

Ασκ 1 Να δείχθεί ότι το πολώνυμο του Taylor

$$P_K(x_1, x_2) = \sum_{j=0}^K \frac{1}{j!} \sum_{i=0}^j \binom{j}{i} \frac{\partial^j f}{\partial x_1^i \partial x_2^{j-i}}(\vec{a}) (x_1 - a_1)^i (x_2 - a_2)^{j-i}$$

είναι το μοναδικό πολώνυμο βαθμού $\leq K$ που έχει ίδια τιμή στο $\vec{a} = (a_1, a_2)$

με την $f = U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, C^K , $\vec{a} \in U$ και ίδιες παραγώγους τάξης

$1, 2, \dots, K$ στο $\vec{a}$ με την f .

Λύση Αποδεικνύουμε πρώτα ότι $\left. \frac{d^l (x-a)^i}{dx^l} \right|_{x=a} = \begin{cases} l! & \text{αν } i=l \\ 0 & \text{αν } i \neq l \end{cases}$

(Ασκ Άσκ 1) και συμπεραίνουμε ότι

$$\left. \frac{\partial^{l+p} (x_1 - a_1)^i (x_2 - a_2)^j}{\partial x_1^l \partial x_2^p} \right|_{\substack{x_1=a_1 \\ x_2=a_2}} = \left. \frac{d^l (x_1 - a_1)^i}{dx_1^l} \right|_{x_1=a_1} \left. \frac{d^p (x_2 - a_2)^j}{dx_2^p} \right|_{x_2=a_2} = \begin{cases} l! p! & \text{αν } (i,j) = (l,p) \\ 0 & \text{αν } (i,j) \neq (l,p) \end{cases}$$

Έτσι βλέπουμε ότι για (l,p) τ.ω. $0 \leq l+p \leq K$ ισχύει

$$\frac{\partial^{l+p} P_K}{\partial x_1^l \partial x_2^p}(a_1, a_2) = \sum_{j=0}^K \frac{1}{j!} \sum_{i=0}^j \binom{j}{i} \frac{\partial^j f}{\partial x_1^i \partial x_2^{j-i}}(\vec{a}) \left. \frac{d^l (x_1 - a_1)^i}{dx_1^l} \right|_{x_1=a_1} \left. \frac{d^p (x_2 - a_2)^{j-i}}{dx_2^p} \right|_{x_2=a_2}$$

(οι όροι του αθροίσματος μηδενίζονται αν $\begin{cases} i \neq l \\ j-i \neq p \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} i \neq l \\ j \neq l+p \end{cases}$)

$$\text{Άρα } \frac{\partial^{l+p} P_K}{\partial x_1^l \partial x_2^p}(a_1, a_2) = \frac{1}{(l+p)!} \binom{l+p}{l} \frac{\partial^{l+p} f}{\partial x_1^l \partial x_2^p}(a_1, a_2) l! p! = \frac{\partial^{l+p} f}{\partial x_1^l \partial x_2^p}(a_1, a_2)$$

Μοναδικότητα: Αν Q είναι άλλο πολώνυμο βαθμού $\leq K$ με την ίδια ιδιότητα

θέτουμε $R = P_K - Q$, πολώνυμο βαθμού $\leq K$ που ικανοποιεί

$$\frac{\partial^{l+p} R}{\partial x_1^l \partial x_2^p}(a_1, a_2) = 0, \quad \text{για } 0 \leq l+p \leq K$$

Έπειτα, γράφουμε το R στη μορφή:

$$R(x_1, x_2) = \sum_{j=0}^K \left(\sum_{i=0}^j \underbrace{a_{i, j-i}}_{\in \mathbb{R}} (x_1 - a_1)^i (x_2 - a_2)^{j-i} \right)$$

και συμπεραίνουμε από τον προηγούμενο υπολογισμό ότι

$$\frac{\partial^{l+p} R}{\partial x_1^l \partial x_2^p}(a_1, a_2) = a_{l,p} l! p! = 0 \quad \text{για } 0 \leq l+p \leq K \Rightarrow R = 0.$$

Ασκ 2: Αν $f = U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ κλάση C^K ($K \geq 0$) και $\vec{a} \in U$, το

πολύνυμο Taylor K -βάθμους $P_K(\vec{x})$ ικανοποιεί την $\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} \frac{f(\vec{x}) - P_K(\vec{x})}{\|\vec{x} - \vec{a}\|^K} = 0$

Να δείξουμε ότι το $P_K(\vec{x})$ είναι το μοναδικό πολύνυμο βαθμού $\leq K$ που ικανοποιεί τη σχέση αυτή.

Λύση: Αν $Q(\vec{x})$ είναι άλλο πολύνυμο βαθμού $\leq K$ με την ίδια ιδιότητα, τότε το πολύνυμο βαθμού $\leq K$: $R(\vec{x}) = P_K(\vec{x}) - Q(\vec{x})$ ικανοποιεί:

$$\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} \frac{R(\vec{x})}{\|\vec{x} - \vec{a}\|^K} = 0. \quad \text{Χωρίς βλάβη της γενικότητας, υποθέτουμε ότι } \vec{a} = \vec{0}$$

και θα δείξουμε ότι $R(\vec{x}) = 0, \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n$. Παρατηρούμε πρώτα ότι αν ισχύει

$$(*) \quad \begin{cases} \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\alpha_0 + \alpha_1 \lambda + \dots + \alpha_K \lambda^K}{\lambda^K} = 0 & \text{με } \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_K \in \mathbb{R} \text{ σταθερές} \\ \text{Τότε } \alpha_0 = \alpha_1 = \dots = \alpha_K = 0 & (\text{Ασκ Απει I}) \end{cases}$$

Έπειτα, γράφουμε το $R(\vec{x}) = A_0 + A_1(\vec{x}) + \dots + A_K(\vec{x})$

όπου το $A_i(\vec{x})$ ($i=0,1,\dots,k$) είναι ένα ομογενές πολυώνυμο βαθμού i και επομένως ισχύει $A_i(\lambda \vec{x}) = \lambda^i A_i(\vec{x}) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n$.

[π.χ. αν $n=2$ έχουμε $A_0 \in \mathbb{R}$, $A_1(\vec{x}) = a_1 x_1 + a_2 x_2$,
 $A_2(\vec{x}) = b_1 x_1^2 + b_2 x_1 x_2 + b_3 x_2^2$, ...]

Από τη σχέση $\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{0}} \frac{R(\vec{x})}{\|\vec{x}\|^k} = 0$ συμπεραίνουμε ότι για κάθε $\vec{x} \neq \vec{0}$ ($\vec{x} \in \mathbb{R}^n$)

φιζαρισμένο, ισχύει $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{A_0 + \lambda A_1(\vec{x}) + \dots + \lambda^k A_k(\vec{x})}{\lambda^k \|\vec{x}\|^k} = 0$

Επομένως, έπεται από τη (*) ότι $A_0 = 0$, $A_1(\vec{x}) = 0$... $A_k(\vec{x}) = 0$

$\Rightarrow R(\vec{x}) = 0$, $\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n$.

Ασκ 3: Να βρεθεί το ανάπτυγμα Taylor της $f(x_1, x_2) = x_1^{x_2} = e^{x_2 \ln x_1}$ στο $(2,1)$ μέχρι όρων 2ης τάξης.

Λύση: Η f είναι C^∞ στο ημισπίπεδο $U = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 > 0\}$

Υπολογίζουμε $f(2,1) = 2$, $\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2) = \frac{x_2}{x_1} e^{x_2 \ln x_1}$, $\frac{\partial f}{\partial x_1}(2,1) = 1$

$\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2) = \ln x_1 e^{x_2 \ln x_1}$, $\frac{\partial f}{\partial x_2}(2,1) = 2 \ln 2$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x_1, x_2) = -\frac{x_2}{x_1^2} e^{x_2 \ln x_1} + \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^2 e^{x_2 \ln x_1}$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(2,1) = 0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x_1, x_2) = \frac{1}{x_1} e^{x_2 \ln x_1} + \frac{x_2 \ln x_1}{x_1} e^{x_2 \ln x_1}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(2,1) = 1 + \ln 2$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(x_1, x_2) = (\ln x_1)^2 e^{x_2 \ln x_1}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(2,1) = (\ln 2)^2 \cdot 2$

1Αρλ

$$P_2(x_1, x_2) = 2 + 1 \cdot (x_1 - 2) + 2 \ln 2 (x_2 - 1) + \frac{1}{2} \left[0 \cdot (x_1 - 2)^2 + 2 (1 + \ln 2) (x_1 - 2)(x_2 - 1) + (\ln 2)^2 (x_2 - 1)^2 \right]$$

Ασκ 4 Να βρεθεί το πολυώνυμο $P_2(x_1, x_2)$ δεύτερου βαθμού τ.ω.

$$\lim_{(x_1, x_2) \rightarrow (0, \pi)} \frac{\sin(x_1^2 + x_2) - P_2(x_1, x_2)}{x_1^2 + (x_2 - \pi)^2} = 0$$

$$\text{'Εστω } f(x_1, x_2) = \sin(x_1^2 + x_2)$$

Λύση Το ζητούμενο πολυώνυμο είναι το πολυώνυμο του Taylor δεύτερου

βαθμού της f στο σημείο $(0, \pi)$. Υπολογίζουμε λοιπόν

$$f(0, \pi) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2) = 2x_1 \cos(x_1^2 + x_2), \quad \frac{\partial f}{\partial x_1}(0, \pi) = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2) = \cos(x_1^2 + x_2), \quad \frac{\partial f}{\partial x_2}(0, \pi) = -1,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x_1, x_2) = 2 \cos(x_1^2 + x_2) - 4x_1^2 \sin(x_1^2 + x_2), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(0, \pi) = -2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x_1, x_2) = -2x_1 \sin(x_1^2 + x_2), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(0, \pi) = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(x_1, x_2) = -\sin(x_1^2 + x_2), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(0, \pi) = 0$$

1Αρλ το ζητούμενο πολυώνυμο είναι

$$\begin{aligned} P_2(x_1, x_2) &= 0 + 0(x_1 - 0) - 1(x_2 - \pi) + \frac{1}{2} \left[-2(x_1 - 0)^2 + 2 \cdot 0(x_1 - 0)(x_2 - \pi) + 0(x_2 - \pi)^2 \right] \\ &= -x_2 + \pi - x_1^2 \end{aligned}$$

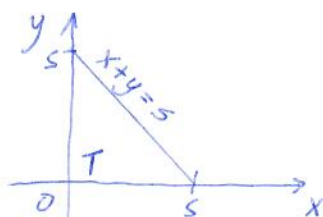
Άσκ 5 : Για x, y, z θετικούς αριθμούς με άθροισμα $s > 0$
 $(x+y+z = s)$, βρείτε τη μέγιστη τιμή του γινομένου xyz .

Λύση : Αναγώματε σε ένα πρόβλημα με 2 μεταβλητές θέτοντας
 $z = s - (x+y)$ και $f(x, y) = xy(s - x - y) = sxy - x^2y - xy^2$.

Το πεδίο ορισμού της f είναι το τρίγωνο

$$T = \left\{ x \geq 0, y \geq 0, x+y \leq s \right\}$$

↑
αφού $z \geq 0$



Η f είναι συνεχής στο T (κλειστό και φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$)

άρα η f λαμβάνει το μέγιστό της σε ένα σημείο $(x_0, y_0) \in T$

Στο σύνορο του T :

$$\begin{aligned} x=0 &\Rightarrow f=0 & x+y=s &\Rightarrow f=0 \\ y=0 &\Rightarrow f=0 \end{aligned}$$

Κατά συνέπεια, το μέγιστο της f λαμβάνεται στο εσωτερικό του T

σε ένα σημείο $(x_0, y_0) \in U = \left\{ x > 0, y > 0, x+y < s \right\}$ (ανοιχτό σύνολο)

Αναζητάμε τώρα τα κρίσιμα σημεία της $f \in C^1(U)$:

$$\bullet \nabla f(x, y) \underset{U}{=} \begin{pmatrix} sy - 2xy - y^2 \\ sx - x^2 - 2xy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y(s - 2x - y) \\ x(s - 2y - x) \end{pmatrix}$$

$$\bullet \nabla f(x, y) \underset{U}{=} \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} s - 2x - y = 0 \\ s - 2y - x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y = s \\ x + 2y = s \end{cases} \Leftrightarrow x = y = \frac{s}{3}$$

Αφού το σημείο $\left(\frac{s}{3}, \frac{s}{3}\right)$ είναι το ΜΟΝΑΔΙΚΟ κρίσιμο σημείο της f στο U

συμπεραίνουμε ότι $\max_T f = f\left(\frac{s}{3}, \frac{s}{3}\right) = \frac{s^3}{3^3}$ και $xyz \leq \left(\frac{s}{3}\right)^3 = \left(\frac{x+y+z}{3}\right)^3$

Άσκ 6 : Μελετήστε τα κρίσιμα σημεία της συνάρτησης

$$f(x_1, x_2) = (x_1 - 5) \ln(x_1 x_2) \text{ ορισμένης στο } U = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 > 0, x_2 > 0\}$$

Λύση Έχουμε $f \in C^\infty(U)$ και $\nabla f|_{(x_1, x_2)} = \begin{pmatrix} \ln(x_1 x_2) + \frac{x_1 - 5}{x_1} \\ \frac{x_1 - 5}{x_2} \end{pmatrix}$

$$\text{Άρα } \nabla f|_{(x_1, x_2)} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} \ln(x_1 x_2) + \frac{x_1 - 5}{x_1} = 0 \\ \frac{x_1 - 5}{x_2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 5 & \text{και το } (5, \frac{1}{5}) \\ x_2 = \frac{1}{5} & \text{είναι το μοναδικό} \end{cases}$$

Έπειτα, υπολογίζουμε

κρίσιμο σημείο της f στο U .

$$H_f(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} \frac{1}{x_1} + \frac{5}{x_1^2} & \frac{1}{x_2} \\ \frac{1}{x_2} & -\frac{x_1 - 5}{x_2^2} \end{bmatrix} \text{ και } H_f(5, \frac{1}{5}) = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} & 5 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$$

Επειδή $\det(H_f(5, \frac{1}{5})) = -25$ συμπεραίνουμε ότι η μέγ-ιδιοτιμή του

$H_f(5, \frac{1}{5})$ είναι > 0 ενώ η άλλη είναι < 0 . Επομένως το σημείο $(5, \frac{1}{5})$

είναι ελαχματικό.

Άσκ 7 : Να βρεθούν τα ολικά ακρότατα της $f(x_1, x_2) = x_1^3 + x_2^3 + 3x_1^2 - 3x_2^2$

στο τετράγωνο $K = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : |x_1| \leq 1, |x_2| \leq 1\}$

Λύση : Το K είναι συμπαγές, άρα τα ολικά ακρότατα της $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ στο K υπάρχουν. Αναζητάμε τα κρίσιμα σημεία της f στο εσωτερικό του K :

$$\nabla f|_{(x_1, x_2)} = \begin{pmatrix} 3x_1(x_1 + 2) \\ 3x_2(x_2 - 2) \end{pmatrix} = \vec{0} \text{ και } \begin{matrix} |x_1| < 1 \\ |x_2| < 1 \end{matrix} \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{0}$$

Άρα το $\vec{0}$ είναι το μοναδικό κρίσιμο σημείο της f στο K και $f(\vec{0}) = 0$.

Μελετάμε τώρα την f στο ∂K .

$$\bullet \quad f(1, x_2) = x_2^3 - 3x_2^2 + 4 \quad \frac{\partial f}{\partial x_2}(1, x_2) = 3x_2^2 - 6x_2 = 3x_2(x_2 - 2)$$

$$\begin{array}{c} \uparrow \\ [-1, 1] \\ x_2 \quad -1 \quad 0 \quad 1 \\ f(1, x_2) \quad | \quad \nearrow \quad | \quad \rightarrow \quad | \end{array}$$

και συμπεραίνουμε ότι $\boxed{\max_{|x_2| \leq 1} f(1, x_2) = f(1, 0) = 4}$

ενώ $\min_{|x_2| \leq 1} f(1, x_2) = f(1, -1) = 0$

$$\bullet \quad f(-1, x_2) = x_2^3 - 3x_2^2 + 2 \quad \text{όπως προηγουμένως έχουμε} \quad \max_{|x_2| \leq 1} f(-1, x_2) = f(-1, 0) = 2$$

ενώ $\min_{|x_2| \leq 1} f(-1, x_2) = f(-1, -1) = -2$

$$\bullet \quad f(x_1, 1) = x_1^3 + 3x_1^2 - 2 \quad \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, 1) = 3x_1^2 + 6x_1 = 3x_1(x_1 + 2)$$

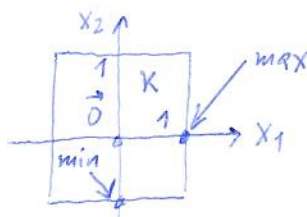
$$\begin{array}{c} \uparrow \\ [-1, 1] \\ x_1 \quad -1 \quad 0 \quad 1 \\ f(x_1, 1) \quad | \quad \searrow \quad | \quad \nearrow \quad | \end{array}$$

και συμπεραίνουμε ότι $\max_{|x_1| \leq 1} f(x_1, 1) = f(1, 1) = 2$

ενώ $\min_{|x_1| \leq 1} f(x_1, 1) = f(0, 1) = -2$

$$\bullet \quad f(x_1, -1) = x_1^3 + 3x_1^2 - 4 \quad \text{όπως προηγουμένως έχουμε} \quad \max_{|x_1| \leq 1} f(x_1, -1) = f(1, -1) = 0$$

ενώ $\boxed{\min_{|x_1| \leq 1} f(x_1, -1) = f(0, -1) = -4}$



Συνοψίζοντας το ολικό μέγιστο / ελάχιστο δεν λαμβάνεται στο K επειδή το μοναδικό κρίσιμο σημείο στο K δεν είναι ολικό ακρότατο. Άρα το ολικό μέγιστο / ελάχιστο λαμβάνεται στο ∂K . Συγκεντρώνοντας τα προηγούμενα αποτελέσματα βλέπουμε ότι

$$\max_K f = f(1, 0) = 4, \quad \min_K f = f(0, -1) = -4$$

Παρατήρηση : Το $\vec{0}$ είναι εξωτερικό σημείο. Πράγματι

$$H_f(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} 6x_1 + 6 & 0 \\ 0 & 6x_2 - 6 \end{bmatrix}, \quad H_f(\vec{0}) = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -6 \end{bmatrix} \text{ με ιδιοτιμές } \neq 6$$

Ασκ 8 : Να δείχθεί ότι το μέγιστο και το ελάχιστο της $f(x_1, x_2) = e^{x_1} \sin x_2$ στον κλειστό μοναδιαίο δίσκο $D = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}$ λαμβάνονται στο ∂D

Λύση Επειδή το D είναι συμπαγές και $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$, γνωρίζουμε ότι το $\max_D f$ και το $\min_D f$ λαμβάνονται σε σημεία του D . Θα αναζητήσουμε

τα κρίσιμα σημεία της f στο $\bar{D}$ (έσωτερικό του D). Υπολογίζουμε λοιπόν

$$\nabla f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} e^{x_1} \sin x_2 \\ e^{x_1} \cos x_2 \end{pmatrix} \neq \vec{0} \text{ επειδή } \|\nabla f(x_1, x_2)\|^2 = e^{2x_1} > 0, \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^2$$

Άρα η f δεν έχει κρίσιμα σημεία και επομένως το $\max_D f$ και το $\min_D f$ λαμβάνονται σε σημεία του συνόρου ∂D .

Ασκ 9 Θεωρούμε το γραμμικό Γ της $g(x_1, x_2) = \sqrt{\frac{2}{x_1 x_2}}$, $x_1, x_2 > 0$.

Βρείτε το σημείο του Γ που απέχει ελάχιστη απόσταση από την αρχή των αξόνων
[Υπόδειξη : ελαχιστοποιείτε το τετράγωνο της απόστασης]

Λύση : $\Gamma = \{(x_1, x_2, \sqrt{\frac{2}{x_1 x_2}}) : x_1 > 0, x_2 > 0\} \subset \mathbb{R}^3$. Έστω $M \in \Gamma$,
η απόσταση $d(M, \vec{0}) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \frac{2}{x_1 x_2}}$ είναι ελάχιστη όταν η συνάρτηση

$f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 + \frac{2}{x_1 x_2}$ Λαμβάνει την ελάχιστη τιμή της. Προσδιορίζουμε πρώτα τα κρίσιμα σημεία της f στο $U = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 > 0, x_2 > 0\}$.

Υπολογίζουμε $\nabla f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 2x_1 - \frac{2}{x_1^2 x_2} \\ 2x_2 - \frac{2}{x_1 x_2^2} \end{pmatrix} = \vec{0} \Leftrightarrow (x_1, x_2) = (1, 1)$ μοναδικό κρίσιμο σημείο.

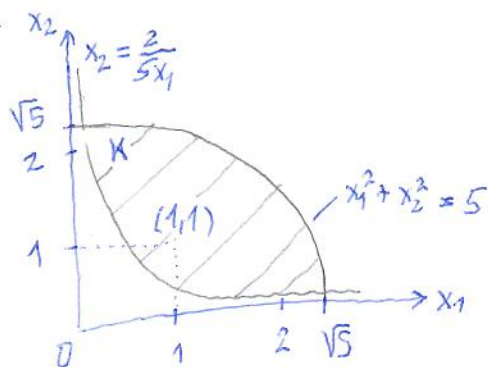
Παρατηρούμε επίσης ότι $\lim_{\|\vec{x}\| \rightarrow \infty} f(\vec{x}) = +\infty$ και $\lim_{\substack{x_1 \rightarrow 0 \\ (x_1, x_2) \in U}} f(x_1, x_2) = +\infty$, $\lim_{\substack{x_2 \rightarrow 0 \\ (x_1, x_2) \in U}} f(x_1, x_2) = +\infty$ (*)

Άρα η f παίρνει το ελάχιστό της στο U και η θέση των ελαχίστων της f βρίσκεται στο $(1, 1)$ (μοναδικό κρίσιμο σημείο).

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι το σημείο $(1, 1, f(1, 1))$ ανήκει ελάχιστη απόσταση από την αρχή των αξόνων. $\frac{1}{\sqrt{2}}$

[Εναλλακτική προσέγγιση, αν συσχετιστούμε με τα όρια στο (*).

Θεωρούμε το συμπαχές σύνολο $K = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 \leq 5 \text{ και } \frac{2}{x_1 x_2} \leq 5\}$



Στο $U \setminus K$ και στο ∂K ισχύει

$$x_1^2 + x_2^2 \geq 5 \quad \text{ή} \quad \frac{2}{x_1 x_2} \geq 5$$

άρα $f(x_1, x_2) \geq 5 > f(1, 1)$ για $(x_1, x_2) \in U \setminus K$ και για $(x_1, x_2) \in \partial K$

Συνεπώς $\min_U f = \min_K f$ και το $\min_K f$ λαμβάνεται σε ένα εσωτερικό σημείο του K , που είναι το κρίσιμο σημείο $(1, 1)$.