<u>Ορισμός</u>: Έστω $R$-πρότυπα $M, M'$. Μια απεικόνιση $f: M \to M'$ λέγεται <u>ομομορφισμός $R$-προτύπων</u> (ή «$R$-γραμμική») ανν

(i) $f(m_1+m_2) = f(m_1)+f(m_2) \quad \forall\ m_1,m_2 \in M$

(ii) $f(\underset{\substack{\uparrow \\ \text{πολ/σμός} \\ \text{στο } M}}{r\cdot m}) = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{πολ/σμός} \\ \text{στο } M'}}{r\cdot f(m)} \quad \forall\ r\in R, \forall\ m\in M$

Θα συμβολίζουμε το σύνολο των ομομορφισμών $R$-προτύπων από το $M$ στο $M'$ με $\mathrm{Hom}_R(M,M')$

<u>Παραδείγματα</u>:

- $f: M \longrightarrow M$, $m \longmapsto m$ ταυτοτική (συμβ. $id_M$)
- Αν $N \leq M$, $f: N \longrightarrow M$, $n \longmapsto n$ (συμβ. $\iota_{N\to M}$)
- $f: M \longrightarrow M$, $m \longmapsto 0_M$ μηδενική
- $R = k$ σώμα, ομομορφισμοί $\equiv$ γραμ. απεικονίσεις
- $R = \mathbb{Z}$, » $\equiv$ ομομορφισμοί (αβελιανών) ομάδων

<u>Ιδιότητες</u>

- $f \in \mathrm{Hom}_R(M,M')$

  $f(0_M) = f(0_R\cdot 0_M) = 0_R\cdot f(0_M) = 0_{M'}$

- Η σύνθεση ομομορφισμών είναι ομομορφισμός
- Αν $f$ ομομορφισμός και $\exists\, f^{-1}$, τότε $f^{-1}$ είναι ομομορφισμός
- Αν $f, g \in Hom_R(M, M')$ και $a \in R$, τότε ορίζουμε:

(i) $f+g \in Hom_R(M,M')$ με $(f+g)(m) = f(m)+g(m)$

(ii) Αν $R$ μεταθετικός, τότε

$a \cdot f \in Hom_R(M,M')$ με $(a\cdot f)(m) = a \cdot f(m) \;\; (= f(am))$

Μπορούμε να δείξουμε ότι για αυτές τις πράξεις το σύνολο $Hom_R(M,M')$ είναι $R$-πρότυπο, αν $R$ μεταθετικός

<u>Ορισμοί</u>:

(i) Έστω $f \in Hom_R(M,M')$

- $f$ επί $\Rightarrow$ $f$ επιμορφισμός
- $f$ 1-1 $\Rightarrow$ $f$ μονομορφισμός
- $f$ 1-1 και επί $\Rightarrow$ $f$ ισομορφισμός

(ii) Λέμε ότι δύο $R$-πρότυπα $M, M'$ είναι "ισόμορφα" και συμβολίζουμε ως $M \cong M'$ αν υπάρχει $f \in Hom_R(M,M')$ ισομορφισμός.

(iii) Έστω $f \in Hom_R(M,M')$

$Imf = \{f(m) \mid m \in M\} = f(M)$ <u>εικόνα της $f$</u>

$Kerf = \{m \in M \mid f(m) = 0_{M'}\}$ <u>πυρήνας της $f$</u>

**Λήμμα (άσκηση) 1:**

Έστω $f \in Hom_R(M, M')$, $N \leq M$, $N' \leq M'$.

Τότε (i) $f(N) \leq M'$.

(ii) $f^{-1}(N') \leq M$

$\quad \quad \quad \overset{\shortparallel}{\{m \in M \mid f(m) \in N'\}}$

**Πόρισμα:**

(i) $Im f \leq M'$ (αφού $Im f = f(M)$)

(ii) $Ker f \leq M$ (αφού $Ker f = f^{-1}(\{0_{M'}\})$)

**Λήμμα (άσκηση) 2:**

(i) $f$ επί $\Longleftrightarrow$ $Im f = M'$

(ii) $f$ 1-1 $\Longleftrightarrow$ $Ker f = \{0_M\}$

**Ορισμός** : Έστω $N \leq M$. Η απεικόνιση $\pi : M \longrightarrow M/N$ με $\pi(m) = m + N$ είναι επιμορφισμός $R$-προτύπων και ονομάζεται "φυσικός επιμορφισμός".

**Παρατηρήσεις:**

- Ισχύει $Ker \pi = \{m \in M \mid m + N = N\} = N$
- Υπάρχει αντιστοιχία $\left\{ \begin{array}{l} \text{Υποπρότυπα του } M \\ \text{που περιέχουν το } N \end{array} \right\} \longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Υποπρότυπα} \\ \text{του } M/N \end{array} \right\}$

Αποδ. Έστω $K \leq M/N$. Τότε $\pi^{-1}(K) \leq M$

Αφού $K$ υποπρότυπο, έχουμε $0_{M/N} \in K$

Άρα $\underbrace{\pi^{-1}(\{0_{M/N}\})}_{= \ker\pi = N} \subseteq \pi^{-1}(K)$

Επίσης, αφού $\pi$ είναι επί, $\pi(\pi^{-1}(K)) = K$

Οπότε έχουμε:

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{Υποπρότυπα του} \\ M/N \end{array} \right\} \longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \text{Υποπρότυπα του } M \\ \text{που περιέχουν το } N \end{array} \right\}$$

$$K \longmapsto \pi^{-1}(K)$$

$$\pi(L) = L/N \longleftarrow L$$

## 1ο Θ. Ισομορφισμών R-προτύπων

Αν $f \in \mathrm{Hom}_R(M, M')$, τότε η απεικόνιση $\bar{f} : M/\ker f \longrightarrow \mathrm{Im} f$ με $\bar{f}(m + \ker f) = f(m)$ είναι ισομορφισμός R-προτύπων

Αποδ. Αν $m + \ker f = m' + \ker f$, τότε $m - m' \in \ker f$.

Άρα $f(m - m') = 0_{M'} \Rightarrow f(m) - f(m') = 0_{M'} \Rightarrow f(m) = f(m')$

Επομένως αν $m + \ker f = m' + \ker f$, τότε

$\bar{f}(m + \ker f) = \bar{f}(m' + \ker f)$.

Άρα η $\bar{f}$ είναι καλά ορισμένη.

Αν $\bar{f}(m+\ker f)=\bar{f}(m'+\ker f)$, τοτε $f(m)=f(m')$

$\Rightarrow f(m)-f(m')=0_{M'} \Rightarrow f(m-m')=0_{M'} \Rightarrow m-m'\in \ker f$

$\Rightarrow m+\ker f = m'+\ker f$

Αρα η $\bar{f}$ ειναι 1-1

Επισης η $\bar{f}$ ειναι επι εξ ορισμού

Τελος, θα δείξουμε οτι η $\bar{f}$ ειναι ομομορφισμος R-προτυπων.

$\bar{f}(m+\ker f+m'+\ker f) = \bar{f}(m+m'+\ker f) = f(m+m')$

$= f(m)+f(m') = \bar{f}(m+\ker f)+\bar{f}(m'+\ker f)$

Αν $a\in R$, τοτε

$\bar{f}(a\cdot(m+\ker f)) = \bar{f}(am+\ker f) = f(am) = a\cdot f(m) =$

$a\cdot \bar{f}(m+\ker f)$

<u>Παράδειγμα:</u>

$f: \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ομομορφισμος $\mathbb{Z}$-προτύπων

$x \longmapsto (x+m\mathbb{Z},\ x+n\mathbb{Z})$

Αν $\mu\kappa\delta(m,n)=1$, τοτε $\bar{f}: \mathbb{Z}/mn\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

$x+mn\mathbb{Z} \longmapsto f(x)$

ειναι ισομορφισμος $\mathbb{Z}$-προτύπων

<u>Ορισμος</u>: Έστω R-προτυπο M και $X\subseteq M$, $X\neq\emptyset$.

Το υποπροτυπο του M που παράγεται από το X ειναι

η τομή όλων των υποπροτύπων του M που περιέχουν το X

Το συμβολίζουμε με $(X)$

<u>Προταση</u>: $(X) = \underbrace{\left\{ \sum_{i=1}^{n} r_i x_i \;\middle|\; n \in \mathbb{N}, r_i \in R, x_i \in X \right\}}_{A}$

<u>Αποδ</u> Έστω $A$ το δεξί μέλος. Θα δείξουμε ότι $A \leq M$.

- $X \subseteq A \Rightarrow A \neq \emptyset$
- Έστω $\sum_{i=1}^{n} r_i x_i, \sum_{i=1}^{n} r_i' x_i \in A$. Τότε $\sum_{i=1}^{n} r_i x_i - \sum_{i=1}^{n} r_i' x_i = \sum_{i=1}^{n} (r_i - r_i') x_i \in A$
- Έστω $r \in R$. Τότε $r \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} r_i x_i\right) = \sum_{i=1}^{n} (r r_i) x_i \in A$

Άρα $A \leq M$ και $X \subseteq A$

Οπότε $(X) \subseteq A$.

Έστω $N \leq M$ τέτοιο ώστε $X \subseteq N$

Έχουμε ότι $\sum_{i=1}^{n} r_i x_i \in N$ για κάθε $n \in \mathbb{N}, r_i \in R, x_i \in X$

Οπότε $A \subseteq N$

Αφού αυτό ισχύει για κάθε υποπρότυπο $N$ που περιέχει το $X$, καταλήγουμε ότι $A \subseteq (X)$.

<u>Ορισμοί</u>:

- Αν $X = \{x_1, \ldots, x_s\}$, τότε γράφουμε $(x_1, \ldots, x_s)$ αντί για $(X)$
- Αν $M = (X)$ θα λέμε ότι το $M$ παράγεται από το $X$ και ότι το $X$ είναι ένα σύνολο γεννητόρων του $M$
- Αν $M = (X)$ και το $X$ είναι πεπερασμένο, θα λέμε ότι

το $M$ είναι πεπερασμένα παραγόμενο πρότυπο

- Αν $X = \{m\}$ και $M = (m) = \{r \cdot m \mid r \in R\}$, τότε θα λέμε ότι το $M$ είναι κυκλικό $R$-πρότυπο.

<u>Παραδείγματα:</u>

- $R = K$, πεπερασμένα παραγ. πρότυπα $\equiv$ διαν. χώροι πεπερασμένης διάστασης

  κυκλικά πρότυπα $\equiv$ διαν. χώροι διάστασης 1

- $R = \mathbb{Z}$, πεπερασμένα παραγ. πρότυπα $\equiv$ πεπερασμένα παραγ. αβελιανές ομάδες

  κυκλικά πρότυπα $\equiv$ κυκλικές αβελιανές ομάδες

- $R$ είναι κυκλικό $R$-πρότυπο με $R = (1_R)$

  Τα $R$-υποπρότυπα του $R$ είναι τα ιδεώδη

  Τα κυκλικά $R$-υποπρότυπα του $R$ είναι τα κύρια ιδεώδη

- $\mathbb{Z}[X] = (1)$ ως $\mathbb{Z}[X]$-πρότυπο

  Όμως το $\mathbb{Z}[X]$ δεν είναι πεπερασμένα παραγόμενο $\mathbb{Z}$-πρότυπο γιατί αν υποθέσουμε ότι $\mathbb{Z}[X] = (f_1, f_2, \dots, f_s)$ και $n := \max_{1 \leq i \leq s} \deg f_i$. Τότε $X^{n+1} \notin (f_1, f_2, \dots, f_s)$