Θεωρία αναπαραστάσεων πεπερασμένων ομάδων

G πεπερασμένη ομάδα , k σώμα

Ορισμός: Μια **αναπαράσταση** της ομάδας G είναι ένα ζεύγος (V, ρ) όπου V είναι ένας k-διαν. χώρος πεπερασμένης διάστασης και $\rho : G \longrightarrow GL(V)$ είναι ένας ομομορφισμός ομάδων

$$GL(V) \cong GL_n(k), \quad n = \dim_k V$$

$$\in \quad R_{gh} = R_g R_h$$

Συχνα αναφερομαστε στον V ως αναπαρασταση, στην ρ ως δομικο μορφισμό

Παραδείγματα:

- G οποιαδήποτε , $V = k$, $\rho(g) = 1_k \ \forall g \in G$ "τετριμμένη"

- $G = S_3 \quad V = \mathbb{C}^3$ (ή $\mathbb{R}^3$ ή $\mathbb{Q}^3$)

$$\rho(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \rho(1\,2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \rho(2\,3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\rho(1\,3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \rho(1\,2)\rho(2\,3)\rho(1\,2)$$

$$\rho(1\,2\,3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \rho(1\,2)\rho(2\,3)$$

$$\rho(1\,3\,2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \rho(1\,3)\rho(2\,3)$$

- $G = S_n$ $V = \mathbb{C}$ $\rho(\sigma) = \varepsilon(\sigma)$ πρόσημο της μετάθεσης

- $G = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, $V = \mathbb{C}$, $\zeta \in \mathbb{C}$ με $\zeta^n = 1$

  $\rho : G \longrightarrow GL(\mathbb{C})$, $\bar{a} \longmapsto \zeta^a$ $\quad (\bar{a} = \bar{b} \Rightarrow \zeta^a = \zeta^b)$

<u>Παρατήρηση:</u>

Αν $G = \langle x_1, \dots, x_n \mid r_1, \dots, r_k \rangle$, τότε $\rho : G \longrightarrow GL(V)$ ορίζει αναπαράσταση <u>ανν</u> τα $\rho(x_1), \dots, \rho(x_n)$ ικανοποιούν τις σχέσεις $r_1, \dots, r_k$

Π.χ. $S_3 = \langle s_1, s_2 \mid s_1^2 = 1 = s_2^2, (s_1 s_2)^3 = 1 \rangle$, όπου $s_i = (i, i+1)$

Οπότε για να δείξουμε ότι οι πίνακες στο παράδειγμα ορίζουν αναπαράσταση αρκεί να δείξουμε ότι:

$\rho(1\,2)^2 = I_3$, $\rho(2\,3)^2 = I_3$, $\rho(1\,2\,3)^3 = I_3$

<u>Ορισμός</u> Αν (V_1, ρ_1), (V_2, ρ_2) είναι δύο αναπαραστάσεις της G, τότε μια απεικόνιση $f : V_1 \longrightarrow V_2$ είναι <u>μορφισμός αναπαραστάσεων</u> αν:

- f γραμμική, και
- για κάθε $g \in G$, $f \circ \rho_1(g) = \rho_2(g) \circ f$

Αν η f είναι 1-1 και επί, θα λέγεται ισομορφισμός

Θα λέμε ότι οι (V_1, ρ_1), (V_2, ρ_2) είναι <u>ισόμορφες αναπαραστάσεις</u> αν υπάρχει ισομορφισμός αναπαραστάσεων $f : V_1 \longrightarrow V_2$

Ορισμος: Η **άλγεβρα της ομάδας** kG ή $k[G]$ είναι μια άλγεβρα με:

- στοιχεία $\sum_{g \in G} \lambda_g g$, οπου $\lambda_g \in k$

  "τυπικοί γραμμικοί συνδυασμοί στοιχείων της G"

  Έχουμε $\sum_{g\in G} \lambda_g g = \sum_{g \in G} \mu_g g \Leftrightarrow \lambda_g = \mu_g \ \forall g \in G$

  Εχουμε $kG \longleftrightarrow k^{|G|}$, $\sum_{g\in G} \lambda_g g \longmapsto (\lambda_g)_{g\in G}$

- πρόσθεση:

$$\Big(\sum_{g\in G} \lambda_g g\Big) + \Big(\sum_{g \in G} \mu_g g\Big) = \sum_{g\in G} (\lambda_g + \mu_g) g \qquad \boxed{0 \in kG}$$

- βαθμωτό πολλαπλασιασμό:

$$\lambda \cdot \Big(\sum_{g\in G} \lambda_g g\Big) = \sum_{g \in G} (\lambda \lambda_g) g$$

- πολλαπλασιασμο:

$$\Big(\sum_{g \in G} \lambda_g g\Big) \cdot \sum_{g\in G} (\mu_g g) = \sum_{g \in G} v_g g$$

όπου

$$v_g = \sum_{h \in G} \lambda_h \mu_{h^{-1}g}$$

Παράδειγμα:

$$G = S_3 = \{1, s_1, s_2, s_1 s_2, s_2 s_1, \underset{\underset{\displaystyle s_2 s_1 s_2}{\shortparallel}}{s_1 s_2 s_1}\}$$

$$(s_1 + s_1 s_2) \cdot (3 s_2 s_1 - s_2) =$$

$$3 s_1 s_2 s_1 - s_1 s_2 + 3 s_1 s_2 s_2 s_1 - s_1 s_2 s_2 \overset{s_1^2 = 1}{\underset{s_2^2=1}{=}}$$

$$3 s_1 s_2 s_1 - s_1 s_2 + 3 \cdot 1_G - s_1$$

<u>Πρόταση:</u> Τα στοιχεία της G αποτελούν βάση της kG ως k-διανυσματικό χώρο.

<u>Αποδ.</u> Τα στοιχεία της kG είναι εξ ορισμού γραμμικοί συνδυασμοί των στοιχείων της G. Επίσης εξ ορισμου $\sum_{g\in G} \lambda_g g = 0$ ανν $\lambda_g = 0 \ \forall g \in G$. Άρα τα στοιχεια της G είναι και γραμμικα ανεξάρτητα

<u>Θεώρημα:</u> Κάθε k-άλγεβρα πεπερασμένης διάστασης είναι (δακτύλιος) του Artin και της Noether.

<u>Αποδ.</u> Κάθε ιδεώδες είναι k-διανυσματικος χώρος διάστασης $\leq n$, όπου n είναι η διάσταση της άλγεβρας. Άρα ικανοποιείται και η ΣΦΑ και η ΣΑΑ.

<u>Πόρισμα:</u> Έστω A k-άλγεβρα πεπερασμένης διάστασης. Τότε A ημιαπλή $\Leftrightarrow$ A J-ημιαπλη.

<u>Θεώρημα Maschke</u>:

kG ημιαπλη $\Leftrightarrow$ χαρ$k \nmid |G|$

<u>Αποδ.</u> Αργότερα