Άλγεβρα II

Διαλέξεις Μαρίας Χλουβεράκη

Επιμέλεια : Δημήτρης Βουτσαδάκης

2 Μαρτίου 2024

Μάθημα 01

Στο μάθημα αυτό θα θεωρούμε κάθε R δακτύλιο με μονάδα.

Ορισμός 1. Ένα (αριστερό) **R-πρότυπο** είναι μια αβελιανή ομάδα $(M,+)$ (δηλαδή η πράξη είναι προσεταιριστική, μεταθετική, υπάρχει κάποιο 0_M και υπάρχει αντίθετο στοιχείο), εφοδιασμένη με έναν εξωτερικό (βαθμωτό) πολλαπλασιασμό: $R \times M \to M$, $(r,m) \mapsto r \cdot m$ με τις εξής ιδιότητες:

- $r \cdot (m_1 + m_2) = r \cdot m_1 + r \cdot m_2 \ \forall r \in R, \forall m_1, m_2 \in M$
- $(r_1 + r_2) \cdot m = r_1 m + r_2 m \ \forall r_1, r_2 \in R, \forall m \in M$
- $(r_1 r_2) \cdot m = r_1 (r_2 \cdot m) \ \forall r_1, r_2 \in R, \forall m \in M$
- $1_R \cdot m = m \ \forall m \in M$

Παρατήρηση 1. Ο παραπάνω ορισμός είναι αυτός του αριστερού R-προτύπου. Παρόμοια μπορούμε να δώσουμε ορισμό του δεξιού R-προτύπου με έναν εξωτερικό πολλαπλασιασμό: $M \times R \to M$, $(m,r) \mapsto m \cdot r$.

Παραδείγματα 1.

- Αν $R = k$ σώμα τότε το M είναι k-διανυσματικός χώρος.
- Αν $R = \mathbb{Z}$, τότε το M είναι αβελιανή ομάδα, αφού για κάθε $m \in M, \lambda \in \mathbb{Z}$ έχουμε:

$$\lambda \cdot m = \begin{cases} \underbrace{m + m + \cdots + m}_{\lambda \text{ φορές}} \quad , & \lambda > 0 \\ 0_M \quad , & \lambda = 0 \\ (-\lambda) \cdot (-m) \quad , & \lambda < 0 \end{cases}$$

- Το $\{0_M\}$ είναι R-πρότυπο αφού $r \cdot 0_M = 0_M$ για κάθε $r \in R$.

- Ο δακτύλιος πολυωνύμων $R[x]$ είναι R-πρότυπο: $r \cdot \sum_{i=1}^{n} a_i x^i = \sum_{i=1}^{n} (r \cdot a_i) x^i$.

- Ο $Mat_{m\times n}(R)$ είναι R-πρότυπο με $r \cdot (a_{ij})_{i,j} = (ra_{ij})_{i,j}$.

- Ο R είναι R-πρότυπο.

- Κάθε ιδεώδες του R είναι R-πρότυπο.

- Ο $R^n = R \times R \times \cdots \times R$ με $r \cdot (a_1, ..., a_n) = (ra_1, ..., ra_n)$.

- Ο R/I όπου I ιδεώδες του R με $r \cdot (a + I) = ra + I$. Σημειώνουμε ότι ο εξωτερικός πολλαπλασιασμός είναι καλά ορισμένος αφού αν $a+I = b+I \Rightarrow a-b \in I \Rightarrow r(a-b) \in I \Rightarrow ra + I = rb + I$.

- Αν $f : R \to S$ ομομορφισμός δακτυλίων, τότε το S είναι R-πρότυπο με εξωτερικό πολλαπλασιασμό $r \cdot s = f(r) \cdot s \ \forall r \in R, \forall s \in S$

- Έστω V ένας k-διανυσματικός χώρος και $a : V \to V$ γραμμική απεικόνιση. Τότε V είναι $k[x]$-πρότυπο με $f(x) \cdot v = f(a)(v)$ όπου $f(a) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i a^i$ αν $f(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x^i$ με a^i να υπονοεί τη σύνθεση.

Λήμμα 1.

(i) $0_R \cdot m = 0_M \quad \forall m \in M$

(ii) $r \cdot 0_M = 0_M \quad \forall r \in R$

(iii) $(-r) \cdot m = -(r \cdot m) = r \cdot (-m) \quad \forall r \in R, \forall m \in M$

Απόδειξη.

(i) $0_R + 0_R = 0_R \Rightarrow (0_R + 0_R) \cdot m = 0_R \cdot m \Rightarrow 0_R \cdot m + 0_R \cdot m = 0_R \cdot m \Rightarrow 0_R \cdot m = 0_M$.

(ii) $0_M + 0_M = 0_M \Rightarrow r \cdot (0_M + 0_M) = r \cdot 0_M \Rightarrow r \cdot 0_M + r \cdot 0_M = r \cdot 0_M \Rightarrow r \cdot 0_M = 0_M$.

(iii) $r \cdot m + (-r) \cdot m = (r + (-r)) \cdot m = 0_R \cdot m = 0_M \Rightarrow -(r \cdot m) = (-r) \cdot m$.
$r \cdot m + r \cdot (-m) = r \cdot (m + (-m)) = r \cdot 0_M = 0_M \Rightarrow -(r \cdot m) = r \cdot (-m)$.

□

Ορισμός 2. Έστω M ένα R-πρότυπο. Ένα $N \subset M$ λέγεται **R-υποπρότυπο του** M και συμβολιζουμε $N \leq M$ αν:

- $(N, +)$ υποομάδα της $(M, +)$

- Για κάθε $r \in R$ και για κάθε $n \in N$ ισχύει ότι $r \cdot n \in N$.

Δηλαδή $N \leq M$ αν το N είναι R-πρότυπο με τον εξωτερικό πολλαπλασιασμό του M.

Λήμμα 2. Έστω $\emptyset \neq N \subset M$. Τότε $N \leq M$ αν και μόνο αν $\forall a, b \in N, \forall r \in R$ έχουμε ότι $a - b \in N$ και $r \cdot a \in N$.

Παραδείγματα 2.

- $\{0_M\} \leq M$ για κάθε R-πρότυπο M.
- Σε $R = k$ σώμα η έννοια του υποπροτύπου ταυτίζεται με αυτή του υπόχωρου.
- Στο $R = \mathbb{Z}$ η έννοια του υποπροτύπου ταυτίζεται με αυτή της (αβελιανής) υποομάδας.
- Τα ιδεώδη είναι τα R-υποπρότυπα του R.
- Τα σύνολα $\{f(x) \in R[x] | deg f(x) \leq n\} \leq R[x]$ ως R-πρότυπα (θεωρώντας ότι $deg 0 = -\infty$). Σημειώνουμε ότι δεν είναι υποδακτύλιοι του $R[x]$. Ειδικότερα $R \leq R[x]$ ως R-πρότυπο.

Λήμμα 3. Αν $N_1, N_2 \leq M$, τότε $N_1 \cap N_2 \leq M$.

Απόδειξη. $0_M \in N_1 \cap N_2$,
$a, b \in N_1 \cap N_2 \Rightarrow a, b \in N_i \quad \forall i = 1, 2 \Rightarrow a - b \in N_i \quad \forall i = 1, 2 \Rightarrow a - b \in N_1 \cap N_2$
$r \in R, a \in N_1 \cap N_2 \Rightarrow a \in N_i \quad \forall i = 1, 2 \Rightarrow r \cdot a \in N_i \quad \forall i = 1, 2 r \cdot a \in N_1 \cap N_2$

□

Θα δώσουμε τον ορισμό του **προτύπου πηλίκο**. Αν $N \leq M$, τότε $(N, +) \trianglelefteq (M, +)$ με την έννοια της κανονικής υποομάδας. Συνεπώς, μπορούμε να ορίσουμε την ομάδα πηλίκο:

$$M/N = \{m + N | m \in M\}$$

όπου $m + N = \{m + n | n \in N\}$

Έχουμε: $m_1 + N = m_2 + N \Leftrightarrow m_1 - m_2 \in N$. Γνωρίζουμε ότι η ομάδα πηλίκο είναι αβελιανή ομα΄δα με πράξη την πρόσθεση: $(m_1 + N) + (m_2 + N) = (m_1 + m_2) + N$.

Το σύνολο M/N είναι R-πρότυπο με:

- Πρόσθεση την πρόσθεση της ομάδας πηλίκο
- Εξωτερικό πολλαπλασιασμό πο ορίζεται ως εξής: $R \times M/N \to M/N$ όπου $(r, m+N) \mapsto r \cdot m + N$.

Ο εξωτερικός πολλαπλασιασμός είναι καλά ορισμένος, γιατί αν $m_1 + N = m_2 + N$, τότε $m_1 - m_2 \in N$. Αφού $N \leq M$, έχουμε $r \cdot (m_1 - m_2) \in N$ και άρα $r \cdot m_1 - r \cdot m_2 \in N$. Επομένως $r \cdot m_1 + N = r \cdot m_2 + N$.

Μάθημα 02

Ορισμός 3. Έστω R-πρότυπα M, M'. Μία απεικόνιση $f : M \to M'$ λέγεται **ομομορφισμός R-προτύπων** (ή R-γραμμική) ανν:

1. $f(m_1 + m_2) = f(m_1) + f(m_2) \quad \forall m_1, m_2 \in M$
2. $f(r \cdot m) = r \cdot f(m) \quad \forall r \in R, \forall m \in M$

Θα συμβολίζουμε το σύνολο των ομομορφισμών R-προτύπων από το M στο M' με $Hom_R(M, M')$.

Παραδείγματα 3.

- $f : M \to M, m \mapsto m$ ταυτοτική
- Αν $N \leq M$, η $f : N \to M, n \mapsto n$
- $f : M \to M$ μηδενική , δηλαδή $m \mapsto 0_M$
- Αν $R = k$ σώμα, τότε η έννοια του ομομορφισμού ταυτίζεται με αυτή της γραμμικής απεικόνισης.
- Αν $R = \mathbb{Z}$, τότε η έννοια του ομομορφισμού ταυτίζεται με αυτή του ομομορφισμού αβελιανών ομάδων.

Ιδιότητες 1.

- Αν $f \in Hom_R(M, M')$, τότε $f(0_M) = f(0_R \cdot 0_M) = 0_R \cdot f(0_M) = 0_{M'}$
- Η σύνθεση ομομορφισμών είναι ομομορφισμός.
- Αν f ομομορφισμός και $\exists f^{-1}$, τότε και ο f^{-1} ομομορφισμός.
- Αν $f, g \in Hom_R(M, M')$ και $a \in R$, τότε ορίζουμε:
  1. $f + g \in Hom_R(M, M')$ με $(f + g)(m) = f(m) + g(m)$
  2. $a \cdot f \in Hom_R(M, M')$ με $(a \cdot f)(m) = a \cdot f(m)(= f(a \cdot m))$

  Μπορούμε να δείξουμε ότι για αυτές τις πράξεις το σύνολο $Hom_R(M, M')$ είναι R-πρότυπο.

Ορισμός 4. Ένας ομομορφισμός που είναι επί (αντίστοιχα 1-1) ονομάζεται επιμορφισμός (αντίστοιχα μονομορφισμός). Ένας ομομορφισμός 1-1 και επί ονομάζεται ισομορφισμός. Δύο πρότυπα ονομάζονται ισόμορφα αν υπάρχει ισομορφισμός μεταξύ τους. Για $f \in Hom_R(M, M')$, ορίζουμε την εικόνα $Imf = \{f(m) \,|\, m \in M\}$ και τον πυρήνα $kerf = \{m \in M \,|\, f(m) = 0_{M'}\}$.

Άσκηση 1. Έστω $f \in Hom_R(M, M')$ και $N \leq M, N' \leq M'$. Τότε:

1. $f(N) \leq M'$
2. $f^{-1}(N') \leq M$

Πόρισμα 1.

1. $Imf \leq M'$ (αφού $Imf = f(M)$)
2. $kerf \leq M$ (αφού $kerf = f^{-1}(\{0_{M'}\})$)

Άσκηση 2.

1. f επί $\Leftrightarrow Imf = M'$
2. f 1-1 $\Leftrightarrow kerf = \{0_M\}$

Ορισμός 5. Έστω $N \leq M$. Η απεικόνιση $\pi : M \to M/N$ με $\pi(m) = m + N$ είναι επιμορφισμός R-προτύπων και ονομάζεται **φυσικός επιμορφισμός**.

Παρατήρηση 2. $ker\pi = \{m \in M | m + N = N\} = N$

Πρόταση 1. Υπάρχει αντιστοιχία μεταξύ των υποπροτύπων του M που περιέχουν το N και των υποπροτύπων του M/N.

Απόδειξη. Έστω $K \leq M/N$. Τότε $\pi^{-1}(K) \leq M$. Αφού K υποπρότυπο, έχουμε ότι $0_{M/N} \in K$. Άρα $\pi^{-1}(\{0_{M/N}\}) \subset \pi^{-1}(K)$. Όμως το αριστερό μέλος ισούται με $ker\pi = N$.

Ακόμη, αφού π επί, $\pi(\pi^{-1}(K)) = K$, οπότε έχουμε την αντιστοιχία από τα υποπρότυπα του M/N στα υποπρότυπα του M που περιέχουν το N : $f : K \mapsto \pi^{-1}(K)$ με αντίστροφη απεικόνιση $f^{-1} : L \mapsto \pi(L) =: L/N$. □

Θέωρημα 1 (1ο Θεώρημα Ισομορφισμών R-προτύπων)**.** Αν $f \in Hom_R(M, M')$, τότε η απεικόνιση $\bar{f} : M/kerf \to Imf$ με $\bar{f}(m + kerf) = f(m)$ είναι ισομορφισμός R-προτύπων.

Απόδειξη. Αν $m + kerf = m' + kerf$ τότε $m - m' \in kerf \Rightarrow f(m - m') = 0_{M'} \Rightarrow f(m) - f(m') = 0_{M'} \Rightarrow f(m) = f(m')$. Επομένως αν $m + kerf = m' + kerf$ τότε $\bar{f}(m + kerf) = \bar{f}(m' + kerf)$. Άρα η $\bar{f}$ είναι καλά ορισμένη.

Αν $\bar{f}(m + kerf) = \bar{f}(m' + kerf)$, τότε $f(m) = f(m') \Rightarrow f(m) - f(m') = 0_{M'}$ και όμοια με πριν $m + kerf = m' + kerf$. Άρα η $\bar{f}$ είναι και 1-1.

Η $\bar{f}$ είναι και επί εξ ορισμού.

Τέλος, θα δείξουμε ότι η $\bar{f}$ είναι ομομρφισμός R-προτύπων.

Πράγματι, $\bar{f}(m+kerf+m'+kerf) = \bar{f}(m+m'+kerf) == f(m+m') = f(m)+f(m') = \bar{f}(m + kerf) + \bar{f}(m' + kerf)$

Αν $a \in R$, τότε $\bar{f}(a\cdot(m+kerf)) = \bar{f}(a\cdot m+kerf) = f(a\cdot m) = a\cdot f(m) = a\cdot\bar{f}(m+kerf)$. □

Παράδειγμα 1 (Κινέζικο Θεώρημα Υπολοίπων)**.** Έστω $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ομομορφισμός $\mathbb{Z}$-προτύπων με $x \mapsto (x + m\mathbb{Z}, x + n\mathbb{Z})$.

Αν $(m, n) = 1$, τότε ο $\bar{f} : \mathbb{Z}/mn\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ με $x + mn\mathbb{Z} \mapsto f(x)$ είναι ισομορφισμός $\mathbb{Z}$-προτύπων.

Ορισμός 6. Έστω R-πρότυπο M και $\emptyset \neq X \subset M$. Το **υποπρότυπο του** M **που παράγεται από το** X είναι η τομή όλων των υποπροτύπων του M που περιέχουν το X και συμβολίζεται με (X). Αν $X = \{x_1, ..., x_s\}$, τότε γράφουμε $(x_1, ..., x_s)$ αντί για (X).

Πρόταση 2. $(X) = \{\sum_{i=1}^{n} r_i x_i | n \in \mathbb{N}, r_i \in R, x_i \in X\}$

Απόδειξη. Έστω A το δεξί μέλος, Θα δείξουμε ότι $A \leq M$.

- $X \subset A \Rightarrow A \neq \emptyset$
- Έστω $\sum_{i=1}^{n} r_i x_i, \sum_{i=1}^{n} r'_i x_i \in A$. Τότε $\sum_{i=1}^{n} r_i x_i - \sum_{i=1}^{n} r'_i x_i = \sum_{i=1}^{n} (r_i - r'_i) x_i \in A$.
- Έστω $r \in R$. Τότε $r \cdot (\sum_{i=1}^{n} r_i x_i) = \sum_{i=1}^{n} (r r_i) x_i \in A$

Άρα $A \leq M$ και $X \subset A$, οπότε $(X) \subset A$.

Έστω $N \leq M$, τέτοιο ώστε $X \subset N$. Έχουμε ότι $\sum_{i=1}^{n} r_i x_i \in N$ για κάθε $n \in \mathbb{N}, r_i \in R, x_i \in X$, οπότε $A \subset N$.

Αφού αυτό ισχύει για κάθε υπορότυπο N που περιέχει το X, καταλήγουμε ότι $A \subset (X)$.

□

Ορισμός 7.

- Αν $M = (X)$, θα λέμε ότι το M **παράγεται** από το X και ότι το X είναι ένα **σύνολο γεννητόρων** του M.
- Αν $M = (X)$ και το X είναι πεπερασμένο, θα λέμε ότι το M είναι **πεπερασμένα παραγόμενο** πρότυπο.
- Αν $X = \{m\}$ και $M = (m) = \{r \cdot m | r \in R\}$, τότε θα λέμε ότι το M είναι **κυκλικό** R-πρότυπο.

Παράδειγμα 2.

- Σε $R = k$ σώμα, η έννοια του πεπερασμένα παραγόμενου προτύπου ταυτίζεται με αυτή του διανυσματικού χώρου πεπερασμένης διάστασης και αυτή του κυκλικού προτύπου με αυτή του διανυσματικού χώρου διάστασης 1.
- Στο $R = \mathbb{Z}$ η έννοια του πεπερασμένα παραγόμενου προτύπου ταυτίζεται με αυτή της πεπερασμένα παραγόμενης αβελιανής ομάδας και αυτή του κυκλικού προτύπου με αυτή της κυκλικής αβελιανής ομάδας.
- Ο R είναι κυκλικό R-πρότυπο με $R = (1_R)$. Τα R-υποπρότυπα του R είναι τα ιδεώδη. Τα κυκλικά R-υποπρότυπα του R είναι τα κύρια ιδεώδη.
- Ο $\mathbb{Z}[x] = (1)$ ως $\mathbb{Z}[x]$-πρότυπο. Όμως το $\mathbb{Z}[x]$ δεν είναι πεπερασμένα παραγόμενο $\mathbb{Z}$-πρότυπο, διότι αν υποθέσουμε ότι $\mathbb{Z}[x] = (f_1, ..., f_s)$ και $n := \max_{1 \leq i \leq s} deg f_i$, τότε $x^{n+1} \notin (f_1, ..., f_s)$.