

Ορισμός: Έστω (V, ρ) αναπαράσταση της G .

Ένας υπόχωρος W του V ονομάζεται υποαναπαράσταση αν $\rho(g)(w) \in W \ \forall w \in W$. Θα γράφουμε $W \leq V$.

Παρατηρήσεις

- W υποαναπαράσταση $\iff W$ kG -υποπρότυπο του V
- Με την ίδια λογική, μπορούμε να κατασκευάσουμε και την αναπαράσταση V/W

Παραδείγματα:

- $\{0\} \leq V$
- $\rho: S_3 \rightarrow GL(V)$ όπου $V = \mathbb{C}^3$
 $\sigma \mapsto$ Πινακός μεταθέσεων

Έστω $W_1 = \langle (1, 1, 1) \rangle = \{(x, x, x) \mid x \in \mathbb{C}\} = V^{S_3}$

Τότε $\rho(\sigma)(w) = w \ \forall w \in W_1$

Οπότε $W_1 \cong$ τετριμμένη αναπαράσταση

Επίσης $W_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{C}^3 \mid x + y + z = 0\}$

είναι άλλη υποαναπαράσταση της V .

Έχουμε $V = W_1 \oplus W_2$

Ορισμός $V^G = \{v \in V \mid \forall g \in G \ g \cdot v = v\}$

Ορισμός: Μια αναπαράσταση λέγεται ανάγωγη αν δεν έχει άλλες υποαναπαράστασεις πέρα από το $\{0\}$ και τον εαυτό της

Παρατήρηση:

V ανάγωγη αναπαράσταση $\Leftrightarrow V$ απλό kG -πρότυπο

Παραδείγματα:

- Η $\mathbb{C}^3$ δεν είναι ανάγωγη αναπαράσταση της S_3
- Αν $\dim_k V = 1$, τότε V ανάγωγη
- Αν $\dim_k V = 2$, τότε V ανάγωγη $\Leftrightarrow \nexists v \in V$ τ.ω. $g \cdot v = \lambda \cdot v \quad \forall g \in G$ για κάποιο $\lambda \in k$

Λήμμα του Schur :

(a) Αν V_1, V_2 είναι ανάγωγες αναπαράστασεις της G , και $f: V_1 \rightarrow V_2$ είναι ομομορφισμός αναπαράστασεων, τότε $f = 0$ ή f ισομορφισμός.

(b) Αν V ανάγωγη, $\text{End}_{kG}(V)$ είναι δακτυλίου διαίρεσης

(c) Αν k αλγεβρικά κλειστό (π.χ. $\mathbb{C}$), τότε για κάθε

$f \in \text{End}_{kG}(V)$, υπάρχει $\lambda \in k$ τ.ω. $f = \lambda \cdot \text{id}_V$

Αποδ. (c) $\neq: V \rightarrow V$ ομομορφισμός αναπαράστασεων

Έστω η ιδιοτιμή του $\neq$. Αφού K αλγ. κλειστό, έχουμε $\eta \in K$.

$g := \neq - \eta \text{id}_V : V \rightarrow V$ ομομορφισμός αναπαράστασεων

Αφού η ιδιοτιμή, $\exists u \in V \setminus \{0\}$ τ.ω. $g(u) = 0$

$\Rightarrow \ker g \neq \{0\} \Rightarrow g = 0$

Πόρισμα: V_1, V_2 ανάχωχες αναπαράστασεις της G , K αλγ. κλειστό

$$\dim_K \text{Hom}_{KG}(V_1, V_2) = \begin{cases} 0 & \text{αν } V_1 \not\cong V_2 \\ 1 & \text{αν } V_1 \cong V_2 \end{cases}$$

Πόρισμα: V ανάχωχη αναπαράσταση, K αλγ. κλειστό

$$g \in Z(G) = \{x \in G \mid xy = yx \ \forall y \in G\}$$

Τότε υπάρχει $\eta \in K$ τ.ω. $\rho(g) = \eta \cdot \text{id}_V$

Αποδ. $\rho(g) \in \text{End}_K(V)$

Επειδή $g \in Z(G)$, έχουμε $gh = hg \ \forall h \in G$

οπότε $\rho(g) \circ \rho(h) = \rho(h) \circ \rho(g) \ \forall h \in G$

δηλ. $\rho(g)(hu) = h \cdot \rho(g)(u) \ \forall h \in G \Rightarrow \rho(g) \in \text{End}_{KG}(V)$

Κανονική αναπαράσταση (Regular Representation)

Έστω V ένας k -διαν. χώρος διάστασης $|G| \rightsquigarrow$ Μπορούμε να πάρουμε

Έστω $\{v_g\}_{g \in G}$ τα στοιχεία της βάσης του $V = kG$

Ορίζουμε $\rho : G \longrightarrow GL(V)$

$$g \longmapsto (v_h \longmapsto v_{gh})$$

Η $\rho(g)$ είναι γραμμική απεικόνιση (αρχεί που την ορίσαμε στα στοιχεία της βάσης). Είναι παλινστρέφητη

$$\mu \rho(g)^{-1} = \rho(g^{-1})$$

Επίσης έχουμε $\rho(1) = \text{id}_V$ και

$$\rho(gg') = \rho(g) \circ \rho(g').$$

Η (V, ρ) ονομάζεται κανονική αναπαράσταση της G

Συμβολίζεται με $(V^{\text{reg}}, \rho^{\text{reg}})$

Παράδειγμα :

$$G = \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \cong \langle \sigma \rangle \text{ με } \sigma^4 = 1$$

$$\bar{0} \mapsto I_4, \bar{1} \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \bar{2} \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \bar{3} \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Παρατήρηση

$$\text{Tr}(\rho^{\text{reg}}(g)) = \begin{cases} |G| \cdot 1_k & \text{αν } g = 1 \\ 0 & \text{αν } g \neq 1 \end{cases}$$

Χαρακτήρες

Έστω (V, ρ) μια αναπαράσταση. Ονομάζουμε χαρακτήρα της αναπαράστασης τη συνάρτηση $\chi_V : G \rightarrow k$

$$g \mapsto \text{Tr}(\rho(g))$$

Ονομάζουμε χαρακτήρα της G οποιαδήποτε συνάρτηση $\chi : G \rightarrow k$ για την οποία υπάρχει αναπαράσταση V τέτοια ώστε $\chi = \chi_V$

Παραδείγματα:

- Αν $V = k$ είναι η τετριμμένη αναπαράσταση τότε $\chi_k(g) = 1 \ \forall g \in G$
Γενικότερα αν $\dim_k V = 1$, τότε $\rho(g) = \chi_V(g) \ \forall g \in G$
- Αν $V = \mathbb{C}^3$ και $\rho : S_3 \rightarrow GL(\mathbb{C}^3)$ είναι η standard representation τότε $\chi_V(1) = 3$, $\chi_V(12) = \chi_V(13) = \chi_V(23) = 1$
 $\chi_V(123) = \chi_V(321) = 0$
- $\chi^{\text{reg}}(g) = \begin{cases} |G| \cdot 1_k & \text{αν } g = 1 \\ 0 & \text{αν } g \neq 1 \end{cases}$

Παρατήρηση: Έχουμε $\chi_V(1) = \dim_k V$

Ορισμός Η διάσταση $\dim_k V = \chi_V(1)$ ονομάζεται διάσταση ή βαθμός της αναπαράστασης

Πρόταση: Αν $V \cong W$, τότε $\chi_V = \chi_W$

Αποδ. Έστω $f: V \rightarrow W$ ισομορφισμός με $f \circ \rho_V(g) = \rho_W(g) \circ f \quad \forall g \in G$

Τότε $\rho_V(g) = f^{-1} \circ \rho_W(g) \circ f$

Οποιοι πίνακες έχουν το ίδιο ίχνος

(αφού $\text{Tr}(A) = \text{Tr}(BB^{-1}A) = \text{Tr}(B^{-1}AB)$)

Αρα $\chi_V = \chi_W$

Παρατήρηση : Βλέπουμε ότι ισομόρφες αναπαράσεις αντιστοιχούν σε αληθινή βάση του διαν. χώρου.

Πρόταση Έστω V, W αναπαράσεις της G

$$(1) \chi_{V \oplus W} = \chi_V + \chi_W$$

$$(2) \chi_{\text{Hom}_k(V, W)}(g) = \chi_W(g) \cdot \chi_V(g^{-1}) = \chi_{V^* \otimes W}$$

$$(3) \chi_{V^*}(g) = \chi_V(g^{-1})$$

$$(4) \chi_{V \otimes W} = \chi_V \cdot \chi_W$$

Αποδ. Άσκηση

Πρόταση: Αν $k = \mathbb{C}$, τότε $\chi_V(g^{-1}) = \overline{\chi_V(g)}$

Αποδ. Αφού G πεπερασμένη, $\exists n \in \mathbb{N}^*$ τ.ω. $g^n = 1$

Οπότε $\rho(g)^n = \text{id}_V \Rightarrow \min_{\rho(g)}(x) \mid x^n - 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ Οι ιδιοτιμές $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ του $\rho(g)$ είναι ρίζες της μονάδας

Αν $z \in \mathbb{C}$ είναι ρίζα της μονάδας τότε $z^{-1} = \bar{z}$

Επίσης λ είναι ιδιοτιμή του αντιστρέψιμου πίνακα A

$\Leftrightarrow \lambda^{-1}$ είναι ιδιοτιμή του A^{-1}

$$\chi(g^{-1}) = \text{Tr}(\rho(g)^{-1}) = \lambda_1^{-1} + \dots + \lambda_m^{-1} = \bar{\lambda}_1 + \dots + \bar{\lambda}_m = \overline{\text{Tr}(\rho(g))} = \overline{\chi(g)}$$

Πρόταση $\chi_v(g) = \chi_v(hgh^{-1}) \quad \forall g, h \in G$

Αποδ. $\text{Tr}(\rho(hgh^{-1})) = \text{Tr}(\rho(h)\rho(g)\rho(h)^{-1}) = \text{Tr}(\rho(h)^{-1}\rho(h)\rho(g)) = \text{Tr}(\rho(g))$

Αρα οι χαρακτήρες παίρνουν σταθερή τιμή πάνω στις κλάσεις συζυγίας της ομάδας (Θυμίζουμε ότι δύο στοιχεία $g, g' \in G$ λέγονται συζυγή αν $\exists h \in G$ τ.ω. $g' = hgh^{-1}$)

Τότε g, g' ανήκουν στην ίδια υπόση συζυγίας)

Πορίσμα: $\chi_v(gh) = \chi_v(hg) \quad \forall g, h \in G \quad \textcircled{*}$

Ορισμός: Θα λέμε ότι ένας χαρακτήρας $\chi: G \rightarrow k$ είναι ανάγωγος αν είναι ο χαρακτήρας μιας ανάγωγης αναπαράστασης.

Ορισμός: Αν $g \in Z(G)$ και V αναπαράσταση της G με χαρακτήρα χ , ορίζουμε $\omega_\chi(g) := \lambda \in k$ τ.ω.

$\rho_V(g) = \lambda \cdot \text{id}_V$, και ονομάζουμε τη συνάρτηση

$\omega_\chi : Z(G) \rightarrow k$ κεντρικό χαρακτήρα της G

$$\text{Έχουμε } \omega_\chi(g) = \frac{\chi(g)}{\chi(1)}$$

Παρατήρηση: Ο παραπάνω ορισμός ισχύει και για k μη αλγεβρικά κλειστό, αρκεί οι ιδιοτιμές της $\rho_V(g)$ να είναι μέσα στο k .