

Θεωρία αναπαράσεως πεπερασμένων ομάδων

G πεπερασμένη ομάδα, k σώμα

Ορισμός: Μια αναπαράσταση της ομάδας G είναι ένα ζεύγος (V, ρ) όπου V είναι ένας k -διαν. χώρος πεπερασμένης διάστασης και $\rho: G \longrightarrow GL(V)$ είναι ένας ομομορφισμός ομάδων
 $GL_n(k)$, $n = \dim_k V$
($u \mapsto \rho(g)(u)$)

Συχνά αναφερόμαστε στον V ως αναπαράσταση, στην ρ ως δομικό ομομορφισμό

Παραδείγματα:

- G οποιαδήποτε, $V = k$, $\rho(g) = 1_k \ \forall g \in G$ "τετριμμένη"
- $G = S_3$ $V = \mathbb{C}^3$ (ή $\mathbb{R}^3$ ή $\mathbb{Q}^3$)

$$\rho(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \rho(12) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \rho(23) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\rho(13) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \rho(12)\rho(23)\rho(12)$$

$$\rho(123) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \rho(12)\rho(23)$$

$$\rho(132) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \rho(13)\rho(23)$$

• $G = S_n$ $V = \mathbb{C}$ $\rho(\sigma) = \varepsilon(\sigma)$ πρόσθετο της μετάθεσης

• $G = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, $V = \mathbb{C}$, $\zeta \in \mathbb{C}$ με $\zeta^n = 1$

$\rho: G \longrightarrow GL(\mathbb{C})$, $\bar{a} \longmapsto \zeta^a$ ($\bar{a} = \bar{b} \Rightarrow \zeta^a = \zeta^b$)

Παρατήρηση:

Αν $G = \langle x_1, \dots, x_n \mid r_1, \dots, r_k \rangle$, τότε $\rho: G \longrightarrow GL(V)$

ορίζει αναπαράσταση ανν τα $\rho(x_1), \dots, \rho(x_n)$ ικανοποιούν τις σχέσεις $r_1, \dots, r_k$

Π.χ. $S_3 = \langle s_1, s_2 \mid s_1^2 = 1 = s_2^2, (s_1 s_2)^3 = 1 \rangle$, όπου $s_i = (i, i+1)$

Οπότε για να δείξουμε ότι οι πίνακες στο παράδειγμα ορίζουν αναπαράσταση αρκεί να δείξουμε ότι:

$$\rho(12)^2 = I_3, \rho(23)^2 = I_3, \rho(123)^3 = I_3$$

Όρισμός Αν (V_1, ρ_1) , (V_2, ρ_2) είναι δύο αναπαραστάσεις της G , τότε μια απεικόνιση $\phi: V_1 \longrightarrow V_2$ είναι

ομομορφισμός αναπαραστάσεων αν:

• ϕ γραμμική, και

• για κάθε $g \in G$, $\phi \circ \rho_1(g) = \rho_2(g) \circ \phi$

Αν η ϕ είναι 1-1 και επί, το λέγεται ισομορφισμός

Θα λέμε ότι οι (V_1, ρ_1) , (V_2, ρ_2) είναι ισόμορφες αναπαραστάσεις

αν υπάρχει ισομορφισμός αναπαραστάσεων $\phi: V_1 \longrightarrow V_2$

Παρατηρήσεις

1) Η σύνθεση ομομορφισμών αναπαράστασεων είναι

ομομορφισμός αναπαράστασεων

2) Δύο αναπαράστασεις $(V_1, \rho_1), (V_2, \rho_2)$ είναι ισομόρφες

αν υπάρχει $\phi: V_1 \rightarrow V_2$ αντιστρέψιμη γραμμική απεικόνιση

$$\text{τ.ω. } \phi \circ \rho_1(g) \circ \phi^{-1} = \rho_2(g) \quad \forall g \in G$$

$$\Rightarrow \rho_1(g), \rho_2(g) \text{ όμοιοι πίνακες } \forall g \in G$$

Θα δούμε αργότερα ότι το αντιστρόφιο ισχύει αν $\chi \nmid G$

3) Αν $G = \langle x_1, \dots, x_n \mid r_1, \dots, r_k \rangle$, τότε

$$(V_1, \rho_1), (V_2, \rho_2) \text{ ισομόρφες} \Leftrightarrow \exists \phi: V_1 \rightarrow V_2 \text{ αντιστρέψιμη γραμμική}$$
$$\text{τ.ω. } \phi \circ \rho_1(x_i) \circ \phi^{-1} = \rho_2(x_i) \quad \forall i$$

ΠΡΟΣΟΧΗ! Δεν αρκεί να είναι τα $\rho_1(x_i), \rho_2(x_i)$ όμοιοι πίνακες $\forall i$

$$\text{π.χ } S_3 = \langle s_1, s_2 \mid s_1^2 = 1 = s_2^2, (s_1 s_2)^3 = 1 \rangle$$

$$\rho_1(s_1) = \rho_1(s_2) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\rho_2(s_1) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \rho_2(s_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\rho_3(s_1) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \rho_3(s_2) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$$

Οι αναπαράστασεις $(\mathbb{R}^2, \rho_1)$ και $(\mathbb{R}^2, \rho_2)$ δεν είναι ισομόρφες

Οι αναπαράστασεις $(\mathbb{R}^2, \rho_2)$ και $(\mathbb{R}^2, \rho_3)$ είναι ισομόρφες

(Άσκηση)

Γενικά, αν έχουμε δύο αναπαράσεις $(V_1, \rho_1), (V_2, \rho_2)$ της G μπορούμε να κατασκευάσουμε τις εξής αναπαράσεις (Άσκηση)

$$* \rho: G \longrightarrow GL(V_1 \oplus V_2)$$

$$g \longmapsto \rho_1(g) \oplus \rho_2(g)$$

$$* \rho: G \longrightarrow GL(\text{Hom}_k(V_1, V_2))$$

$$g \longmapsto (\phi \longmapsto \rho_2(g) \circ \phi \circ \rho_1(g^{-1}))$$

$$* \rho: G \longrightarrow GL(V_1 \otimes V_2)$$

$$g \longmapsto \rho_1(g) \otimes \rho_2(g)$$

Πρόταση: Αν V αναπαράσταση, τότε V^* αναπαράσταση "δualική"

Ορισμός: Η άλγεβρα της ομάδας kG ή $k[G]$ είναι μια άλγεβρα με :

- στοιχεία $\sum_{g \in G} \lambda_g g$, όπου $\lambda_g \in k$
 "τυπικοί γραμμικοί συνδυασμοί στοιχείων της G "

$$\text{Έχουμε } \sum_{g \in G} \lambda_g g = \sum_{g \in G} \mu_g g \Leftrightarrow \lambda_g = \mu_g \quad \forall g \in G$$

$$\text{Έχουμε } kG \longleftrightarrow k^{|G|}, \quad \sum_{g \in G} \lambda_g g \longmapsto (\lambda_g)_{g \in G}$$

- πρόσθεση :

$$\left(\sum_{g \in G} \lambda_g g \right) + \left(\sum_{g \in G} \mu_g g \right) = \sum_{g \in G} (\lambda_g + \mu_g) g \quad \boxed{0 \in kG}$$

- βαθμωτό πολλαπλασιασμό :

$$\lambda \cdot \left(\sum_{g \in G} \lambda_g g \right) = \sum_{g \in G} (\lambda \lambda_g) g$$

- πολλαπλασιασμός :

$$\left(\sum_{g \in G} \lambda_g g \right) \cdot \sum_{g \in G} (\mu_g g) = \sum_{g \in G} \nu_g g$$

όπου

$$\nu_g = \sum_{h \in G} \lambda_h \mu_{h^{-1}g}$$

Παράδειγμα:

$$G = S_3 = \{ 1, s_1, s_2, s_1 s_2, s_2 s_1, \underbrace{s_1 s_2 s_1}_{s_2 s_1 s_2} \}$$

$$(s_1 + s_1 s_2) \cdot (3 s_2 s_1 - s_2) =$$

$$3 s_1 s_2 s_1 - s_1 s_2 + 3 s_1 s_2 s_2 s_1 - s_1 s_2 s_2 \quad \begin{matrix} s_1^2 = 1 \\ = \\ s_2^2 = 1 \end{matrix}$$

$$3 s_1 s_2 s_1 - s_1 s_2 + 3 \cdot 1_G - s_1$$

Πρόταση: Τα στοιχεία της G αποτελούν βάση της kG ως k -διανυσματικό χώρο.

Αποδ. Τα στοιχεία της kG είναι εξ ορισμού γραμμικοί συνδυασμοί των στοιχείων της G . Επίσης εξ ορισμού $\sum_{g \in G} \lambda_g g = 0$ αν $\lambda_g = 0 \ \forall g \in G$. Άρα τα στοιχεία της G είναι και γραμμικά ανεξάρτητα.

Θεώρημα: Κάθε k -άλγεβρα πεπερασμένης διάστασης είναι (δακτύλιος) του Artin και της Noether.

Αποδ. Κάθε ιδεώδες είναι k -διανυσματικός χώρος διάστασης $\leq n$, όπου n είναι η διάσταση της άλγεβρας. Άρα ικανοποιείται και η ΣΦΑ και η ΣΑΑ.

Πόρισμα: Έστω A k -άλγεβρα πεπερασμένης διάστασης. Τότε A ημιπλήνη $\Leftrightarrow A$ J-ημιπλήνη.

Θεώρημα Maschke:

kG ημιπλήνη $\Leftrightarrow \text{char } k \nmid |G|$

Αποδ. Αρχότερα

Πρόταση: Έστω V k -διαν. χώρος με $\dim_k V < \infty$. Τότε

V αναπαράσταση $\Leftrightarrow V$ kG -πρότυπο

Απόδ. Έστω $v \in V$. Αν V αναπαράσταση, τότε ορίζουμε

τον βαθμωτό πολ/σμο: $kG \times V \longrightarrow V$

$$(\sum \lambda_g g, v) \longmapsto \sum \lambda_g \rho(g)(v)$$

- $(\sum \lambda_g g)(v_1 + v_2) = \sum \lambda_g \rho(g)(v_1 + v_2) = \sum \lambda_g \rho(g)(v_1) + \sum \lambda_g \rho(g)(v_2)$
- $((\sum \lambda_g g) + (\sum \mu_g g))(v) = \sum (\lambda_g + \mu_g) \rho(g)(v) = \sum \lambda_g \rho(g)(v) + \sum \mu_g \rho(g)(v) = (\sum \lambda_g g) \cdot v + (\sum \mu_g g) \cdot v$
- $1 \cdot v = \rho(1)(v) = v$
- Είδαμε ότι $(\sum \lambda_g g)(\sum \mu_h h) = \sum_{g \in G} (\sum_{h \in G} \lambda_h \mu_{h^{-1}g})$
Οπότε $((\sum \lambda_g g)(\sum \mu_h h))(v) = \sum_{g \in G} (\sum_{h \in G} \lambda_h \mu_{h^{-1}g}) \rho(g)(v) =$
 $= \sum_{g \in G} \sum_{h \in G} \lambda_h \mu_{h^{-1}g} \rho(h) \rho(h^{-1}g)(v) = \sum_{h \in G} \lambda_h \rho(h) \sum_{g \in G} \mu_{h^{-1}g} \rho(h^{-1}g)(v) =$
 $= \sum_{h \in G} \lambda_h \rho(h) (\sum_{g \in G} \mu_g \rho(g)(v)) = (\sum_{g \in G} \lambda_g g) \cdot (\sum_{g \in G} \mu_g g \cdot v)$

$$(g \cdot h)(v) = \rho(gh)(v) = \rho(g)\rho(h)(v) = g \cdot (h \cdot v)$$

Από την άλλη πλευρά, αν V είναι kG -πρότυπο, τότε

ορίζουμε $\rho: G \longrightarrow GL(V)$, $g \longmapsto (v \longmapsto g \cdot v)$

$$\rho(gh)(v) = (gh) \cdot v = g(h \cdot v) = \rho(g)(\rho(h)(v)) \Rightarrow \rho(gh) = \rho(g)\rho(h)$$

Η $\rho(g)$ είναι αντιστρέψιμη, αφού ρ ομομορφισμός και $\rho(g)^{-1} = \rho(g^{-1})$

Επίσης $\rho(g) \in GL(V)$, αφού $\forall v_1, v_2, v \in V$ και $\forall \lambda \in k$

$$\rho(g)(v_1 + v_2) = g \cdot (v_1 + v_2) = g \cdot v_1 + g \cdot v_2 = \rho(g)(v_1) + \rho(g)(v_2)$$

$$\rho(g)(\lambda \cdot v) = g \cdot (\lambda \cdot v) = (g \cdot \lambda 1_G) \cdot v = (\lambda g) \cdot v = \lambda \cdot (g \cdot v) = \lambda \cdot \rho(g)(v)$$

Πρόταση: $\phi: V_1 \rightarrow V_2$ ομομορφισμός αναπαράστασεων $(V_1, \rho_1), (V_2, \rho_2)$

$$\iff \phi: V_1 \rightarrow V_2 \text{ ομομορφισμός } kG\text{-προτύπων}$$

Απόδ. " $\Rightarrow$ "

$$\phi \text{ γραμμική} \Rightarrow \phi(v + v') = \phi(v) + \phi(v') \quad \forall v, v' \in V_1$$

$$\phi \circ \rho_1(g)(v) = \rho_2(g) \circ \phi(v) \Rightarrow \underset{V_1}{\phi(g \cdot v)} = \underset{V_2}{g \cdot \phi(v)}$$

" $\Leftarrow$ "

$$\phi \text{ ομομορφισμός } kG\text{-προτύπων} \Rightarrow$$

$$\phi(v + v') = \phi(v) + \phi(v') \quad \forall v, v' \in V_1$$

$$\phi(\lambda \cdot v) = \lambda \cdot \phi(v) \quad \forall \lambda \in k, v \in V_1$$

$$\text{Επίσης } \phi(g \cdot v) = g \cdot \phi(v) \Rightarrow \phi(\rho_1(g)(v)) = \rho_2(g)(\phi(v))$$

Από εδώ και στο εξής, αν δεν υπάρχει αμφιβολία ως προς τον ορισμό της ρ , θα γράφουμε $g \cdot v$ αντί για $\rho(g)(v)$

$$\forall g \in G, \forall v \in V$$

Επίσης αν V_1, V_2 αναπαράστασεις της G , θα συμβολίζουμε με $\text{Hom}_{kG}(V_1, V_2)$ το σύνολο των μορφισμών αναπαράστασεων από την V_1 στην V_2 .