{I}}$ Η H είναι C^r

$\boxed{\text{II}}$ $H(x) = f(g(x))$ $\forall x \in A^*$!!

$\boxed{\text{III}}$ Μετά στο A^* να μηδενίζονται όλες οι μερικές παράγωγοι της f τάξης έως και s. (H να είναι s-flat)



Επιπλέον, όπως και στη λεία περίπτωση θα χρησιμοποιήσουμε χωρίς απόδειξη αντίστοιχο θεώρημα Fubini:

Για $A \subseteq \mathbb{R}^p \equiv \mathbb{R}^{p-q} \times \mathbb{R}^q$ μετρήσιμο, αν $\forall c \in \mathbb{R}^p$ το $A \cap (\mathbb{R}^{p-q} \times \{c\})$ έχει $(p-q)$-διάστατο μέτρο μηδέν, τότε και το A έχει p-διάστατο μέτρο μηδέν.

Η ΑΠΟΔΕΙΞΗ ΤΟΥ ΘΕΩΡΗΜΑΤΟΣ ΤΟΥ SARD.

Έστω $C := \{x \in U \mid \operatorname{rank} Df_x < \min\{n,p\}\}$, τα κρίσιμα σημεία της f.

→ Ορίζουμε $C_k = \{x \in U \mid D^s f_x = 0 \ \forall s = 1, \dots, k\}$ - δηλαδή εκεί που η f είναι k-flat. αυτό το κάνουμε για $k = 1, 2, \dots, r$.

→ Θέτουμε $K = C \setminus C_1 = \{x \in U \mid 1 \leq \operatorname{rank} Df(x) < \min\{n,p\}\}$

$x \in C_1 \Rightarrow df_x$ η μηδενική συνάρτηση $\leftrightarrow$ $Df(x)$ ο μηδενικός πίνακας του $\mathbb{R}^{p \times n}$ που έχει rank $= 0$.

ΠΑΛΙ 3 ΒΗΜΑΤΑ ΛΥΝΟΥΝ ΤΗΝ ΑΠΟΔΕΙΞΗ

1 → $f(C_r)$ μηδενοσύνολο

2 → $f(C_1)$ μηδενοσύνολο

3 → $f(K)$ ΜΗΔΕΝΟΣΥΝΟΛΟ

Για τα Βήμα 1 θα χρειαστούμε το παρακάτω:

Λήμμα: Αν $k \geq 1$ και $k \geq n/p$ τότε $f(C_k)$ μηδενοσύνολο.

Η απόδειξη είναι ανάλογη με αυτή του Βήματος 3 της ίδιας περίπτωσης

οπότε την παραλείπουμε βασικά: Έστω $I \subset \mathbb{R}^n$ κλειστός κύβος με πλευράς δ θα δο $f(I \cap C_k)$ είναι μηδενοσύνολο.

$\rightarrow$ Απο Θ-Taylor παίρνουμε

- $f(x+h) = f(x) + R(x,h)$, $x \in C_k \cap I$, $x+h \in I$
- $\|R(x,h)\| \leq M\|h\|^{k+1}$, $M = M(I, D^k f)$ σταθερά.

$\rightarrow$ Διαμερίζουμε με φυσικό τρόπο τον κύβο I σε r^n το πλήθος κύβους πλευράς δ/r.

$\rightarrow$ Διαλέγουμε I^* μέσα στην διαμέριση να να έχει κοινά σημεία με το C_k. Τότε για $x \in C_k \cap I^*$, $x+h \in I^*$ έχουμε

ότι $\|h\| \leq \sqrt{n} \cdot \frac{\delta}{r}$

οπότε για τους κύβους μικρούς που έχουν μέσα τους σημεία του C_k, με $x \in C_k \cap I^*$, $x+h \in I^*$.

έχουμε $\|f(x+h) - f(x)\| = \|R(x,h)\| \leq M\|h\|^{k+1} \leq M \cdot \left(\sqrt{n}\frac{\delta}{r}\right)^{k+1}$

$\Rightarrow$ $f(I^*)$ μέσα σε μπάλα με κέντρο $f(x)$, $x \in C_k$ και ακτίνα $M\left(\sqrt{n}\frac{\delta}{r}\right)^{k+1}$ $\Rightarrow$ μέσα σε κύβο με κέντρο το $f(x)$ και με πλευρά $2M\left(\sqrt{n}\frac{\delta}{r}\right)^{k+1}$.

Το $\{I_i^*\}_{i=1}^{r^n}$ είναι κάλυψη του $C_k \cap I$. οπότε $f(C_k \cap I) \subseteq \bigcup^{r^n} f(I_i^*)$

οπότε το μέτρο του $f(C_k \cap I)$ φράσσεται από τον όγκο της κάλυψης

$$V \leq r^n \cdot V(f(I_i^*)) \leq r^n \cdot \left(2M\left(\sqrt{n}\,\delta/r\right)\right)^{p(k+1)}$$

αφού $n \leq pk$ από την υπόθεση $\longrightarrow n - p(k+1) < 0$,

οπότε $r \to \infty \Rightarrow V \to 0 \Longrightarrow f(C_k \cap I)$ έχει μέτρο μηδέν.

↳ όπως έχει σχολιασθεί ότι ίδια περίπτωση αυτό αρκεί για να πάρουμε $f(C_k)$ μηδενοσύνολο

((A) Σε περίπτωση που έχει δημιουργηθεί ασάφεια σχετικά με τους κύβους στον $\mathbb{R}^p$ με κέντρα $f(x)$:

Τον αρχικό κύβο I του $\mathbb{R}^n$ τον "σπάσαμε" σε πεπερασμένους μικρότερους I_i^*. Σε καθέναν από αυτούς πήραμε ΕΝΑ $x \in C_k \cap I_i^*$ (αν υπήρχε). Οπότε κάθε I_i^* με $I_i^* \cap C_k \neq \emptyset$ το στείλαμε με σε

ένα ακριβώς κύβο του $\mathbb{R}^p$ με κέντρο το $f(x)$.

Και το πολύ όλοι οι r^n το πλήθος κύβοι του I να έχουν κοινό σημείο με το C_k. Τότε, στην extreme περίπτωση χρειαζόμαστε όλα τα $f(I_i^*)$ που περιέχονται σε καλά ορισμένους, r^n το πλήθος κύβους του $\mathbb{R}^p$, και χωράνε πολύ άνετα εκεί μέσα.

ΔΕΝ ΕΧΟΥΜΕ ΟΡΙΣΕΙ ΚΑΤΙ ΑΣΧΗΜΑ...)

Απόδειξη Βήματος 1:

Από τις υποθέσεις του Sard, $r \geq 1$, $r \geq n-p+1$.

$\Downarrow$

$\mathbb{N} \ni r-1 \geq 0$

$\Downarrow$

$p(r-1) \geq r-1$.

$\Downarrow$

$rp \geq r-1+p \geq n \Longrightarrow$

$\Longrightarrow r \geq \frac{n}{p}$, οπότε από το Λήμμα $f(C_r)$ έχει μέτρο 0.

Αποδειξη Βημα 2 : Με επαγωγή στο n.

- Για $n \leq p$ είμαστε ok, γιατί τότε $n \leq p \Rightarrow \frac{n}{p} \leq 1$, άρα παίρνοντας $k=1$ και εφαρμόζοντας το λήμμα $f(B_1)$ έχει μέτρο 0.

Εδώ περιέχεται και το 1ο βήμα της επαγωγής

- Έστω ότι ισχύει για $n-1$

$$B_1 = C_1 \setminus C_2 \cup \dots \cup C_{r-1} \setminus C_r \cup C_r$$

Βημα 1

$f(C_r)$ μέτρο μηδέν

→ Δείχνοντας ότι για $k=1,\dots,r-1$ $f(B_k \setminus B_{k+1})$ έχει μέτρο μηδέν έχουμε τελειώσει:

Για να δείξουμε $f(C_k \setminus C_{k+1})$ μέτρου 0 αρκεί για κάθε $x \in C_k \setminus C_{k+1}$ να βρούμε ανοιχτό V, τέτοιο ώστε $f(C_k \cap V)$ μέτρου μηδέν. Τότε, αφού το $C_k \setminus C_{k+1}$ καλύπτεται από αριθμήσιμα τέτοια ανοιχτά, το $f(C_k \setminus C_{k+1})$ θα έχει μέτρο μηδέν.

Για $x_0 \in C_k \setminus C_{k+1}$. Τότε όλες οι μερικές παραγ- τάξης $\leq k$ είναι μηδέν, αλλά κάποια τάξης $k+1$ στο x_0 είναι $\neq 0$. Δεν παρανομούμε αν υποθέσουμε ότι $\partial_1 w(x_0) \neq 0$, όπου $w(x) = \partial_{i_1} \cdots \partial_{i_k} f(x_0) = 0$.

ΠΑΛΙ ΘΑ ΟΡΙΣΟΥΜΕ ΤΗΝ $h : U \longrightarrow \mathbb{R}^p$

$$(x_1,\dots,x_n) \longrightarrow (w(x_1,\dots,x_n), x_2,\dots,x_n) = h(x_1,\dots,x_n)$$

έχουν γίνει παραγ. μέχρι k τάξη. έχουμε σίγουρα περιθώριο ακόμα $(r-k)$ παραγ.

Τότε για $x \in U$, η h είναι C^{r-k}

Επιπλέον, Dh_{x_0} έχει full rank, οπότε, για την h μπορούμε να βρούμε ανοιχτά V,W ώστε $h:V\to W$ να έχει αντίστροφο $g=h^{-1}$, που είναι επίσης C^{r-k}

Στο σημείο αυτό, θα θέλαμε, όπως και στην περίπτωση $r=\infty$ να κάνουμε τοπική αλλαγή μεταβλητής για να πάρουμε C^r απεικόνιση.

Εδώ θα εφαρμόσουμε το θεώρημα KNESER-GLAESER!!, για $A=C_k\cap V$, $A^*=h(A)$.

και θα πάρουμε $F:W\to\mathbb{R}^p$ με

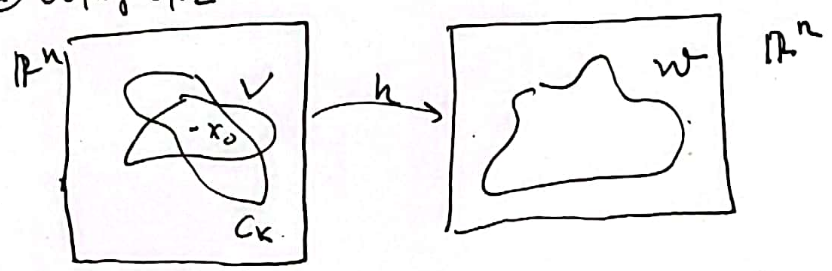
$\boxed{\text{I}}$. F C^r συνάρτηση

$\boxed{\text{II}}$ $\forall x\in A^*=h(A)$: $F(x)=f\circ h^{-1}(x)$

$\boxed{\text{III}}$ $DF(x)=0 \quad \forall x\in A^*$

Τότε, αν $W_0=\{(x_2,..,x_n)\in\mathbb{R}^{n-1} \mid (0,x_2,..,x_n)\in W\}$

(*) Θυμίζουμε



$(x_1,x_2,..,x_n)\longmapsto(w(x_1,..,x_n),x_2,..,x_n)$

Για $x\in C_k$: $(x_1,..,x_n)\xmapsto{h}(0,x_2,..,x_n)$

και ορίζ. $F_0:W_0\longrightarrow\mathbb{R}^p$

$(x_2,..,x_n)\longrightarrow F(0,x_2,..,x_n)$

και C_1^0: τα σημεία του W_0 που $DF_0(x_1,..,x_n)=0$

Τότε, από επαγωγική υπόθεση $F_0(C_q^{\circ})$ έχει μέτρο μηδέν, και

$$A^* = h(K_k \cap V) \subseteq \{0\} \times C_q^{\circ} \quad [x \in A^* \Rightarrow DF(x) = 0],$$

Το έχουμε

οπότε $f(C_k \cap V) = F(h(B_s \cap V)) \subseteq F(\{0\} \times C_1^{\circ}) = F_0(C_q^{\circ})$.

Άρα $f(C_k \cap V)$ έχει μέτρο μηδέν. $\rightsquigarrow$ Μπορεί να καλυφθεί το $C_k \setminus C_{k+1}$ από αριθμήσιμα τέτοια V $\longrightarrow$ $f(C_k \setminus C_{k+1})$ έχει μέτρο 0.

ΑΡΑ

$$C_1 = (C_1 \setminus C_2) \cup \dots \cup (C_{r-1} \setminus C_r) \cup C_r \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(C_1) = \underbrace{f(C_1 \setminus C_2)}_{\text{μηδενοσύνολο}} \cup \dots \cup \underbrace{f(C_r)}_{\text{μηδενικό}}$$

$\longrightarrow$ $f(C_1)$ μηδενοσύνολο.

Βήμα 3 $\longrightarrow$ $f(K)$ έχει μέτρο μηδέν

ΟΡ $K_q = \{x \in U \mid \operatorname{rank} Df(x) = q\}$, Τότε $K = K_1 \cup \dots \cup K_{p-1}$

Αρκεί να δείξουμε ότι $f(K_q)$ μηδενοσύνολο.

Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $q \le n$ ($q > n \rightsquigarrow K_q$ κενό)

Αρκεί να το δείξουμε

ότι $\forall x \in K_q$ υπάρχει V_x ανοικτό ώστε $f(V_x \cap K_q)$ μηδενοσύνολο.

Έστω $x_0 \in K_q$. $\longrightarrow$ υπάρχει $V = V_1 \times V_2 \subseteq \mathbb{R}^q$, με V_1, V_2 ανοιχτές μπάλες ($V_1 \subseteq \mathbb{R}^n$... $V_2 \subseteq \mathbb{R}^{n-q}$)

$\Updownarrow$

$\text{rank}\, Df(x_0) = q$

στους χώρους όπου ζούνε, ώστε αν $x \in V_1, t \in V_2$.

$$f(x_1, .., x_n) = f(x_1, .., x_q, x_{q+1} .., x_n) =$$

$$= f(x, t) = (n(x,t), t) \quad , n : V_1 \times V_2 \longrightarrow \mathbb{R}^{p-q}$$

C^r-συνάρτηση.

Για $t \in V_2$, ορ $n_t : V_1 \longrightarrow \mathbb{R}^{p-q}$

$$x \longmapsto n(x,t) \quad \forall x \in V_1.$$

Άρα, για $t \in V_2 \rightsquigarrow K_q \cap (V_1 \times \{t\}) = \{x \in V_1 \mid Dn_t(x) = 0\} \times \{t\}$

αφού $Df(x,t) = \begin{bmatrix} Dn_t(x) & \overset{\text{Αδιάφορο}}{*} \\ 0 & I_q \end{bmatrix}$

rank q

οπότε $\boxed{\text{rank} Df(x,t) = q \Leftrightarrow \text{rank}\, Dn_t(x) \neq 0}$.

Για την n_t:
- Είναι C^r, με
- $r \geq n-p = (n-q)-(p-q)$

$\Biggr\} \Longrightarrow n_t\Big(\underbrace{\{x \in V_1 \mid Dn_t(x) = 0\}}_{\text{"Το C1 της } n_t\text{"}}\Big)$

έχει μέτρο 0 $\forall t \in V_2$

Οπότε από Fubini παίρνουμε $f(K_q \cap V)$ έχει μέτρο 0. $\Rightarrow f(K_q)$ έχει μέτρο 0 $\Rightarrow$ $\boxed{f(K) \text{ μέτρο μηδέν}}$

ΤΕΛΟΣ ΒΗΜΑ Β.

Το C διαίρεται

$$C = C_1 \cup K \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(C) = \underbrace{f(C_1)}_{\text{μηδενοσύνολο}} \cup \underbrace{f(K)}_{\text{μηδενοσύνολο}} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ $f(C)$ μηδενοσύνολο