Υπενθυμίσεις :

$$M_1 \oplus \dots \oplus M_t = \{ (m_1, \dots, m_t) \mid m_i \in M_i \}$$

$$\bigoplus_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda = \{ (m_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} \mid m_\lambda \neq 0 \text{ για πεπερασμένο πλήθος δεικτών} \}$$

$$M = M_1 \oplus \dots \oplus M_t \,, \quad M_i \leq M$$

$$\Updownarrow$$

$$M = M_1 + \dots + M_t \quad \text{και} \quad M_i \cap \Big(\sum_{j \neq i} M_j \Big) = \{0\}$$

$$\Updownarrow$$

Κάθε $m \in M$ γράφεται με μοναδικό τρόπο ως $m_1 + \dots + m_t$, $m_i \in M_i$

$$M = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda \,, \quad M_\lambda \leq M$$

$$\Updownarrow$$

$$M = \sum_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda \quad \text{και} \quad M_i \cap \Big(\sum_{\substack{j \in J \\ i \notin J \\ J \text{ πεπερασμένο}}} M_j \Big) = \{0\}$$

$$\Updownarrow$$

Κάθε $m \in M$ γράφεται με μοναδικό τρόπο ως $\sum_{\lambda \in \Lambda} m_\lambda$ με $m_\lambda \neq 0$ για πεπερασμένο πλήθος δεικτών

Απλά και ημιαπλά πρότυπα

Ορισμος Ένα R-πρότυπο θα λέγεται απλό (ή ανάγωγο) αν έχει ακριβώς 2 υποπρότυπα, το $\{0\}$ και τον εαυτό του

Προταση: Τα ακολουθα είναι ισοδυναμα :

(i) M απλό R-προτυπο

(ii) $M = (x) \quad \forall \; x \in M \setminus \{0\}$

(iii) $M \cong R/I$ για κάποιο μεγιστικό αριστερο ιδεώδες του R

Αποδ. (i) $\Rightarrow$ (ii)

$(x) \leq M,\ (x) \neq 0 \Rightarrow (x) = M$

(ii) $\Rightarrow$ (i)

Έστω $N \leq M,\ N \neq \{0\}$

Αν $x \in N$, τοτε $M = (x) \leq N$, και αρα $M = N$

(ii) $\Rightarrow$ (iii)

$M \cong R/Ann_R(x)$

Αν $Ann_R(x) \subseteq J$, J αριστερο ιδεώδες του R, τοτε

$J/Ann_R(x) \leq R/Ann_R(x)$

Αφού $R/Ann_R(x)$ απλό, τοτε $J = R$ ή $J = Ann_R(x)$

(iii) $\Rightarrow$ (i)

Αν $N \leq M$, τοτε $N = J/I$ για $I \leq J$. Αρα $N = 0$ ή $N = M$

<u>Παραδείγματα:</u>

- V k-διαν. χώρος $\dim_k V = 1 \Rightarrow V$ απλό
  $\dim_k V > 1 \Rightarrow V$ όχι απλό
- Αν I ιδεώδες του $\mathbb{Z}$, τότε I όχι απλό

<u>Πρόταση</u> (Λήμμα του Schur)

(α) Αν M, N απλά R-πρότυπα και $f: M \longrightarrow N$ ομομορφισμός R-προτύπων, τότε $f=0$ ή f ισομορφισμός

(β) Αν M απλό R-πρότυπο, τότε $End_R(M) = \{f: M \longrightarrow M \mid f$ R-ομομ.$\}$ είναι δακτύλιος διαίρεσης (σαν σώμα αλλά χωρίς ο πολ/σμός να είναι απαραίτητα μεταθετικός)

<u>Απόδ</u> (α) $\ker f \leq M$, M απλό

Αν $\ker f = M$, τότε $f = 0$

Αν $\ker f = 0$, τότε f 1-1

$\mathrm{Im} f \leq N$, N απλό

Αν $\mathrm{Im} f = 0$, τότε $f = 0$

Αν $\mathrm{Im} f = N$, τότε f επί

(β) Πρώτα απ' όλα $End_R(M)$ είναι δακτύλιος με:

$(f+g)(m) = f(m) + g(m)$

$(f \cdot g)(m) = f(g(m))$

Μόλις δείξαμε ότι, αν M απλό, τότε $\forall f \in End_R(M) \setminus \{0\}$, $\exists f^{-1}$.

<u>Ορισμος</u>: Ενα R-προτυπο ονομάζεται <u>ημιαπλό</u> αν για καθε υποπρότυπο $N \leq M$ υπάρχει υποπρότυπο $N' \leq M$ με $M = N \oplus N'$

<u>Παραδείγματα</u>: • $M = \{0\}$

• M απλό $\Rightarrow$ M ημιαπλό

• V k-διαν. χώρος $\Rightarrow$ V ημιαπλό

• $\mathbb{Z}$ όχι ημιαπλό $\mathbb{Z}$-πρότυπο γιατί για οποιαδήποτε δύο ιδεώδη $I, J \neq \{0\}$ έχουμε $I \cap J \neq \{0\}$

<u>Προταση</u>: Έστω M ένα ημιαπλό R-πρότυπο και $N \leq M$. Τοτε τα πρότυπα N και M/N είναι ημιαπλό

<u>Αποδ.</u> Έστω $K \leq N$. Τοτε $K \leq M$ και αρα υπάρχει $K' \leq M$ τ.ω. $M = K \oplus K'$

Θα δείξουμε ότι $N = K \oplus (K' \cap N)$

$K \cap (K' \cap N) \subseteq K \cap K' = \{0\}$

Επίσης αν $n \in N$, τοτε $n \in M$ και αρα $n = k + k'$ με $k \in K, k' \in K'$

Αφού $k \in K \subseteq N$ εχουμε $k' \in N \cap K'$.

Τώρα, αν $K \leq M/N$, τοτε υπάρχει L με $N \leq L \leq M$ τ.ω. $K = L/N$

Αφού M ημιαπλο, υπάρχει $L' \leq M$ τ.ω. $L \oplus L' = M$

Θα δείξουμε ότι $M/N = K \oplus L' + N/N$

Αν $m + N \in M/N$, τοτε $m = l + l'$, και αρα $m + N = l + N + l' + N$ για κάποια $l \in L, l' \in L'$.

Αν $m+N \in L/N \cap (L'+N)/N$, τοτε $m+N = l+N = l'+N$
για κάποια $l \in L, l' \in L'$
Εχουμε $l'-l \in N \leq L$ και αρα $l' \in L$. Αφού $L \cap L' = \{0\}$, εχουμε
$m+N = 0+N = N$

Λήμμα: Αν $N_1 \subseteq N_2 \subseteq N_3 \subseteq \ldots$ είναι μια αύξουσα αλυσίδα υποπροτύπων του M, τοτε $\bigcup_{i=1}^{\infty} N_i \leq M$

Προταση: Έστω $M \neq \{0\}$ ημιαπλό. Τότε $\exists\ N \leq M$ απλό.

Αποδ Έστω $x \in M \setminus \{0\}$ και $S := \{N \leq M \mid x \notin N\}$
$\{0\} \in S$, οποτε $S \neq \emptyset$
Έστω $N_1 \subseteq N_2 \subseteq N_3 \subseteq \ldots$ μια αύξουσα αλυσίδα υποπροτύπων του S
Τότε $\bigcup_{i=1}^{\infty} N_i \in S$ άνω φράγμα
Από το Λήμμα του Zorn, υπάρχει μεγιστικό στοιχείο $K \in S$
Αφού M ημιαπλό, υπάρχει $K' \leq M$ τ.ω. $M = K \oplus K'$.
Επισης $K' \neq 0$ γιατι $x \in M$ αλλά $x \notin K$
Απο την προηγούμενη προταση, το K' είναι ημιαπλό.
Αρα αν $L \leq K'$, $L \neq K', 0$ υπαρχει $L' \leq K'$, $L' \neq K', 0$ τ.ω. $K' = L \oplus L'$
Αφου K μεγιστικό στο S, έχουμε $x \in K \oplus L$ και $x \in K \oplus L'$
Όμως $(K \oplus L) \cap (K \oplus L') = K$, Αρα $x \in K$: ΑΤΟΠΟ
Καταλήγουμε ότι το K' είναι απλο R-πρότυπο

Εφαρμογη:

Το $\mathbb{Z}$ δεν είναι ημιαπλό $\mathbb{Z}$-πρότυπο, γιατί δεν έχει απλά υποπρότυπα

Θεώρημα: Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα για M R-πρότυπο:

(1) M ημιαπλό

(2) M είναι το άθροισμα όλων των απλών υποπροτύπων του

(3) M είναι το άθροισμα απλών υποπροτύπων

(4) M είναι το ευθύ άθροισμα απλών υποπροτύπων

Αποδ $(1) \Rightarrow (2)$

Έστω $(M_i)_{i \in I}$ η συλλογή όλων των απλων υποπροτύπων του M

(απο την προηγούμενη πρόταση, υπάρχουν απλά υποπρότυπα)

Εστω $N = \sum M_i$. Αν $N \neq M$, υπάρχει $N' \leq M$ τω. $N \oplus N' = M$

M ημιαπλο $\Rightarrow$ N' ημιαπλο

Αν $N' \neq 0$, υπάρχει απλό υποπρότυπο του N', το οποίο περιέχεται

στο $\sum_{i \in I} M_i$. Αρα $N' = 0$

$(2) \Rightarrow (3)$

Προφανές

$(3) \Rightarrow (4)$

Εστω $M = \sum_{i \in I} M_i$, M_i απλά

$S = \{ J \subseteq I \mid \sum_{j \in J} M_j = \bigoplus_{j \in J} M_j \}$ κάθε πεπερασμένη γραφή είναι μοναδική

$S \neq \emptyset$ γιατί οποιοδήποτε μονοσύνολο μέσα στο I ανήκει στο S ($\emptyset \in S$ επίσης)

Έστω $J_1 \subseteq J_2 \subseteq J_3 \subseteq \dots$ μια αύξουσα αλυσίδα στο S

Τότε $\bigcup_k J_k \in S$ άνω φράγμα

Από το Λήμμα του Zorn υπάρχει μεγιστικό στοιχείο J

Έστω $N = \sum_{j \in J} M_j = \bigoplus_{j \in J} M_j$

Αν $N \neq M$, έστω $m \in M \setminus N$

Γράφουμε $m = m_1 + m_2 + \dots + m_k$, $m_i \in M_i$ απλό

Αφού $m \notin N$, $\exists\, i \in \{1, \dots, k\}$ τ.ώ. $M_i \not\subseteq N$

Έχουμε $M_i \cap N \leq M_i$ και αφού M_i απλό, πρέπει $M_i \cap N = 0$

Όμως τότε θα είχαμε $J \cup \{i\} \in S$: ΑΤΟΠΟ

Άρα $N = M$

$(4) \Rightarrow (1)$

Έστω $M = \bigoplus_{i \in I} M_i$ και $N \leq M$

$S = \{ J \subseteq I \mid N + \sum_{j \in J} M_j = N \oplus \bigoplus_{j \in J} M_j \}$

$S \neq \emptyset$ γιατί $\emptyset \in S$

Έστω $J_1 \subseteq J_2 \subseteq J_3 \subseteq \dots$ μια αύξουσα αλυσίδα στο S

Τότε $\bigcup_k J_k \in S$ άνω φράγμα

Από το Λήμμα του Zorn υπάρχει μεγιστικό στοιχείο J

Αν $N \oplus \bigoplus_{j \in J} M_j \neq M$, τότε υπάρχει $m \in M \setminus N \oplus \bigoplus_{j \in J} M_j$

Γράφουμε $m = m_1 + m_2 + \dots + m_k$, $m_i \in M_i$

Άρα υπάρχει i τ.ω. $M_i \not\subseteq N \oplus \bigoplus_{j \in J} M_j$

Όμως τότε $J \cup \{i\} \in S$: ΑΤΟΠΟ