

Φυλλαδίο 5

A1] Αν I αριστερό R -υποπρότυπο του R^n , τότε $M_{n \times 1}(I)$ αριστερό ιδεώδες του $M_n(R)$

π.χ.
$$\begin{pmatrix} r_1 & r_2 \\ r_3 & r_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1 a_{11} + r_2 a_{21} & r_1 a_{12} + r_2 a_{22} \\ r_3 a_{11} + r_4 a_{21} & r_3 a_{12} + r_4 a_{22} \end{pmatrix}$$

Επίσης $I_1 = I_2 \Leftrightarrow M_{n \times 1}(I_1) = M_{n \times 1}(I_2)$

Έστω J αριστερό ιδεώδες του $M_n(R)$ και

$$I = \{ (a_{11} \ a_{12} \ \dots \ a_{1n}) \mid (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in J \}$$

Έστω $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in J$

Υπενθυμίζουμε ότι $E_{kl}A = \sum_{j=1}^n a_{lj} E_{kj}$

π.χ.
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Οπότε για κάθε $r \in R$

$$r \cdot E_{11} \cdot A = \sum_{j=1}^n r a_{1j} E_{1j} \in J \Rightarrow (r a_{11} \ r a_{12} \ \dots \ r a_{1n}) \in I$$

Αρα I αριστερό R -υποπρότυπο του R^n

Θ.δ.ό. $J = M_{n \times 1}(I)$. Έστω $A \in J$. Τότε $E_{1l}A = \sum_{j=1}^n a_{lj} E_{1j} \in J$

Αρα $(a_{11} \ a_{12} \ \dots \ a_{1n}) \in I$ και $A \in M_{n \times 1}(I) \Rightarrow J \subseteq M_{n \times 1}(I)$

Αντίστροφα, αν $B = (b_{ij}) \in M_{n \times 1}(I)$ τότε υπάρχει $A^i \in J$ του

οποίου η πρώτη γραμμή είναι ίση με την i -γραμμή του B

Έχουμε $E_{i1}A^i = \sum_{j=1}^n a_{1j}^i E_{ij} = \sum_{j=1}^n b_{ij} E_{ij} \in J$. Αρα $B = \sum_{i,j} b_{ij} E_{ij} \in J$

$$\Rightarrow M_{n \times 1}(I) \subseteq J.$$

Παράδειγμα:

$$n = 2, R = \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} \{(0, x) \mid x \in \mathbb{R}\} &\leq_{\mathbb{R}\text{-mod}} \mathbb{R}^2 \Rightarrow \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & b \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\} \text{ αριστέρο ιδεώδες} \\ \{(x, 2x) \mid x \in \mathbb{R}\} &\leq_{\mathbb{R}\text{-mod}} \mathbb{R}^2 \Rightarrow \left\{ \begin{pmatrix} a & 2a \\ b & 2b \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\} \text{ αριστέρο ιδεώδες} \end{aligned}$$

Α2 | i) $Z(D) = \{x \in D \mid xy = yx \ \forall y \in D\}$.

Έχουμε $1 \in D$

Έστω $x_1, x_2 \in Z(D)$. Τότε, για κάθε $y \in D$,

$$(x_1 - x_2) \cdot y = x_1 \cdot y - x_2 \cdot y = y \cdot x_1 - y \cdot x_2 = y(x_1 - x_2)$$

$$(x_1 x_2) y = x_1 (x_2 y) = x_1 (y x_2) = (x_1 y) x_2 = (y x_1) x_2 = y(x_1 x_2)$$

Άρα $Z(D)$ υποδακτύλιος του D

Επίσης $Z(D)$ μεταθετικός.

Αν $x \in Z(D)$ τότε $\exists x^{-1} \in D$. Έχουμε

$$x \cdot y = y \cdot x \ \forall y \in D \Rightarrow y x^{-1} = x^{-1} y \ \forall y \in D \Rightarrow x^{-1} \in Z(D)$$

Άρα $Z(D)$ σώμα

Έστω $K := Z(D)$

Τότε D είναι K -άλγεβρα αφού $\forall \lambda \in K$ και $x, y \in D$:

$$\lambda \cdot (xy) = (\lambda \cdot x) \cdot y = (x \lambda) \cdot y = x \cdot (\lambda y)$$

Άρα κάθε δακτύλιος διαίρεσης είναι K -άλγεβρα για

κάποιο σώμα K

ii) Αν $\dim_K D < \infty$ και $d \in D$, τότε $[K(d):K] < \infty$

Αρα η $K(d)$ είναι αλγεβρική επέκταση του K

$$\xRightarrow{K \text{ αλγ. κλειστό}} K(d) = K \Rightarrow d \in K$$

Επομένως $K = D$.

iii) " $\Leftarrow$ " Ισχύει από Θ. W.-A.

$$"\Rightarrow" \text{ Θ. W. A. } \Rightarrow A \cong M_{n_1}(D_1) \times \dots \times M_{n_t}(D_t)$$

όπου D_i δακτύλιοι διαίρεσης

$$\dim_K A = n_1^2 \dim_K D_1 + \dots + n_t^2 \dim_K D_t$$

$$\dim_K A < \infty \Leftrightarrow \dim_K D_i < \infty \quad \forall i=1, \dots, t$$

$$K \text{ αλγ. κλειστό} \xRightarrow{\text{ii)}} D_i = K$$

$$\text{Επομένως } A \cong M_{n_1}(K) \times \dots \times M_{n_t}(K)$$

$$\text{και } \dim_K A = n_1^2 + \dots + n_t^2$$

A3) $\dim_{\mathbb{C}} A = 8$, A ημιπλάτηνη $\Rightarrow$

$$A \cong \mathbb{C}^8 \quad \text{ή} \quad A \cong \mathbb{C}^4 \times M_2(\mathbb{C}) \quad \text{ή} \quad A \cong M_2(\mathbb{C}) \times M_2(\mathbb{C})$$

$$\uparrow \mathbb{C}[G]$$

G αβελιανή
 $|G| = 8$

$$\uparrow \mathbb{C}[G]$$

$G = D_8$ ή Q_8

$$\uparrow \neq \mathbb{C}[G]$$

Ρίζικό Jacobson

$$J(R) = \bigcap \{ I \subseteq R \mid I \text{ μεγιστινός αριστερό ιδεώδες του } R \}$$

Λήμμα J: Έστω $y \in R$. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(i) $y \in J(R)$

(ii) $1 - xy$ είναι αριστερά αντιστρέψιμο $\forall x \in R$

(iii) $y \in \text{Ann}_R(M) \forall M$ απλό αριστερό R -πρότυπο

Αποδ (i) $\Rightarrow$ (ii)

Αν $1 - xy$ δεν είναι αριστερά αντιστρέψιμο, τότε $(1 - xy) \not\subseteq R$

Όποτε υπάρχει μεγιστινός αριστερό ιδεώδες I $1 - xy \in I$

Όπως $y \in I \Rightarrow xy \in I \Rightarrow 1 \in I$: ΑΤΟΠΙΟ

(ii) $\Rightarrow$ (iii)

Αν $\exists M$ απλό R -πρότυπο I $y \notin \text{Ann}_R(M)$, $\exists m \in M \setminus \{0\}$ I $y \cdot m \neq 0$.

$(y \cdot m) = M$. Συγκεκριμένα $\exists x \in R$ I $xy \cdot m = m \Rightarrow m = 0$

(iii) $\Rightarrow$ (i)

Έστω I μεγιστινός αριστερό ιδεώδες. Τότε R/I απλό R -πρότυπο

Αφού $y \cdot (R/I) = 0 \Rightarrow y \in I$

Πόρισμα: $J(R) = \bigcap_{\substack{M \text{ απλό} \\ R\text{-πρότυπο}}} \text{Ann}_R(M)$ ιδεώδες του R (χνίσιο)

Λήμμα: Έστω $y \in R$. Τότε $y \in J(R) \Leftrightarrow 1 - xyz \in R^\times \quad \forall x, z \in R$

Αποδ " $\Leftarrow$ " $z=1$, (ii) Προηγούμενου λήμματος

" $\Rightarrow$ " Αφού $J(R)$ ιδεώδες, $yz \in J(R)$ και Λήμμα J (ii) $\Rightarrow$
 $\exists u \in R$ τ.ω. $u(1 - xyz) = 1$.

Αφού $xyz \in J(R)$, έχουμε $\underbrace{1 + uxyz}_{\text{δεξιά αντιστρεψίμο}}$ αριστερά αντιστρεψίμο
Αφού u δεξιά αντιστρεψίμο,

$u \in R^\times \Rightarrow 1 - xyz \in R^\times \quad (1 - xyz = u^{-1})$

Πόρισμα 1: Το $J(R)$ είναι το μεγαλύτερο αριστερό ιδεώδες
(και ιδεώδες) J του R τ.ω. $1 + J \subseteq R^\times$

Πόρισμα 2: $J(R) = \bigcap \{ I \mid I \text{ μέγιστος δεξιό ιδεώδες του } R \}$

Παρατήρηση:

Έστω $y \in R$. Τα αθροίσματα είναι ισοδύναμα:

(i) $y \in \bigcap \{ I \mid I \text{ μέγιστος δεξιό ιδεώδες του } R \}$

(ii) $1 - yx$ είναι δεξιά αντιστρεψίμο $\forall x \in R$

(iii) $y \in \text{Ann}_R(M) \quad \forall M$ απλό δεξιό R -πρότυπο

Ορισμός: Ο δακτύλιος R λέγεται J -νηλιαπός αν $J(R) = 0$
(Jacobson νηλιαπός)

Πρόταση:

(i) Αν I ιδεώδες του R με $I \subseteq J(R)$, τότε $J(R/I) = J(R)/I$

(ii) $R/J(R)$ είναι J -ημιαπλός

Αποδ (i) Υπάρχει αντιστοιχία

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Μεγιστιμιά αριστερά ιδεώδη} \\ \text{του } R \text{ που περιέχουν το } I \end{array} \right\} \longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Μεγιστιμιά αριστερά ιδεώδη} \\ \text{του } R/I \end{array} \right\}$$
$$m \longleftrightarrow m/I$$

Αφού $I \subseteq J(R)$, τότε I περιέχεται σε όλα τα μεγιστιμιά ιδεώδη

$$\text{Οπότε, } J(R/I) = \bigcap (m/I) = (\bigcap m)/I = J(R)/I$$

$$(ii) J(R/J(R)) = J(R)/J(R) = 0$$

(αριστερό ή δεξιο ή αμφίπλευρο)

Ορισμός: Ένα ιδεώδες I του R λέγεται:

- μηδενοδύναμο (nilpotent) αν $I^n = 0$ για κάποιο $n \in \mathbb{N}$
- nil αν όλα τα στοιχεία του I είναι μηδενοδύναμα

Παρατήρηση $I^n = (x_1 x_2 \dots x_n \mid x_i \in I)$

I nilpotent $\Rightarrow I$ nil, Το αντίστροφο δεν ισχύει.

$$\text{Π.χ. } R = \mathbb{Z}[x_1, x_2, x_3, \dots] / (x_1^2, x_2^3, x_3^4, \dots)$$

Το ιδεώδες που παράγεται από τα $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \dots$ είναι nil,
αλλά όχι nilpotent

Το ιδεώδες που παράγεται από το $\bar{x}$ στο $\mathbb{Z}[x]/(x^n)$ είναι nilpotent.