

Φυλλάδιο 4

Άσκηση 1 : $R = \text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ $M = \text{Mat}_{2 \times 1}(\mathbb{R})$

Δείξτε ότι το M είναι απλό R -πρότυπο

Λύση: Έχουμε δει ήδη ότι $M = (m)$ όπου $m = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Α' τρόπος Έχουμε $M \cong R / \text{Ann}_R(m)$ και $\text{Ann}_R(m) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & x \\ 0 & y \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbb{R} \right\}$

Θα δείξουμε ότι $\text{Ann}_R(m)$ μεγιστινό αριθμερό ιδεώδες

Έστω $\text{Ann}_R(m) \subseteq J \subseteq R$ όπου J αριθμερό ιδεώδες του R

Αν $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in J$ με $a \neq 0$, τότε $\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & c \\ 0 & d \end{pmatrix} \in J$

Επίσης $\begin{pmatrix} a^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in J$

οπότε $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in J \Rightarrow J = R$

Ομοίως αν $\begin{pmatrix} 0 & c \\ b & d \end{pmatrix} \in J$ με $b \neq 0$, τότε $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix} \in J$

Τότε $\begin{pmatrix} 0 & b^{-1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in J \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in J \Rightarrow J = R$

Β' τρόπος Θα δείξουμε ότι $M = \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) \forall \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in M \setminus \{0\}$

Αρκεί να δείξουμε ότι $\forall x', y' \in \mathbb{R} \exists a, b, c, d \in \mathbb{R}$ τ.ω.

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

Αυτό ισοδυναμεί με το να υπάρχει γραμμική απεικόνιση $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

τ.ω. $f(x, y) = (x', y')$. Όμως μια γραμμική απεικόνιση καθορίζεται

από τις εικόνες των στοιχείων της βάσης και οποιοδήποτε μονοσύνηλο

$\{(x, y)\} \subseteq \mathbb{R}^2$ με $(x, y) \neq (0, 0)$ μπορεί να επεκταθεί σε βάση του $\mathbb{R}^2$.

$M_n(R)$

"

Άσκηση 2: Δείξτε ότι τα ιδεώδη (αμφιπλευρά) του $\overset{M_n(R)}{\text{Mat}}_{n \times n}(R)$ είναι της μορφής $\overset{M_n(J)}{\text{Mat}}_{n \times n}(J)$ όπου J μοναδικά ορισμένο ιδεώδες του R .

Λύση: Αν J ιδεώδες του R , τότε $M_n(J)$ ιδεώδες του $M_n(R)$

Επίσης $J_1 = J_2 \Leftrightarrow M_n(J_1) = M_n(J_2)$

Έστω I ιδεώδες του $M_n(R)$ και $J = \{a_{ii} \in R \mid (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in I\}$

Έστω $(E_{kl})_{1 \leq k, l \leq n}$ η κανονική βάση του $M_n(R)$ ως R -πρότυπο.

Τότε $r E_{ii} (a_{ij}) E_{ii} = r a_{ii} E_{ii} \in I \quad \forall (a_{ij}) \in I$, οπότε $r a_{ii} \in J \quad \forall r \in R$

Ομοίως $E_{ii} (a_{ij}) r E_{ii} = a_{ii} r E_{ii} \in I \quad \forall (a_{ij}) \in I$, οπότε $a_{ii} r \in J \quad \forall r \in R$

Αρα J ιδεώδες του R . Θα δείξουμε ότι $I = M_n(J)$.

Έστω $A = (a_{ij}) \in I$. Τότε $E_{ki} A E_{jl} = a_{ij} E_{kl} \in I \quad \forall i, j, k, l$

Για $k=l=1$ παίρνουμε $a_{ij} E_{ii} \in I$ και άρα $a_{ij} \in J \quad \forall i, j$

Αρα $I \subseteq M_n(J)$. Αντιστροφά έστω $B = (b_{ij}) \in M_n(J)$.

Αφού $b_{ij} \in J$ υπάρχει πίνακας $A = (a_{ij}) \in I$ τ.ω. $a_{ii} = b_{ij}$

Έχουμε $E_{ii} A E_{ij} = a_{ii} E_{ij} = b_{ij} E_{ij} \in I$. Αρα $B = \sum_{1 \leq i, j \leq n} b_{ij} E_{ij} \in I$

Επομένως $M_n(J) \subseteq I$.

Πορίσμα: Αν R απλός, τότε ο δακτύλιος $\text{Mat}_{n \times n}(R)$ έχει μόνο δύο ιδεώδη και άρα είναι απλός δακτύλιος.

Προσοχή! Δε σημαίνει ότι έχει μόνο 2 αριστερά ιδεώδη

(βλ. προηγούμενη άσκηση), οπότε δεν είναι δακτύλιος διαιρέσης

(αναφερόμενο, αφού δεν είναι όλοι οι πίνακες αντιστρέψιμοι!).

Άσκηση 3: $\text{End}_R(M_1 \oplus M_2) \cong \underbrace{\begin{pmatrix} \text{End}_R(M_1) & \text{Hom}_R(M_2, M_1) \\ \text{Hom}_R(M_1, M_2) & \text{End}_R(M_2) \end{pmatrix}}_A$

Λύση: Έστω $f_{11} \in \text{End}_R(M_1)$, $f_{12} \in \text{Hom}_R(M_2, M_1)$
 $f_{21} \in \text{Hom}_R(M_1, M_2)$, $f_{22} \in \text{End}_R(M_2)$

$$\begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f'_{11} & f'_{12} \\ f'_{21} & f'_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{11}f'_{11} + f_{12}f'_{21} & f_{11}f'_{12} + f_{12}f'_{22} \\ f_{21}f'_{11} + f_{22}f'_{21} & f_{21}f'_{12} + f_{22}f'_{22} \end{pmatrix}$$

Θέτουμε $f : M_1 \oplus M_2 \rightarrow M_1 \oplus M_2$

$$(m_1, m_2) \mapsto (f_{11}(m_1) + f_{12}(m_2), f_{21}(m_1) + f_{22}(m_2))$$

$$\text{Τότε } f((m_1, m_2) + (m'_1, m'_2)) = f(m_1 + m'_1, m_2 + m'_2)$$

$$= (f_{11}(m_1 + m'_1) + f_{12}(m_2 + m'_2), f_{21}(m_1 + m'_1) + f_{22}(m_2 + m'_2))$$

$$= (f_{11}(m_1) + f_{11}(m'_1) + f_{12}(m_2) + f_{12}(m'_2), f_{21}(m_1) + f_{21}(m'_1) + f_{22}(m_2) + f_{22}(m'_2))$$

$$= (f_{11}(m_1) + f_{12}(m_2), f_{21}(m_1) + f_{22}(m_2)) + (f_{11}(m'_1) + f_{12}(m'_2), f_{21}(m'_1) + f_{22}(m'_2))$$

$$= f(m_1, m_2) + f(m'_1, m'_2)$$

$$f(r \cdot (m_1, m_2)) = f(rm_1, rm_2) = (f_{11}(rm_1) + f_{12}(rm_2), f_{21}(rm_1) + f_{22}(rm_2)) =$$

$$= (r \cdot (f_{11}(m_1) + f_{12}(m_2)), r \cdot (f_{21}(m_1) + f_{22}(m_2))) = r \cdot f(m_1, m_2)$$

$$\text{Άρα } f \in \text{End}_R(M_1 \oplus M_2)$$

Θ.δ.ο. $\varphi : A \rightarrow \text{End}_R(M_1 \oplus M_2)$ είναι ισομορφισμός δακτυλίων

$$\begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{pmatrix} \mapsto f$$

$$\bullet \varphi \begin{pmatrix} \text{id}_{M_1} & 0 \\ 0 & \text{id}_{M_2} \end{pmatrix} = (f : (m_1, m_2) \mapsto (m_1, m_2)) = \text{id}_{M_1 \oplus M_2}$$

$$\bullet \varphi \left(\begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} \right) = \varphi \begin{pmatrix} f_{11} + g_{11} & f_{12} + g_{12} \\ f_{21} + g_{21} & f_{22} + g_{22} \end{pmatrix} =$$

$$(m_1, m_2) \mapsto (f_{11}(m_1) + g_{11}(m_1) + f_{12}(m_2) + g_{12}(m_2), f_{21}(m_1) + g_{21}(m_1) + f_{22}(m_2) + g_{22}(m_2))$$

$$(f_{11}(m_1) + f_{12}(m_2), f_{21}(m_1) + f_{22}(m_2)) + (g_{11}(m_1) + g_{12}(m_2), g_{21}(m_1) + g_{22}(m_2))$$

$$= f + g = \varphi \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{pmatrix} + \varphi \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}$$

$$\bullet \varphi \left(\begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} \right) = \varphi \begin{pmatrix} f_{11}g_{11} + f_{12}g_{21} & f_{11}g_{12} + f_{12}g_{22} \\ f_{21}g_{11} + f_{22}g_{21} & f_{21}g_{12} + f_{22}g_{22} \end{pmatrix} =$$

$$(m_1, m_2) \mapsto (f_{11}g_{11}(m_1) + f_{12}g_{21}(m_1) + f_{11}g_{12}(m_2) + f_{12}g_{22}(m_2),$$

$$f_{21}g_{11}(m_1) + f_{22}g_{21}(m_1) + f_{21}g_{12}(m_2) + f_{22}g_{22}(m_2))$$

$$= (f_{11}(g_{11}(m_1) + g_{12}(m_2)) + f_{12}(g_{21}(m_1) + g_{22}(m_2)),$$

$$f_{21}(g_{11}(m_1) + g_{12}(m_2)) + f_{22}(g_{21}(m_1) + g_{22}(m_2)))$$

$$= f(g_{11}(m_1) + g_{12}(m_2), g_{21}(m_1) + g_{22}(m_2))$$

$$= f(g(m_1, m_2))$$

$$= f \cdot g = \varphi \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{pmatrix} \varphi \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}$$

$$M_i \xrightarrow{\alpha_i} M_1 \oplus M_2 \xrightarrow{p_i} M_i$$

$$\alpha_1(m_1) = (m_1, 0) \quad p_1(m_1, m_2) = m_1$$

$$\alpha_2(m_2) = (0, m_2) \quad p_2(m_1, m_2) = m_2$$

$$\forall \phi \in \text{End}_R(M_1 \oplus M_2) \quad \exists \phi(m_1, m_2) = (m'_1, m'_2)$$

$$\phi = \varphi \begin{pmatrix} p_1 \circ \phi \circ \alpha_1 & p_1 \circ \phi \circ \alpha_2 \\ p_2 \circ \phi \circ \alpha_1 & p_2 \circ \phi \circ \alpha_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} (m_1, m_2) &\mapsto (p_1 \circ \phi \circ \alpha_1(m_1) + p_1 \circ \phi \circ \alpha_2(m_2), p_2 \circ \phi \circ \alpha_1(m_1) + p_2 \circ \phi \circ \alpha_2(m_2)) \\ &= (p_1 \circ \phi(m_1, 0) + p_1 \circ \phi(0, m_2), p_2 \circ \phi(m_1, 0) + p_2 \circ \phi(0, m_2)) \\ &= (p_1(\phi(m_1, 0) + \phi(0, m_2)), p_2(\phi(m_1, 0) + \phi(0, m_2))) \\ &= (p_1(\phi(m_1, m_2)), p_2(\phi(m_1, m_2))) = \phi(m_1, m_2) \end{aligned}$$

Οπότε η φ είναι επι

$$\text{Ker } \varphi = \left\{ \begin{pmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} \\ \phi_{21} & \phi_{22} \end{pmatrix} \mid \forall (m_1, m_2) \in M_1 \oplus M_2 \right. \\ \left. \phi_{11}(m_1) + \phi_{12}(m_2) = \phi_{21}(m_1) + \phi_{22}(m_2) = 0 \right\}$$

$$\text{Για } m_1 = 0 \quad \phi_{12}(m_2) = 0 \quad \forall m_2 \Rightarrow \phi_{12} = 0$$

$$\phi_{22}(m_2) = 0 \quad \forall m_2 \Rightarrow \phi_{22} = 0$$

$$\phi_{11}(m_1) = 0 \quad \forall m_1 \Rightarrow \phi_{11} = 0$$

$$\phi_{21}(m_1) = 0 \quad \forall m_1 \Rightarrow \phi_{21} = 0$$

$$\text{Αρα } \text{Ker } \varphi = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\} \Rightarrow \varphi \text{ 1-1}$$

Πόρισμα 1:

$$\text{End}_R(M_1 \oplus M_2 \oplus \dots \oplus M_t) \cong \begin{pmatrix} \text{End}_R(M_1) & \text{Hom}_R(M_2, M_1) & \dots & \text{Hom}_R(M_t, M_1) \\ \text{Hom}_R(M_1, M_2) & \text{End}_R(M_2) & \dots & \text{Hom}_R(M_t, M_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \text{Hom}_R(M_1, M_t) & \text{Hom}_R(M_2, M_t) & \dots & \text{End}_R(M_t) \end{pmatrix}$$

Πόρισμα 2 Έστω $n \in \mathbb{N}^*$. Τότε $\text{End}_R(nM) \cong M_n(\text{End}_R(M))$

Πόρισμα 3

Αν $M_1, \dots, M_t$ είναι R -πρότυπα τ.ώ. $\text{Hom}_R(M_i, M_j) = 0$ για $i \neq j$, τότε $\text{End}_R(M_1 \oplus M_2 \oplus \dots \oplus M_t) \cong \text{End}_R(M_1) \times \text{End}_R(M_2) \times \dots \times \text{End}_R(M_t)$

Ορισμός: Αν R είναι ένας δαυζύγιος, τότε ορίζουμε ως R^{op} τον δαυζύγιο που έχει ως στοιχεία τα στοιχεία του R και $x \underset{R}{+} y = x \underset{R^{\text{op}}}{+} y$ ενώ $x \underset{R^{\text{op}}}{\cdot} y = y \underset{R}{\cdot} x$

Παρατηρήσεις:

- $(R^{\text{op}})^{\text{op}} = R$
- Γενικά $R \neq R^{\text{op}}$
- Αν D δαυζύγιος διαίρεσης, D^{op} δαυζύγιος διαίρεσης

Πρόταση: Έστω D ένας δαυζύγιος διαιρέσης. Ο δαυζύγιος $R := M_n(D)$ έχει τις εξής ιδιότητες:

(1) Είναι απλός

(2) Υπάρχει ένα μοναδικό απλό R -πρότυπο τ.ω. $R \cong nV = \bigoplus_{i=1}^n V$

(3) R είναι αριστερά ημιαπλός

(4) R είναι αριστερός της Noether και του Artin

(5) $\text{End}_R V \cong D$

Αποδ. (1) Έστω I ιδεώδες του R , $I \neq 0$. Έστω $A = (a_{ij}) \in I$, $A \neq 0$

Έστω $(E_{kl})_{1 \leq k, l \leq n}$ η κανονική βάση του R ως D -πρότυπο

Αν $a_{ij} \neq 0$ για κάποια $i, j \in \{1, \dots, n\}$ τότε $(a_{ij}^{-1} E_{ki}) A E_{jl} = E_{kl}$

Άρα $E_{kl} \in I$ για κάθε k, l .

Οπότε ο μοναδιαίος πίνακας $E_{11} + E_{22} + \dots + E_{nn} \in I$

και άρα $I = R$. Αυτό αποδεικνύει το (1)

(2) Ως D -πρότυπο έχουμε $R \cong D^{n^2}$. Όμως το D δεν είναι R -πρότυπο

Όμως το $V = D^n$ είναι, και μάλιστα απλό αφού $V = R \cdot v$, $\forall v \in V$

(γνωστό από Γραμμική Άλγεβρα - πομπή απλή διάσπαση)

Έχουμε $R \cong V^{\oplus n}$. Ο ισομορφισμός δίνεται από:

$$\phi: R \rightarrow V^{\oplus n}, \quad \begin{pmatrix} \Sigma_1 & \Sigma_2 & \dots & \Sigma_n \\ a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \mapsto (\Sigma_1, \Sigma_2, \dots, \Sigma_n)$$

Έχουμε $\phi(B \cdot A) = (B\Sigma_1, B\Sigma_2, \dots, B\Sigma_n) = B \cdot \phi(A) \quad \forall A, B \in R$

Εχουμε δει ότι $(2) \Rightarrow (3) \Rightarrow (4)$

(5) Θεωρούμε τον ομομορφισμό δακτυλίων

$$\varphi: D \longrightarrow \text{End}_R(V)$$

$$\lambda \longmapsto \left(\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} v_1 \lambda \\ \vdots \\ v_n \lambda \end{pmatrix} \right) \quad !!$$

D έχει μόνο 2 ιδεώδη, και άρα $\ker \varphi = \{0\}$ ή $\ker \varphi = D$

Αφού $\varphi(1) = \text{id}_V$, έχουμε $\varphi \neq 1-1$

Έστω $\varphi \in \text{End}_R(V)$

$$\text{Αν } \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \varphi = \begin{pmatrix} \lambda \\ * \\ \vdots \\ * \end{pmatrix}, \text{ τότε } \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \varphi = \left(\begin{pmatrix} v_1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \\ v_n & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \right) \varphi =$$

$$= \begin{pmatrix} v_1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \\ v_n & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \varphi \right) = \begin{pmatrix} v_1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \\ v_n & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \\ * \\ \vdots \\ * \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \lambda \\ v_2 \lambda \\ \vdots \\ v_n \lambda \end{pmatrix}$$

Άρα $\varphi = \varphi(\lambda) \in \text{Im } \varphi$ και η φ είναι επί.

!! Θα γράψουμε $v \cdot \varphi(\lambda) = v \cdot \lambda$

$$\text{Έτσι } v \cdot \varphi(\lambda_1 \lambda_2) = (v \cdot \lambda_1) \cdot \lambda_2 = (v \cdot \varphi(\lambda_1)) \varphi(\lambda_2) = v \cdot \varphi(\lambda_1) \varphi(\lambda_2)$$

Διαφορετικά, αν γράψουμε

$$\varphi(\lambda_1 \lambda_2) \cdot v = (v \cdot \lambda_1) \cdot \lambda_2 = \varphi(\lambda_2) (\varphi(\lambda_1) \cdot v) = \varphi(\lambda_2) \varphi(\lambda_1) \cdot v$$

Θα πρέπει να θεωρήσουμε τον δακτύλιο $\text{End}_R(V)^{\text{op}}$