exam Sep 26 apei

ΕΚΠΑ - ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ ΙΙΙ - 22 Σεπτεμβρίου 2026

Απαντήστε σε όλα τα θέματα. Καλή επιτυχία!

Θέμα 1 [2 βαθμοί]: Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με $f(0,0) = 0$ και $f(x,y) = \dfrac{x^3+y^6}{x^2+y^2}$ αν $(x,y) \neq (0,0)$.

α) Δείξτε ότι η f είναι συνεχής στο $(0,0)$.

β) Δείξτε ότι για κάθε μοναδιαίο διάνυσμα $\vec{n} = (n_1, n_2) \in \mathbb{R}^2$, η κατά κατεύθυνση παράγωγος $\frac{\partial f}{\partial \vec{n}}(0,0)$ υπάρχει.

γ) Δείξτε ότι η f δεν είναι διαφορίσιμη στο $(0,0)$.

Θέμα 2 [2 βαθμοί]:

α) Δείξτε ότι υπάρχει C^∞ συνάρτηση $z = f(x,y)$, ορισμένη σε ανοικτή περιοχή U του $(-1,0)$, τέτοια ώστε $x^2+y^2+2x+e^{f(x,y)}+f(x,y) = 0$ και $f(-1,0) = 0$.

β) Υπολογίστε το διαφορικό $Df(-1,0)$.

γ) Δείξτε ότι η f έχει τοπικό μέγιστο στο $(-1,0)$.

Θέμα 3 [1,5 βαθμοί]:

α) Δείξτε ότι το διανυσματικό πεδίο $\vec{F} = (P,Q) = (\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2})$ δεν είναι συντηρητικό στο $\mathbb{R}^2 \setminus \{\vec{0}\}$.

β) Προσδιορίστε τις συναρτήσεις $f : U \to \mathbb{R}$ που ικανοποιούν $\nabla f = \vec{F}$ στο ανοικτό σύνολο $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$.

ΒΛ παράδειγμα 1 Κεφ 6 Επικαμπύλια και επιφανειακά ολοκληρώματα σελ 15-16 στην η-τάξη

Θέμα 4 [3 βαθμοί]:

α) Υπολογίστε τον όγκο του στερεού $K \subset \mathbb{R}^3$ που περικλείεται ανάμεσα στην επιφάνεια $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 = z^2+1,\ 0 \leq z \leq 1\}$ και τα επίπεδα $z = 0$ και $z = 1$.

β) Υπολογίστε το επιφανειακό ολοκλήρωμα $\iint_S z\,dS$.

Θέμα 5 [1,5 βαθμοί]: Κάνοντας χρήση του Green υπολογίστε το:

$$\int_{\partial D} (3x^5y^2 - x^2y^3 - 3xy + 5x^2)dx + (x^6y - x^3y^2 + x^2 - 3y)dy,$$

όπου $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0,1],\ x^2 \leq y \leq x^{1/2}\}$ και το σύνορο ∂D έχει τον αντιωρολόγιο προσανατολισμό.

ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ

Κυλινδρικές συντεταγμένες: $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, $z = z$, $dxdydz = r\,dr\,d\theta\,dz$. Σφαιρικές συντεταγμένες: $x = \rho\sin\phi\cos\theta$, $y = \rho\sin\phi\sin\theta$, $z = \rho\cos\phi$, $dxdydz = \rho^2\sin\phi\,d\rho\,d\theta\,d\phi$.

Τύπος του Green:

$\int\int_{int(\vec{\gamma})} (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}) = \int_{\vec{\gamma}} (Pdx + Qdy)$, όπου η απλή κλειστή καμπύλη $\vec{\gamma}$ έχει τον αντιωρολόγιο προσανατολισμό.

Θ1 Έχουμε

$$|f(x,y)| = \frac{|x^3+y^6|}{|x^2+y^2|} \le \frac{|x|^3}{|x^2+y^2|} + \frac{|y|^6}{|x^2+y^2|} \le |x^2+y^2|^{1/2} + |x^2+y^2|^2 \xrightarrow[\text{καθώς}]{} 0$$

($|x|, |y| \le \sqrt{x^2+y^2}$)

$(x,y)\to(0,0)$

Άρα $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$ και η f είναι συνεχής στο $(0,0)$.

Εξ' ορισμού

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{n}}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(tn_1, tn_2) - f(0,0)}{t-0} = \lim_{t\to 0} \frac{t^3 n_1^3 + t^6 n_2^6}{t(t^2 n_1^2 + t^2 n_2^2)}$$

$$= \lim_{t\to 0} (n_1^3 + t^3 n_2^6) = n_1^3$$

($t(t^2 n_1^2 + t^2 n_2^2) = t^3$, $\|\vec{n}\| = \sqrt{n_1^2+n_2^2} = 1$)

Άρα, για κάθε μοναδιαίο διάνυσμα $\vec{n} = (n_1, n_2) \in \mathbb{R}^2$, η κατά κατεύθυνση παράγωγος $\frac{\partial f}{\partial \vec{n}}(0,0)$ υπάρχει. Ειδικότερα βρίσκουμε επιλέγοντας $\vec{n} = (1,0)$ και $\vec{n} = (0,1)$: $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 1$, $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$.

Αν η f ήταν διαφορίσιμη στο $(0,0)$ θα είχαμε

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{n}}(0,0) = \nabla f(0,0) \cdot \vec{n} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \end{bmatrix} = n_1$$

Το οποίο δεν ισχύει. Αυτό αποδεικνύει ότι η f ΔΕΝ είναι διαφορίσιμη στο $(0,0)$.

Θ2 α) Η συνάρτηση $F(x,y,z) = x^2+y^2+2x+e^z+z$ είναι $C^\infty(\mathbb{R}^3)$ και ικανοποιεί $F(-1,0,0)=0$ καθώς και $\frac{\partial F}{\partial z}(x,y,z) = e^z+1$

$\Rightarrow \frac{\partial F}{\partial z}(-1,0,0) = 2 \neq 0$. Το θεώρημα πεπλεγμένης συνάρτησης εξασφαλίζει λοιπόν την ύπαρξη μιας συνάρτησης $f: A \to \mathbb{R}$ ορισμένης σε μια ανοικτή περιοχή U του $(-1,0)$ και κλάσης C^∞ τ.ω. $f(-1,0)=0$ και $\underbrace{x^2+y^2+2x+e^{f(x,y)}+f(x,y)=0}_{(*)}$, $\forall (x,y)\in U$.

β) Παραγωγίζοντας την εξίσωση (*) ως προς x και y βρίσκουμε

$$2x+2+\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)e^{f(x,y)}+\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=0 \xrightarrow{(x,y)=(-1,0)} \frac{\partial f}{\partial x}(-1,0)=0$$

$$2y+\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)e^{f(x,y)}+\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0 \xrightarrow{(x,y)=(-1,0)} \frac{\partial f}{\partial y}(-1,0)=0$$

Άρα $Df(-1,0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}$ μηδενικός πίνακας γραμμή

$$Df(-1,0)(h_1,h_2) = 0h_1+0h_2 = 0$$

($h_1,h_2 \in \mathbb{R}^2$)

γ) Ισχύει $f(x,y)\to 0$ καθώς $(x,y)\to(0,0)$, άρα έχουμε

$e^{f(x,y)} = 1+f(x,y)+f(x,y)\varepsilon(f(x,y))$ για μία συνάρτηση $\varepsilon(s)\to 0$. $s\to 0$

Από την εξίσωση (*) προκύπτει λοιπόν ότι

$(x+1)^2+y^2+(2+\varepsilon(f(x,y)))f(x,y)=0$

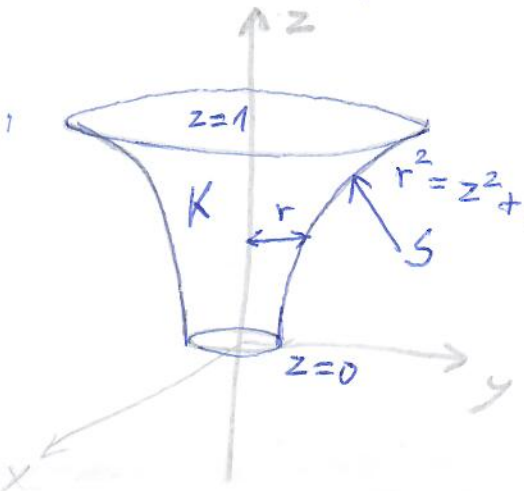
με $|\varepsilon(f(x,y))|<1$ όταν το (x,y) ανήκει σε μία μικρή γειτονιά

$V \subset U$ του $(-1,0)$.

Άρα για $(x,y)\in V$ έχουμε $f(x,y) = -\dfrac{(x+1)^2+y^2}{2+\varepsilon(f(x,y))} \leq \underbrace{f(-1,0)}_{=0}$

που σημαίνει ότι η f έχει τοπικό μέγιστο στο $(-1,0)$.

Θέμα 1:



α) Θεωρούμε το στερεό K χρησιμοποιώντας τις κυλινδρικές συντεταγμένες:

$$K = \{ z\in[0,1],\ \theta\in[0,2\pi],\ r\in[0,\sqrt{z^2+1}] \}$$

Άρα

$$\text{όγκος}(K) = \iiint_K dx\,dy\,dz = \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\sqrt{z^2+1}} r\,dr \right) d\theta \right) dz$$

Fubini $= \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} \underbrace{\left[\frac{r^2}{2}\right]_0^{\sqrt{z^2+1}}}_{=\frac{z^2+1}{2}} d\theta \right) dz = \int_0^1 \pi(z^2+1)\,dz = \pi\left[\frac{z^3}{3}+z\right]_0^1$

$$= \frac{4\pi}{3}$$

β) Έχουμε $S = \Phi(D)$ όπου $D = [0,2\pi]\times[0,1]$

και $\Phi(\theta,z) = \begin{pmatrix} \sqrt{z^2+1}\cos\theta \\ \sqrt{z^2+1}\sin\theta \\ z \end{pmatrix}$, $\Phi : D \to \mathbb{R}^3$.

Υπολογίζουμε επίσης τις παραγώγους

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \theta}(\theta,z) = \begin{pmatrix} -\sqrt{z^2+1}\sin\theta \\ \sqrt{z^2+1}\cos\theta \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial z}(\theta,z) = \begin{pmatrix} \frac{z}{\sqrt{z^2+1}}\cos\theta \\ \frac{z}{\sqrt{z^2+1}}\sin\theta \\ 1 \end{pmatrix}$$

καθώς και το διανυσματικό εμβαδόν της επιφάνειας S

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \theta}(\theta,z) \times \frac{\partial \Phi}{\partial z}(\theta,z) = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ -\sqrt{z^2+1}\sin\theta & \sqrt{z^2+1}\cos\theta & 0 \\ \frac{z}{\sqrt{z^2+1}}\cos\theta & \frac{z}{\sqrt{z^2+1}}\sin\theta & 1 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{z^2+1}\cos\theta \\ \sqrt{z^2+1}\sin\theta \\ -z \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow dS = \left\| \frac{\partial \Phi}{\partial \theta}(\theta,z) \times \frac{\partial \Phi}{\partial z}(\theta,z) \right\| d\theta dz = \sqrt{2z^2+1}\, d\theta dz$$

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι

$$\iint_S z\, dS = \iint_{[0,2\pi]\times[0,1]} z\sqrt{2z^2+1}\, d\theta dz \overset{\text{Fubini}}{=} 2\pi \underbrace{\int_0^1 z(2z^2+1)^{1/2}}_{u}$$

$$\left[\frac{(2z^2+1)^{3/2}}{6} \right]_0^1$$

$$= \frac{\pi}{3}\left(2^{3/2}-1\right)$$

Θ5: Εφαρμόζουμε Green με

$$P(x,y) = 3x^5y^2 - x^2y^3 - 3xy + 5x^2 \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = 6x^5y - 3x^2y^2 - 3x$$

$$Q(x,y) = x^6y - x^3y^2 + x^2 - 3y \Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} = 6x^5y - 3x^2y^2 + 2x$$

Άρα $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 5x$ και

$$\int_{\partial D} P\,dx + Q\,dy = \iint_D 5x\,dx\,dy \overset{\text{Fubini}}{=} \int_0^1 \left(\int_{x^2}^{x^{1/2}} 5x\,dy \right) dx$$

$$= \int_0^1 \underbrace{5x\left(x^{1/2} - x^2\right)}_{5x^{3/2} - 5x^3} dx = 5\left[\frac{2x^{5/2}}{5} - \frac{x^4}{4}\right]_0^1$$

$$= 2 - \frac{5}{4} = \frac{3}{4}$$