

Ασυνση: $G = S_3$, $H = A_3 \cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$

(V, ρ) ανάγωγη αναπαράσταση της S_3 διάστασης 2

$$\text{Res}_H^G(V, \rho)(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \chi(1) = 2$$

$$\text{Res}_H^G(V, \rho)(123) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \chi(123) = -1$$

<u>A_3</u>	1	(1 2 3)	(1 3 2)
χ_1	1	1	1
χ_2	1	ω	ω^2
χ_3	1	ω^2	ω

$$\chi = \chi_2 + \chi_3$$

Επίσης οι ιδιοτιμές του πίνακα $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ είναι ω και ω^2 .

Υπενθύμιση: $(V, \rho) = \text{Ind}_H^G(W, \delta)$ αν $V = \bigoplus_{\sigma \in G/H} W_\sigma = \bigoplus_{r \in R} \rho(r)(W)$

Παρατήρηση:

Αν $V = \bigoplus_{r \in R} \rho(r)(W)$, τότε κάθε $v \in V$ γράφεται ως

$$\sum_{i=1}^n r_i w \quad \text{όπου} \quad R = \{r_1, r_2, \dots, r_n\} \text{ με } n = |G:H|. \text{ Έχουμε}$$
$$g \cdot \sum_{i=1}^n r_i w = \sum_{i=1}^n r'_i (h_i \cdot w)$$

όπου $g \cdot r_i = r'_i h_i$ με $r'_i \in R$, $h_i \in H$

Παραδείγματα:

$$\textcircled{1} \quad V^{\text{reg}} = (V, \rho) \quad \rho: G \longrightarrow GL(V) \\ g \mapsto (e_t \mapsto e_{gt})$$

$$W = \langle e_h \mid h \in H \rangle$$

$$W^{\text{reg}} = (W, \theta) \quad \theta: H \longrightarrow GL(W) \\ h \mapsto (e_t \mapsto e_{ht})$$

$$r \in R, \rho(r)(W) = \langle e_{rh} \mid h \in H \rangle$$

$$\text{Προφανώς } V^{\text{reg}} = \bigoplus_{r \in R} \rho(r)(W)$$

$$\textcircled{2} \quad V = \langle e_\sigma \mid \sigma \in G/H \rangle \quad \rho: G \longrightarrow GL(V) \\ g \mapsto (e_\sigma \mapsto e_{g\sigma})$$

$$(A \forall \sigma = rH \text{ τότε } g\sigma = grH) \quad \text{αναπαράσταση μεταθέσεων}$$

$$W = \langle e_H \rangle \quad \theta: H \longrightarrow GL(W) \quad \text{trivial} \\ h \mapsto (e_H \mapsto e_H)$$

$$r \in R, \rho(r)(W) = \langle e_{rH} \rangle$$

$$\text{Προφανώς } V = \bigoplus \rho(r)(W)$$

$$\textcircled{3} \quad A \forall \text{ Ind}_H^G \vartheta_1 = \rho_1 \text{ και } \text{Ind}_H^G \vartheta_2 = \rho_2, \text{ τότε} \\ \text{Ind}_H^G (\vartheta_1 \oplus \vartheta_2) = \rho_1 \oplus \rho_2$$

$$\textcircled{4} \quad A \forall \text{ Ind}_H^G (W, \vartheta) = (V, \rho) \text{ και } W' \text{ υποαναπαράσταση της } (W, \vartheta) \\ \text{τότε } \text{Ind}_H^G (W', \vartheta) = (V', \rho) \text{ όπου } V' = \sum_{r \in R} \rho(r)(W')$$

Λήμμα: Έστω $(V, \rho) = \text{Ind}_H^G(W, \vartheta)$

Έστω (V', ρ') μια αναπαράσταση της G και $f: W \rightarrow V'$
μια γραμμική απεικόνιση τ.ω. $f(\vartheta(h)(w)) = \rho'(h)(f(w))$
 $\forall h \in H$ και $w \in W$. Τότε υπάρχει μοναδική γραμμική
απεικόνιση $F: V \rightarrow V'$ που επεκτείνει την f (δηλ. $F|_W = f$)
τ.ω. $F \circ \rho(g) = \rho'(g) \circ F$.

Αποδ. Αν $s \in \sigma \in G/H$ και $x \in \rho(s)(W)$, τότε

$\rho(s)^{-1}(x) \in W$ οπότε

$$F(x) = F(\rho(s)\rho(s)^{-1}(x)) = \rho'(s)F(\rho(s)^{-1}(x)) = \rho'(s)f(\rho(s)^{-1}(x))$$

Χρησιμοποιούμε την παραπάνω ισότητα για μοναδικότητα
και ύπαρξη.

Θεώρημα: Έστω (W, ϑ) αναπαράσταση της $H \leq G$. Τότε
υπάρχει $(V, \rho) = \text{Ind}_H^G(W, \vartheta)$ και είναι μοναδική ως
προς ισομορφισμό.

Αποδ Λογω παραδείγματος ③, αρκεί (W, ϑ) ανάγωγη

Τότε $n(W, \vartheta)$ είναι υποαναπαράσταση της κανονικής, η οποία
έχει επαχθόμενη (βλ. παράδειγμα ①). Οπότε $\exists \text{Ind}_H^G(W, \vartheta)$
από το παράδειγμα ④

Έστω τώρα $(V', \rho') = \text{Ind}_H^G(W, \vartheta)$. Αν εφαρμόσουμε

το παραπάνω ηχημα στον εχκλεισμο $W \hookrightarrow V'$, τοτε
 βρισουμε γραμμικη απεικονιση $F: V \rightarrow V'$ που ειναι
 η ταυτοση στο W και ικανοποιει $F \circ \rho(g) = \rho'(g) \circ F \quad \forall g \in G$
 Έχουμε $F \circ \rho(g)(w) = \rho'(g)(w) \quad \forall g \in G, \forall w \in W$
 Αρα $V' = \sum_{r \in R} \rho'(r)(W) \subseteq \text{Im} F \Rightarrow V' = \text{Im} F$
 Αγου $\dim V' = \dim V = |G:H| \cdot \dim W \Rightarrow F$ ισομορφισμος

Θεωρημα Αν $(V, \rho) = \text{Ind}_H^G(W, \vartheta)$ τοτε, $\forall g \in G$,

$$\chi_\rho(g) = \sum_{\substack{r \in R \\ r^{-1}gr \in H}} \chi_\vartheta(r^{-1}gr) = \frac{1}{|H|} \sum_{\substack{x \in G \\ x^{-1}gx \in H}} \chi_\vartheta(x^{-1}gx)$$

Αποδ. $V = \sum_{r \in R} \rho(r)(W)$. Η $\rho(g)$ μεταθεζει τα $\rho(r)(W)$

Πιο συγκεκριμένα αν $g \cdot r = r_g h$ με $r_g \in R, h \in H$ τοτε
 $\rho(g)(\rho(r)(W)) = \rho(r_g)(W)$

Παιρνουμε ως βάση του V την ένωση των βάσεων των $\rho(r)(W)$

Τα στοιχεία $r \in R$ για τα οποία $r_g \neq r$ δινουν μηδενικά
 διαγωνια στοιχεία. Τα υπολοιπα ικανοποιούν:

$$\chi_\rho(g) = \sum_{\substack{r \in R \\ r^{-1}gr \in H}} \text{Tr}_{\rho(r)(W)}(\rho(g)|_{\rho(r)(W)}) = \sum_{\substack{r \in R \\ r^{-1}gr \in H}} \chi_\vartheta(r^{-1}gr)$$

αγου $\rho(g)|_{\rho(r)(W)} \circ \rho(r) = \rho(r) \circ \vartheta$ όταν $r^{-1}gr \in H$

Αν $x \in rH$ τοτε $\chi_\vartheta(\underbrace{x^{-1}gx}_H) = \chi_\vartheta(\underbrace{r^{-1}gr}_H)$ και $|rH| = |H|$

Π.χ. $G = S_3$, $H = A_3 = \langle c \rangle$ όπου $c = (1\ 2\ 3)$

$$\theta : A_3 \longrightarrow \mathbb{C}, c \mapsto \omega$$

$$\begin{aligned}\text{Ind}_H^G \chi_\theta(c) &= \chi_\theta(c) + \chi_\theta((1\ 2)c(1\ 2)) \\ &= \chi_\theta((1\ 2\ 3)) + \chi_\theta((1\ 3\ 2)) = \omega + \omega^2 = -1\end{aligned}$$

Με τον άλλο τρόπο :

Αν $x \in \{1, (1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2)\}$ τότε $x^{-1}cx = (1\ 2\ 3)$

Αν $x \in \{(1\ 2), (1\ 3), (2\ 3)\}$ τότε $x^{-1}cx = (1\ 3\ 2)$

Οπότε

$$\begin{aligned}\text{Ind}_H^G \chi_\theta(c) &= \frac{1}{3} (3 \cdot \chi_\theta((1\ 2\ 3)) + 3 \cdot \chi_\theta((1\ 3\ 2))) \\ &= \frac{1}{3} (3\omega + 3\omega^2) \\ &= -1\end{aligned}$$

Frobenius reciprocity $\langle \text{Ind}_H^G \psi, \chi \rangle_G = \langle \psi, \text{Res}_H^G \chi \rangle_H$

Π.χ. $G = S_3$, $H = A_3$,

χ χαρακτηρισ αναγωγής διάστασης 2

$$\psi_1 : A_3 \longrightarrow \mathbb{C}, \quad \psi_2 : A_3 \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$(1\ 2\ 3) \mapsto \omega$$

$$(1\ 2\ 3) \mapsto \omega^2$$

$$\text{Res}_H^G \chi = \psi_1 \oplus \psi_2$$

$$\text{Ind}_H^G \psi_i = \chi \quad \forall i=1,2$$

Κριτήριο Mackey : Πότε $\text{Ind}_H^G \chi$ αναγωγός;

Θεώρημα Artin (αντ. Brauer)

Κάθε χαρακτήρας είναι γραμμικός συνδυασμός με ρητούς (αντ. ακέραιους) συντελεστές χαρακτήρων επαχόμενων από κυκλικές υποομάδες (αντ. στοιχειώδεις υποομάδες) της G

$$H = C \times P$$

C κυκλική τάξης n , $p \nmid n$

P p -ομάδα

Γινόμενο ομάδων

$$G_1 \rightsquigarrow (V_1, \rho_1)$$

$$G_2 \rightsquigarrow (V_2, \rho_2)$$

$$G_1 \times G_2 \rightsquigarrow (V_1 \otimes V_2, \rho_1 \otimes \rho_2)$$

$$\text{όπου } \rho_1 \otimes \rho_2(g_1, g_2) = \rho_1(g_1) \otimes \rho_2(g_2)$$

$$\text{Έχουμε δει ότι } \chi(g_1, g_2) = \chi_1(g_1) \chi_2(g_2)$$