(αριστερό ή δεξιό ή αμφίπλευρο)

<u>Ορισμός</u>: Ένα ιδεώδες I του R λέγεται:

- μηδενοδύναμο (nilpotent) αν $I^n = 0$ για κάποιο $n \in \mathbb{N}$
- nil αν όλα τα στοιχεία του I είναι μηδενοδύναμα

<u>Παρατήρηση</u> $I^n = \langle x_1 x_2 \dots x_n \mid x_i \in I \rangle$

I nilpotent $\Rightarrow$ I nil. Το αντίστροφο δεν ισχύει.

Π.χ. $R = \mathbb{Z}[x_1, x_2, x_3, \dots] / (x_1^2, x_2^3, x_3^4, \dots)$

Το ιδεώδες που παράγεται από τα $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \dots$ είναι nil, αλλά όχι nilpotent

Το ιδεώδες που παράγεται από το $\bar{x}$ στο $\mathbb{Z}[x]/(x^n)$ είναι nilpotent.

(αριστερών)

<u>Λήμμα</u>: Το άθροισμα μηδενοδύναμων ιδεωδών είναι μηδενοδύναμο ιδεώδες

<u>Αποδ.</u> Έστω I, J μηδενοδύναμα. Θ.δ.ο. $I+J$ μηδενοδύναμο

(η γενική απόδειξη προκύπτει με επαγωγή)

Αν $I^n = 0$ και $J^m = 0$, τότε $I^N = 0 = J^N$ για $N = \max\{m, n\}$

Έστω $a_1, a_2, \dots, a_{2N} \in I$ και $b_1, b_2, \dots, b_{2N} \in J$

Τότε $(a_1 + b_1)(a_2 + b_2) \dots (a_{2N} + b_{2N})$

είναι άθροισμα όρων όπου ο καθένας έχει τουλάχιστον N παράγοντες από το I ή από το J, οπότε ανήκει αντίστοιχα στο I^N ή στο J^N.

· Π.χ. Έστω $N=3$

$\underbrace{a_1 b_2}_{\in J}\underbrace{a_3 b_4}_{\in J}\underbrace{a_5 b_6}_{\in J}$, $\underbrace{a_1}_{\in I}\underbrace{a_2}_{\in I}\underbrace{a_3}_{\in I}\underbrace{b_4 b_5 a_6}_{\in I}$,

$\underbrace{a_1 a_2 a_3 b_4}_{\in J}\underbrace{b_5}_{\in J}\underbrace{b_6}_{\in J}$, $\underbrace{b_1}_{J}\underbrace{b_2}_{J}\underbrace{a_3 a_4 b_5}_{J} a_6$

Άρα $(I+J)^{2N}=0$

<u>Λήμμα</u>: Αν ένα αριστερό (αντ. δεξιό) ιδεώδες $I \subseteq R$ είναι nil, τότε $I \subseteq J(R)$

<u>Αποδ</u> Αν $y \in I$, τότε xy μηδενοδύναμο $\forall\, x \in R$.

Άρα $\exists\, n \in \mathbb{N}$ τ.ω. $(xy)^n = 0$.

Έστω $u = \sum_{i=0}^{n-1} (xy)^i$

Τότε $u \cdot (1-xy) = \sum_{i=0}^{n-1}(xy)^i - \sum_{i=1}^{n}(xy)^i = (xy)^0 = 1$

Άρα το $1-xy$ είναι αριστερά αντιστρέψιμο $\forall\, x \in R$

Λήμμα J $\Rightarrow y \in J(R)$

<u>Θεώρημα</u>: Έστω R αριστερός του Artin. Τότε $J(R)$ είναι το μεγαλύτερο μηδενοδύναμο αριστερό ιδεώδες και ταυτόχρονα το μεγαλύτερο μηδενοδύναμο δεξιό ιδεώδες του R.

Αποδ. Αρκεί ν.δ.ο. $J(R)$ μηδενοδύναμο (λόγω προηγουμένου λήμματος)

Εστω η αλυσίδα $J \supseteq J^2 \supseteq J^3 \supseteq \ldots$, όπου $J = J(R)$

Λόγω ΣΦΑ. $\exists\ k \in \mathbb{N}$ τ.ω. $J^k = J^{k+1} = \ldots$

Θ.δ.ο. $J^k = 0$. Έστω $J^k \neq 0$.

Έστω $S = \{ I$ ιδεώδες αριστερό $\mid J^k I \neq 0 \}$

$S \neq \emptyset$, άρα υπάρχει ελαχιστικό στοιχείο I_0 (αφού R Artin)

Εστω $a \in I_0$ με $J^k a \neq 0$

Τότε $J^k(J^k a) = J^{2k} a = J^k a \neq 0$

Οποτε, λόγω ελαχιστικότητας του I_0, $J^k a = I_0$.

Οποτε $a = ya$ για κάποιο $y \in J^k \subseteq J$.

Ομως $(1-y)a = 0 \Rightarrow a = 0$ αφού $1-y \in R^{\times}$: ΑΤΟΠΟ

Αρα $J^k = 0$.

Πόρισμα: Έστω R αριστερός του Artin.

Τότε nil $\Rightarrow$ nilpotent.

Παρατηρήσεις:

- Στη θεωρία δακτυλίων, υπάρχουν και άλλα παρόμοια αποτελέσματα «nil $\Rightarrow$ nilpotent»
- Αν R μεταθετικός και $x \in R$ μηδενοδύναμο στοιχείο, τότε $x \in J(R)$ (αφού (x) nil). Δεν ισχύει αυτό γενικά (Άσκηση)

<u>Θεώρημα</u>: Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(1) R ημιαπλός

(2) R J-ημιαπλός και αριστερός του Artin

(3) R J-ημιαπλος και ικανοποιεί $\underbrace{\text{ΣΦΑ στα } \underline{\text{κύρια}} \text{ αριστερά ιδεώδη}}_{\text{δεξιά τέλειος δακτύλιος}}$

<u>Αποδ.</u> (1) $\Rightarrow$ (2)

R ημιαπλος $\Rightarrow \exists$ αριστερό ιδεωδες I τ.ώ. $R = J(R) \oplus I$.

Αρα $1 = e + f$, με $e^2 = e$, $f^2 = f$, $J(R) = Re$, $I = Rf$, $ef = 0 = fe$

Ομως $1 - e \in R^\times$, άρα $\left.\begin{matrix} f \in R^\times \\ f = f^2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow f = 1 \Rightarrow e = 0 \Rightarrow J(R) = 0$

Εχουμε ήδη δει ότι R ημιαπλος $\Rightarrow$ R αριστερός του Artin

(2) $\Rightarrow$ (3)

Τετριμμένο

(3) $\Rightarrow$ (1)

<u>Ισχυρισμός 1</u>:

Κάθε αριστερό ιδεωδες $I \neq 0$ περιέχει ένα ελάχιστικό αριστερό ιδεώδες

<u>Αποδ.</u> ΣΦΑ στα κύρια ιδεωδη $\Rightarrow$ Κάθε μη κενό σύνολο αριστερών κυρίων ιδεωδών περιέχει ελαχιστικό στοιχείο

Αν παρουμε το συνολο των αριστερών κυρίων ιδεωδών $\neq 0$, που περιέχονται στο I, το ελαχιστικό στοιχείο I_0 είναι και ελαχιστικό ιδεωδες (αν $J \subseteq I_0$ και $a \in J, a \neq 0$ τοτε $Ra \subseteq I_0 \Rightarrow Ra = J = I_0$)

Ισχυρισμος 2

Κάθε ελαχιστικό αριστερο ιδεώδες I είναι ευθύς προσθετέος του ${}_R R$.

Αποδ $J(R)=0$

Αν $I \neq 0$, τοτε $I \neq J(R)$ και άρα υπάρχει μεγιστικό αριστερό ιδεωδες m του R που δεν περιέχει το I. Οποτε $I \cap m \neq I$.

Αφού I ελαχιστικό, $I \cap m = 0$ και, αφού m μεγιστικό, ${}_R R = I \oplus m$.

As υποθέσουμε τωρα ότι ο R δεν είναι ημιαπλός. Έστω I_1 ένα ελαχιστικό ιδεωδες του R. Έστω J_1 τ.ώ. $I_1 \oplus J_1 = {}_R R$.

(αφού R όχι ημιαπλος)

Τότε $J_1 \neq 0$ και άρα το J_1 περιέχει ένα ελαχιστικό αριστερό ιδεώδες I_2. Υπάρχει αριστερό ιδεωδες J_2 τ.ώ. $I_2 \oplus J_2 = J_1$

(αφού $\exists\, J_2'$ τ.ω. $I_2 \oplus J_2' = {}_R R$, παίρνουμε $J_2 = J_2' \cap J_1$)

Συνεχίζοντας έτσι κατασκευάζουμε $J_1 \supsetneq J_2 \supsetneq J_3 \supsetneq \dots$

Ως ευθείς προσθετεοι του R, τα J_k είναι κύρια ιδεωδη : ΑΤΟΠΟ

Παραδειγματα:

- $R = \mathbb{Z}$. Αν $x \in J(R)$, τότε $x \in (p)$ $\forall$ πρώτο αριθμό p

  Αρα $x=0$ και το $\mathbb{Z}$ είναι J-ημιαπλός

  Δεν είναι όμως αριστερος του Artin, άρα ούτε ημιαπλος

  (Αν I, J μη μηδενικά ιδεώδη του $\mathbb{Z}$, τότε $I \cap J \neq \{0\}$)

- R απλος $\Rightarrow$ R J-ημιαπλός (αφού $J(R) \subsetneq R$ ιδεώδες)

• Αν D δακτύλιος διαίρεσης, τότε D και $M_n(D)$ είναι J-ημιαπλοί. Γενικότερα ισχύει: $J(M_n(R)) = M_n(J(R))$

Αποδ. "$\supseteq$" Αρκεί ν.δ.ο. $\forall a \in J(R)$ $aE_{ij} \in J(M_n(R))$

δηλ. ότι $N = I_n - MaE_{ij}$ είναι αντιστρέψιμος $\forall M \in M_n(R)$

$M = \sum_{1 \leq k,l \leq n} m_{kl} E_{kl} \rightsquigarrow N = I_n - \sum_{k=1}^{n} m_{ki} a E_{kj} = I - m_{ji} a E_{jj} - \sum_{k \neq j} m_{ki} a E_{kj}$

Αφού $a \in J(R)$, $\exists (1 - m_{ji}a)^{-1} = 1 - b$ για κάποιο $b \in R$

Τότε $(I_n - bE_{jj})(I_n - m_{ji} a E_{jj}) = I$, οπότε

$(I_n - bE_{jj}) N = I_n - (I_n - bE_{jj}) \sum_{k \neq j} m_{ki} a E_{kj} = I_n - \sum_{k \neq j} m_{ki} a E_{kj}$

Τώρα,

$(I_n - \sum_{k \neq j} m_{ki} a E_{kj})(I_n + \sum_{k \neq j} m_{ki} a E_{kj}) = I_n$, οπότε N αντιστρέψιμος

"$\subseteq$"

Άσκηση 3 Φ 1 $\Rightarrow \exists J$ ιδεώδες του R τ.ω. $J(M_n(R)) = M_n(J)$

Αν $a \in J$, τότε $aI_n \in J(M_n(R))$, οπότε $I_n - baI_n = (1-ba)I_n$ είναι αντιστρέψιμος $\forall b \in R$. Άρα $1-ba$ είναι αντιστρέψιμο, οπότε $a \in J(R)$. Έχουμε $J \subseteq J(R)$, οπότε

$J(M_n(R)) = M_n(J) \subseteq M_n(J(R))$.

• Αν $S := U(R) \cup \{0\}$ είναι δακτύλιος διαίρεσης, τότε $S \cap J(R)$ είναι ιδεώδες του S και άρα 0. Έστω $y \in J(R)$. Τότε

$1 + y \in U(R) \subseteq S \Rightarrow y \in S \cap J(R) = \{0\}$.

Άρα R J-ημιαπλός