χαρ k ∤ |G|

$\mathcal{F}(G,k) = \{ f \mid f: G \to k,\ f(g) = f(hgh^{-1})\ \forall\, h \in G \}$

συναρτήσεις κλάσης (συναρτήσεις ίχνους, αν γραμμικές)

Θυμίζουμε ότι δύο στοιχεία $g, g' \in G$ λέγονται <u>συζυγή</u> αν
$\exists\ h \in G$ τ.ω. $g' = hgh^{-1}$

Τότε g, g' ανήκουν στην ίδια <u>κλάση συζυγίας</u>

<u>Π.χ.</u> • Αν η G αβελιανή, τότε κάθε στοιχείο είναι μόνο του στην κλάση συζυγίας του

• $G = S_n$, κλάσεις συζυγίας $\longleftrightarrow$ τύπους μεταθέσεων (δηλ. τρόπους με τους οποίους γράφονται ως γινόμενο ξένων κύκλων)

Π.χ. $n = 3$, κλάσεις συζυγίας $\longleftrightarrow$ {{id}, {αντιμεταθέσεις}, {3-κύκλοι}}

$\dim_k \mathcal{F}(G,k) = \#$ κλάσεις συζυγίας της G

C κλάση συζυγίας, $\psi_C : G \to k,\ g \mapsto \begin{cases} 1 & \text{αν } g \in C \\ 0 & \text{αν } g \notin C \end{cases}$

τότε οποιαδήποτε $f \in \mathcal{F}(G,k)$ γράφεται ως $\sum\limits_{C \in \underbrace{Cl(G)}_{\text{σύνολο κλάσεων συζυγίας της } G}} \lambda_C \psi_C,\ \lambda_C \in k$

$$\mathcal{F}(G,k) \times \mathcal{F}(G,k) \longrightarrow k$$
$$(F, F') \longmapsto \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} F(g) F'(g^{-1}) =: \langle F, F' \rangle$$

συμμετρική, διγραμμική

μη εκφυλισμένη

Παρατηρήσεις:

- $\chi^{reg}(g) = \begin{cases} |G| \cdot 1_k & \text{αν } g = 1 \\ 0 & \text{αν } g \neq 1 \end{cases}$

  $\langle \chi^{reg}, \chi_V \rangle = \frac{1}{|G|} \chi^{reg}(1) \cdot \chi_V(1) = \dim_k V \cdot 1_k$

- $k = \mathbb{C}$

  $\langle \chi_V, \chi_V \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_V(g) \chi_V(g^{-1}) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_V(g) \overline{\chi_V(g)} \geq 0$

(Εσωτερικό γινόμενο)

Ορισμός: Θα λέμε ότι ένας χαρακτήρας $\chi : G \to k$ είναι ανάγωγος αν είναι ο χαρακτήρας μιας ανάγωγης αναπαράστασης.

Λήμμα του Schur:

(α) Αν V_1, V_2 είναι ανάγωγες αναπαραστάσεις της G, και $f : V_1 \to V_2$ είναι ομομορφισμός αναπαραστάσεων, τότε $f = 0$ ή f ισομορφισμός.

(b) Αν V ανάγωγη, $End_{kG}(V)$ είναι δακτυλιος διαίρεσης

Αν k αλγεβρικά κλειστό (π.χ. $\mathbb{C}$), τότε για κάθε $f \in End_{kG}(V)$, υπάρχει $\lambda \in k$ τ.ω. $f = \lambda \cdot id_V$

<u>Αποδ.</u> (c) $f : V \longrightarrow V$ ομομορφισμος αναπαραστάσεων

Εστω λ ιδιοτιμή του f. Αφου k αλγ. κλειστό, έχουμε $\lambda \in k$.

$g := f - \lambda id_V : V \longrightarrow V$ ομομορφισμος αναπαραστάσεων

Αφου λ ιδιοτιμη, $\exists\ v \in V \setminus \{0\}$ τω. $g(v) = 0$

$\Rightarrow \ker g \neq \{0\} \Rightarrow g = 0$

<u>Πόρισμα:</u> V_1, V_2 ανάγωγες αναπαραστάσεις της G, k αλγ. κλειστό

$$\dim_k Hom_{kG}(V_1, V_2) = \begin{cases} 0 & \text{αν } V_1 \not\cong V_2 \\ 1 & \text{αν } V_1 \cong V_2 \end{cases}$$

<u>Πόρισμα:</u> V ανάγωγη αναπαράσταση, k αλγ. κλειστο

$g \in Z(G) = \{x \in G \mid xy = yx\ \forall\ y \in G\}$

Τοτε υπάρχει $\lambda \in k$ τ.ω. $\rho(g) = \lambda \cdot id_V$

<u>Αποδ.</u> $\rho(g) \in End_k(V)$

Επειδή $g \in Z(G)$, εχουμε $gh = hg\ \forall\ h \in G$

οποτε $\rho(g) \circ \rho(h) = \rho(h) \circ \rho(g)\ \forall\ h \in G$

δηλ. $\rho(g)(hv) = h \cdot \rho(g)(v)\ \forall\ h \in G \Rightarrow \rho(g) \in End_{kG}(V)$

<u>Ορισμός:</u> Αν $g \in Z(G)$ και V αναπαράσταση της G με χαρακτήρα χ, ορίζουμε $\omega_\chi(g) := \lambda \in k$ τ.ω. $\rho_V(g) = \lambda \cdot id_V$, και ονομάζουμε τη συνάρτηση $\omega_\chi : Z(G) \longrightarrow k$ <u>κεντρικό χαρακτήρα της G</u>

Έχουμε $\omega_\chi(g) = \dfrac{\chi(g)}{\chi(1)}$

<u>Παρατήρηση</u>: Ο παραπάνω ορισμός ισχύει και για k μη αλγεβρικά κλειστό, αρκεί οι ιδιοτιμές της $\rho_V(g)$ να είναι μέσα στο k.

Υπενθύμιση από τη Γραμμική Άλγεβρα

Ξέρουμε ότι αν $W \subseteq V$ διαν. χώροι, τότε $\exists\, W' \subseteq V$ υπόχωρος τ.ω. $V = W \oplus W'$.

$$p_W : V \longrightarrow W$$
$$w \oplus w' \longmapsto w$$

Γενικότερα αν έχουμε $p : V \longrightarrow V$ με $p^2 = p$ γραμμική τότε $V = \operatorname{Ker} p \oplus \operatorname{Im} p$

Επιστροφή στη Θεωρία Αναπαραστάσεων

Έστω (V, ρ) μια αναπαράσταση της G

Ορίζουμε $p_V : V \longrightarrow V$, δηλ. $p_V = \dfrac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \rho(g) \in \operatorname{End}_k(V)$

$$v \longmapsto \frac{1}{|G|} \cdot \sum_{g \in G} \rho(g)(v)$$

Έχουμε $p_V \in \mathrm{End}_{kG}(V)$, γιατί για κάθε $h \in G$

$$p_V(hv) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\rho(g)\rho(h)(v) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\rho(gh)(v) = p_V(v)$$

Από την άλλη

$$h\cdot p_V(v) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\rho(h)\rho(g)(v) = p_V(v)$$

$$\boxed{\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\text{αντιστοιχία}} & G \\ g & \longmapsto & g\cdot h \end{array}}$$

Επίσης έχουμε $\mathrm{Im}\,p_V = V^G = \{v \in V \mid g\cdot v = v \;\forall g \in G\}$

γιατί αν $v \in V^G$, τότε $p_V(v) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\cdot v = \frac{1}{|G|}\cdot|G|\cdot v = v$

οπότε $v \in \mathrm{Im}\,p_V$

Από την άλλη, είδαμε ότι $h\cdot p_V(v) = p_V(v)\; \forall h \in G, \forall v \in V$

οπότε $\mathrm{Im}\,p_V \subseteq V^G$.

Τέλος $p_V(\underbrace{p_V(v)}_{\in\, \mathrm{Im}\,p_V \,=\, V^G}) = \frac{1}{|G|}\cdot\sum_{g\in G}\rho(g)(p_V(v)) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}p_V(v) = p_V(v)$

οπότε $p_V^2 = p_V$

Άρα $V = \mathrm{Ker}\,p_V \oplus \mathrm{Im}\,p_V$ ως kG-πρότυπα

$= \mathrm{Ker}\,p_V \oplus V^G$

$$\mathrm{Tr}\,p_V = \dim_k \mathrm{Im}\,p_V\cdot 1_k = \dim_k V^G\cdot 1_k$$

$$\mathrm{Tr}\,p_V = \mathrm{Tr}\Big(\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\rho(g)\Big) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\mathrm{Tr}(\rho(g)) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi_V(g)$$

$$= \langle \chi_V, \chi_k\rangle$$

Γενικότερα, αν V, W αναπαραστάσεις, τότε

$$\langle \chi_V, \chi_W \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_V(g) \chi_W(g^{-1})$$

$$= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_{\mathrm{Hom}_k(W,V)}(g) = \dim_k \mathrm{Hom}_k(W,V)^G \cdot 1_k$$

$$\langle \chi_V, \chi_W \rangle = \langle \chi_W, \chi_V \rangle = \dots = \dim_k \mathrm{Hom}_k(V,W)^G \cdot 1_k$$

<u>Λήμμα:</u> $\mathrm{Hom}_k(V,W)^G = \mathrm{Hom}_{kG}(V,W)$

<u>Αποδ.</u> $f \in \mathrm{Hom}_k(V,W)^G \Leftrightarrow \rho_W(g) \circ f \circ \rho_V(g^{-1}) = f \quad \forall g \in G$

$f \in \mathrm{Hom}_{kG}(V,W) \Leftrightarrow \rho_W(g) \circ f = f \circ \rho_V(g) \quad \forall g \in G$

Αφού $\rho_V(g^{-1}) = \rho_V(g)^{-1}$, ισχύει το ζητούμενο

<u>Πρόταση:</u> $\langle \chi_V, \chi_W \rangle = \dim_k \mathrm{Hom}_{kG}(V,W) \cdot 1_k$

$$= \dim_k \mathrm{Hom}_{kG}(W,V) \cdot 1_k$$

<u>Σχέσεις ορθογωνιότητας χαρακτήρων</u>

V, W ανάγωγες αναπαραστάσεις

Τότε $\langle \chi_V, \chi_W \rangle = \begin{cases} 0 & \text{αν } V \not\cong W \\ \dim_k \mathrm{End}_{kG}(V) \cdot 1_k & \text{αν } V \cong W \end{cases}$

Αν k αλγ. κλειστό (π.χ. $k = \mathbb{C}$), το τελευταίο είναι ίσο με 1

$\mathrm{char}\, k \neq 0$ —— " —— $\neq 0$

Πόρισμα: V, W ανάγωγες αναπαραστάσεις. Αν k αλγ. κλειστό ή $\mathrm{char}\, k = 0$, τότε: $\chi_V = \chi_W \Rightarrow V \cong W$

Αποδ. $\langle \chi_V, \chi_W \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_V(g) \chi_W(g^{-1})$

$$= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_V(g) \chi_V(g^{-1}) \neq 0 \Rightarrow V \cong W$$