

ΚΕΦ 4: ΤΥΠΟΙ ΤΟΥ TAYLOR ΚΑΙ ΑΚΡΟΤΑΤΑ

① Για συναρτήσεις μιας μεταβλητής

Θέωρημα: Έστω $f: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, κλάσεως C^{k+1} ($k \geq 0$) και έστω $a \in I$ ^{διδομένη} αξιοποιούμενο. Τότε, $\forall x \in I$ ισχύει:

$$(1) \quad f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2} f''(a)(x-a)^2 + \dots + \frac{1}{k!} f^{(k)}(a)(x-a)^k + \left(\int_0^1 \frac{(1-u)^k}{k!} f^{(k+1)}(a+u(x-a)) du \right) (x-a)^{k+1}$$

Πόρισμα: Έστω $f: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, κλάσεως C^k ($k \geq 0$) και έστω $a \in I$. ^{διδομένη}

Τότε $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - \left[f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2} f''(a)(x-a)^2 + \dots + \frac{1}{k!} f^{(k)}(a)(x-a)^k \right]}{(x-a)^k} = 0 \quad (2)$

Σχόλια α) $(1) \Leftrightarrow f(x) = P_k(x) + R_k(x)$ όπου

$$P_k(x) = \sum_{i=0}^k \frac{f^{(i)}(a)}{i!} (x-a)^i \quad \text{είναι το πολυώνυμο Taylor } k\text{-βάθμou της } f \text{ στο } a.$$

$(f^{(0)} = f, 0! = 1)$

και $R_k(x) = \left(\int_0^1 \frac{(1-u)^k}{k!} f^{(k+1)}(a+u(x-a)) du \right) (x-a)^{k+1}$ είναι το υπόλοιπο Taylor

β) Το $P_k(x)$ είναι το μοναδικό πολυώνυμο βαθμού $\leq k$ που έχει ίδια τιμή με την f στο a και ίδιες παραγώγους τάξης $i=1, \dots, k$ στο a με την $f \in C^k(I)$.

Αν $f \in C^k(I)$, το $P_k(x)$ είναι επίσης το μοναδικό πολυώνυμο βαθμού $\leq k$

τ.ω $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - P_k(x)}{(x-a)^k} = 0.$

γ) Αν $k=1$, η σχέση (2) εκφράζει την παραγωγισιμότητα της f στο a :

$$\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f(x) - f(a)}{x-a} - f'(a) \right) = 0 \Leftrightarrow f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + (x-a)\varepsilon(x) \text{ με } \varepsilon(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} 0$$

Δηλαδή, η f προσεγγίζεται από μία αλφινική συνάρτηση. Τα θεωρήματα του Taylor δίνουν καλύτερη προσέγγιση μέσω πολυωνύμου βαθμού K όταν η f είναι K φορές παραγωγίσιμη.

(2) Για συναρτήσεις δύο μεταβλητών

Θεώρημα: Έστω $f: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, κλάσεως C^{K+1} ($K \geq 0$) και ανοιχτό

έστω $\vec{a} = (a_1, a_2) \in U$ φιξαρωμένο. Τότε για κάθε $\vec{x} = (x_1, x_2) \in U$ τ.ω. το ευθύγραμμο τμήμα $[\vec{a}, \vec{x}] \subset U$, ισχύει θέτοντας $\vec{h} = (h_1, h_2) = \vec{x} - \vec{a}$:

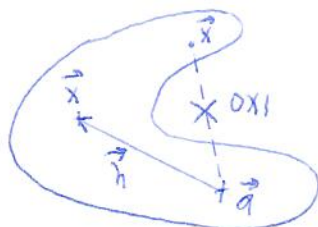
$$f(\vec{x}) = f(\vec{a} + \vec{h})$$

$$(3) \quad \begin{aligned} &= f(\vec{a}) + \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{a}) h_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(\vec{a}) h_2 \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(\vec{a}) h_1^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(\vec{a}) h_1 h_2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(\vec{a}) h_2^2 \right) \\ &\quad \dots + \frac{1}{K!} \left(\sum_{i=0}^K \binom{K}{i} \frac{\partial^K f}{\partial x_1^i \partial x_2^{K-i}}(\vec{a}) h_1^i h_2^{K-i} \right) + R_K(x_1, x_2) \end{aligned}$$

$\uparrow$ πολυώνυμο Taylor K -βαθμού $\uparrow$ $\binom{K}{i} = \frac{K!}{i!(K-i)!}$ $\uparrow$ υπόλοιπο Taylor

όπου $R_K(x_1, x_2) = \int_0^1 \frac{(1-u)^K}{K!} \left[\sum_{i=0}^{K+1} \binom{K+1}{i} \frac{\partial^{K+1} f}{\partial x_1^i \partial x_2^{K+1-i}}(\vec{a} + u\vec{h}) h_1^i h_2^{K+1-i} \right] du$

Παρατήρηση:



Απ: Αναγώγουμε στο Θεώρημα του Taylor για συναρτήσεις μιας μεταβλητής

Εφαρμόζουμε τον τύπο (1) στη συνάρτηση $\varphi: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ στο σημείο $t=0$.

$$t \mapsto f(\vec{a} + t\vec{h})$$

Έχουμε $\varphi(0) = f(\vec{a})$, $\varphi(1) = f(\vec{a} + \vec{h}) = f(\vec{x})$ και

$$\varphi'(t) = \nabla f(\vec{a} + t\vec{h}) \cdot \vec{h} = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{a} + t\vec{h}) h_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(\vec{a} + t\vec{h}) h_2$$

$$\text{άρα } \varphi'(0) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{a}) h_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(\vec{a}) h_2.$$

Ομοίως:

$$\varphi''(t) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(\vec{a} + t\vec{h}) h_1^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(\vec{a} + t\vec{h}) h_1 h_2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(\vec{a} + t\vec{h}) h_1 h_2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(\vec{a} + t\vec{h}) h_2^2$$

$$\text{άρα } \varphi''(0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(\vec{a}) h_1^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(\vec{a}) h_1 h_2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(\vec{a}) h_2^2$$

Ενδιαφέρον βρίσκουμε

$$\varphi^{(k)}(t) = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} \frac{\partial^k f}{\partial x_1^i \partial x_2^{k-i}}(\vec{a} + t\vec{h}) h_1^i h_2^{k-i}$$

$$\varphi^{(k)}(0) = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} \frac{\partial^k f}{\partial x_1^i \partial x_2^{k-i}}(\vec{a}) h_1^i h_2^{k-i}$$

Σύμφωνα με τον τύπο (1) ισχύει

$$\varphi(1) = \varphi(0) + \varphi'(0) \cdot 1 + \frac{\varphi''(0)}{2!} 1^2 + \dots + \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!} 1^k + \int_0^1 \frac{(1-u)^k}{k!} \varphi^{(k+1)}(u) du$$

που είναι ο τύπος (3) $\square$

Πρόταση: Έστω $f = U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, κατ'εξέχρησιν C^k ($k \geq 0$) και έστω $\vec{a} \in U$.
ανοικτό

$$\text{Τότε } \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} \frac{f(\vec{x}) - P_k(\vec{x})}{\|\vec{x} - \vec{a}\|^k} = 0 \quad (4)$$

Απ: Επειδή $f \in C^k(U)$ ισχύει

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \|\vec{h}\| < \delta \Rightarrow \left| \frac{\partial^k f}{\partial x_1^i \partial x_2^{k-i}}(\vec{a} + \vec{h}) - \frac{\partial^k f}{\partial x_1^i \partial x_2^{k-i}}(\vec{a}) \right| < \varepsilon$$

$$\forall i = 0, 1, \dots, k.$$

Γράφουμε τύπος (3) για $f \in C^k(U)$: $f(\vec{x}) - P_{k-1}(\vec{x}) = R_{k-1}(\vec{x})$

$$f(\vec{x}) - P_k(\vec{x}) = \int_0^1 \frac{(1-u)^{k-1}}{(k-1)!} \left[\sum_{i=0}^k \binom{k}{i} \frac{\partial^k f}{\partial x_1^i \partial x_2^{k-i}} (\vec{\alpha} + u\vec{h}) h_1^i h_2^{k-i} \right] du - \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} \frac{\partial^k f}{\partial x_1^i \partial x_2^{k-i}} (\vec{\alpha}) h_1^i h_2^{k-i}$$

Επειδή $\int_0^1 \frac{(1-u)^{k-1}}{(k-1)!} du = \frac{1}{k!}$

$$= \int_0^1 \frac{(1-u)^{k-1}}{(k-1)!} \left[\sum_{i=0}^k \binom{k}{i} \left(\frac{\partial^k f}{\partial x_1^i \partial x_2^{k-i}} (\vec{\alpha} + u\vec{h}) - \frac{\partial^k f}{\partial x_1^i \partial x_2^{k-i}} (\vec{\alpha}) \right) h_1^i h_2^{k-i} \right] du$$

| — u — | ≤ ε όταν $\|\vec{h}\| < \delta$

Άρα, όταν $\|\vec{h}\| < \delta$ έχουμε

$$|f(\vec{x}) - P_k(\vec{x})| \leq \int_0^1 \frac{(1-u)^{k-1}}{(k-1)!} \left[\sum_{i=0}^k \binom{k}{i} \varepsilon |h_1|^i |h_2|^{k-i} \right] du \leq \underbrace{\left(\int_0^1 \frac{(1-u)^{k-1}}{(k-1)!} du \right) \left(\sum_{i=0}^k \binom{k}{i} \right)}_{\frac{2^k}{k!}} \varepsilon \|\vec{h}\|^k$$

$$\Rightarrow \frac{|f(\vec{x}) - P_k(\vec{x})|}{\|\vec{x} - \vec{\alpha}\|^k} \leq \frac{2^k}{k!} \varepsilon \quad \text{που είναι το ζητούμενο}$$

□

Σχόλιο: Το πολυώνυμο του Taylor $P_k(x_1, x_2)$ είναι

- το μοναδικό πολυώνυμο βαθμού $\leq k$ που έχει ίδια τιμή στο $\vec{\alpha}$ με την f και ίδιες παραγώγους τάξης $1, 2, \dots, k$ στο $\vec{\alpha}$ με την $f \in C^k(U)$ (βλ. Ασκ 1)
- το μοναδικό πολυώνυμο βαθμού $\leq k$ που ικανοποιεί την σχέση (4) όταν $f \in C^k(U)$ (βλ. Ασκ 2)

Παράδειγμα: Ανάπτυγμα Taylor της $f(x_1, x_2) = x_2^2 \ln x_1$ στο $(e, 1)$ μέχρι όρων

δευτέρης τάξης. Έχουμε $f \in C^\infty(\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 > 0\})$. Υπολογίζουμε

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2) = \frac{x_2^2}{x_1}, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2) = 2x_2 \ln x_1, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x_1, x_2) = -\frac{x_2^2}{x_1^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x_1, x_2) = \frac{2x_2}{x_1}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(x_1, x_2) = 2 \ln x_1. \quad \text{Άρα } f(e, 1) = 1, \quad \frac{\partial f}{\partial x_1}(e, 1) = e^{-1}, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2}(e, 1) = 2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(e, 1) = -e^{-2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(e, 1) = 2e^{-1}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(e, 1) = 2 \quad \text{και το πολυώνυμο Taylor δεύτερου βαθμού είναι}$$

$$P_2(x_1, x_2) = 1 + e^{-1}(x_1 - e) + 2(x_2 - 1) - \frac{e^{-2}}{2}(x_1 - e)^2 + 2e^{-1}(x_1 - e)(x_2 - 1) + (x_2 - 1)^2$$

Σχόλιο: Όταν η $f = U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ είναι διαφορίσιμη στο $\vec{a} \in U$
 $\vec{a} = (a_1, a_2)$

η αλγεβρική συνάρτηση $P_1(x_1, x_2) = f(\vec{a}) + \frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{a})(x_1 - a_1) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(\vec{a})(x_2 - a_2)$

(= πολώνυμο Taylor πρώτου βαθμού) δίνει μια προσέγγιση της f

κοντά στο $\vec{a}$. Όταν $f \in C^k(U)$ με $k \geq 2$ το πολώνυμο

Taylor $P_k(x_1, x_2)$ προσεγγίζει ακόμα καλύτερα την f σε μια

γειτονιά του $\vec{a}$.

③ Για συναρτήσεις η μεταβλητών

Έστω $f = U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, κλάσεως C^2 . Το (πρώτο) διαφορικό της f ανήκει

$$\text{όσο } \vec{a} \in U \text{ είναι η γραμμική συνάρτηση } Df(\vec{a}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \\ \vec{h} \mapsto \nabla f(\vec{a}) \cdot \vec{h}$$

Παρεμφερίστως ως προς $x_1, \dots, x_n$ τις συνιστώσες του $\nabla f(\vec{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{x}) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{x}) \end{pmatrix}$

εξημετίζουμε τον $n \times n$ συμμετρικό πίνακα:

$$H_f(\vec{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(\vec{x}) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(\vec{x}) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(\vec{x}) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(\vec{x}) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(\vec{x}) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n}(\vec{x}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(\vec{x}) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n}(\vec{x}) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(\vec{x}) \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{που λέγεται Hessian} \\ \text{Εξισώνος πίνακας της } f. \end{array}$$

Def: Το δεύτερο διαφορικό της f στο $\vec{a} \in U$ είναι η τετραγωνική μορφή

$$D^2f(\vec{a}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \\ \vec{h} \mapsto D^2f(\vec{a})\vec{h} = \vec{h} \cdot \overset{\text{εξ. γινόμενο}}{\underbrace{(H_f(\vec{a}) \vec{h})}} \\ \begin{array}{ccc} \uparrow & & \uparrow \\ \mathbb{R}^n & & \mathbb{R}^n \end{array}$$

$Q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ τετραγωνική μορφή σημαίνει ότι $Q(\lambda \vec{h}) = \lambda^2 Q(\vec{h})$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall \vec{h} \in \mathbb{R}^n$

Αντικατάστασε έχουμε $D^2f(\vec{a})\vec{h} = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\vec{a}) h_i h_j$ και ειδικότερα

$$\text{όταν } n=1 \quad \begin{array}{ccc} \uparrow & & \uparrow \\ \mathbb{R} & & \mathbb{R} \end{array} D^2f(\vec{a})\vec{h} = f''(a) h^2$$

$$\text{όταν } n=2 \quad \begin{array}{ccc} \uparrow & & \uparrow \\ \mathbb{R}^2 & & \mathbb{R}^2 \end{array} D^2f(\vec{a})\vec{h} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(\vec{a}) h_1^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(\vec{a}) h_1 h_2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(\vec{a}) h_2^2$$

$$\text{όταν } n=3 \quad \begin{array}{ccc} \uparrow & & \uparrow \\ \mathbb{R}^3 & & \mathbb{R}^3 \end{array} D^2f(\vec{a})\vec{h} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(\vec{a}) h_1^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(\vec{a}) h_2^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2}(\vec{a}) h_3^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(\vec{a}) h_1 h_2 \\ + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3}(\vec{a}) h_1 h_3 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3}(\vec{a}) h_2 h_3$$

Παράδειγμα: Θα υπολογίσουμε το δεύτερο διαφορικό της $f(x_1, x_2) = \sin x_1 \cdot \cos x_2$ στα σημεία $\vec{a} = (\frac{\pi}{2}, 0)$, $\vec{b} = (-\frac{\pi}{2}, 0)$ και $\vec{c} = (0, \frac{\pi}{2})$. Υπολογίζουμε πρώτα

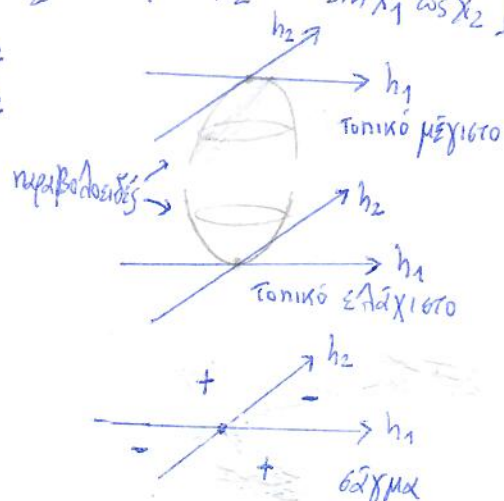
$$\nabla f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} \cos x_1 \cos x_2 \\ -\sin x_1 \sin x_2 \end{pmatrix} \text{ και } H_f(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} -\sin x_1 \cos x_2 & -\cos x_1 \sin x_2 \\ -\cos x_1 \sin x_2 & -\sin x_1 \cos x_2 \end{bmatrix}$$

Επομένως $\nabla f(\vec{a}) = \nabla f(\vec{b}) = \nabla f(\vec{c}) = \vec{0}$, ενώ

$$\bullet H_f(\vec{a}) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \text{ και } D^2 f(\vec{a}) \vec{h} = -h_1^2 - h_2^2$$

$$\bullet H_f(\vec{b}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ και } D^2 f(\vec{b}) \vec{h} = h_1^2 + h_2^2$$

$$\bullet H_f(\vec{c}) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \text{ και } D^2 f(\vec{c}) \vec{h} = -2h_1 h_2$$



Γεωμετρική ερμηνεία θέτοντας $\varphi(t) = f(\vec{a} + t\vec{h})$ με $\vec{a} \in U$ και $\vec{h} \in \mathbb{R}^n$

έχουμε $\varphi'(0) = \frac{\partial f}{\partial \vec{h}}(\vec{a}) = \nabla f(\vec{a}) \cdot \vec{h}$ και είδαμε στην Απ του τύπου (3)

ότι ισχύει $\boxed{\varphi''(0) = D^2 f(\vec{a}) \vec{h}}$

Με τη βοήθεια του δεύτερου διαφορικού το Πρόβλημα του Θεωρήματος Taylor διατυπώνεται για συναρτήσεις η μεταβλητών ως εξής (όταν $n=2$):

Πρόβλημα: Έστω $f \in C^2(U)$ με $U \subset \mathbb{R}^n$ ανοιχτό και έστω $\vec{a} \in U$. Τότε

$$(5) \quad \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} \frac{f(\vec{x}) - f(\vec{a}) - \nabla f(\vec{a}) \cdot (\vec{x} - \vec{a}) - \frac{1}{2} D^2 f(\vec{a}) (\vec{x} - \vec{a})^2}{\|\vec{x} - \vec{a}\|^2} = 0 \quad (5)$$

④ Αναγκαίες συνθήκες για την ύπαρξη ακροτάτων

Ορ: Έστω $f: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Η f έχει τοπικό μέγιστο στο $\vec{a} \in U$

αν $\exists \varepsilon > 0$ τ.ω. $\vec{x} \in U$ και $\|\vec{x} - \vec{a}\| < \varepsilon \Rightarrow f(\vec{x}) \leq f(\vec{a})$

Η f έχει ολικό μέγιστο στο $\vec{a} \in U$ αν $\vec{x} \in U \Rightarrow f(\vec{x}) \leq f(\vec{a})$.

Ανάλογα ορίζεται το τοπικό / ολικό ελάχιστο

Ακρότατο σημαίνει μέγιστο ή ελάχιστο.

Πρόταση: Έστω $f: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, κλάσης C^1 . Τότε αν το $\vec{a} \in U$ είναι τοπικό ακρότατο της f , ισχύει $\nabla f(\vec{a}) = \vec{0}$

Απ: Θεωρούμε τον περιορισμό της f στις ευθείες που διέρχονται από το $\vec{a}$ και έχω κατεύθυνση $\vec{e}_i$: $\varphi_i: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}$
 $t \mapsto f(\vec{a} + t\vec{e}_i)$. Αφού η f έχει

τοπικό ακρότατο στο $\vec{a}$, οι συναρτήσεις φ_i έχουν επίσης τοπικό ακρότατο για $t=0$. Άρα $\varphi_i'(0) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{a}) = 0, \forall i=1, \dots, n \Rightarrow \nabla f(\vec{a}) = \vec{0}$ $\square$

Ορ: Έστω $f: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, κλάσης C^1 . Τα κρίσιμα σημεία της f είναι τα σημεία $\vec{a} \in U$ όπου $\nabla f(\vec{a}) = \vec{0}$ [Σύμφωνα με την προηγούμενη πρόταση τα κρίσιμα σημεία είναι οι πιθανές θέσεις των τοπικών ακροτών].

Ορ: Τα κρίσιμα σημεία που δεν είναι τοπικά ακρότατα λέγονται ελαχματικά σημεία

[Με άλλα λόγια: $\vec{b} \in U$ ελαχματικό σημείο της $f \Leftrightarrow \begin{cases} \nabla f(\vec{b}) = \vec{0} \\ \bullet \text{ Σε κάθε γειτονιά } \overbrace{B(\vec{b}, \varepsilon)}^{\text{του } \vec{b}} \\ \exists \vec{x}_1, \vec{x}_2 \in B(\vec{b}, \varepsilon) \text{ τέω } f(\vec{x}_1) < f(\vec{b}) < f(\vec{x}_2) \end{cases}$]

Παράδειγμα: Θα βρούμε τα κρίσιμα σημεία της $f(x_1, x_2) = (x_1^2 - 1)^2 - x_2^2 = x_1^4 - 2x_1^2 + 1 - x_2^2$

Έχουμε $\nabla f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 4x_1(x_1^2 - 1) \\ -2x_2 \end{pmatrix} = \vec{0} \Leftrightarrow (x_1, x_2) = (0, 0) \text{ ή } (x_1, x_2) = (\pm 1, 0)$

Η f έχει λοιπόν αυτά τα τρία κρίσιμα σημεία.

• Το $(0,0)$ είναι τοπικό μέγιστο. Πράγματι $f(0,0)=1$ και για $|x_1| \leq 1$ ισχύει $x_1^4 \leq x_1^2 \Rightarrow x_1^4 - 2x_1^2 + 1 - x_2^2 = f(x_1, x_2) \leq 1 = f(0,0)$

• Το σημείο $(1,0)$ είναι ελκυσματικό. Πράγματι, ο περιορισμός της f στον άξονα των x_1 : $x_1 \mapsto f(x_1, 0) = (x_1^2 - 1)^2$ έχει ολικό ελάχιστο για $x_1 = 1$ ενώ ο περιορισμός της f στην ευθεία $x_1 = 1$: $x_2 \mapsto f(1, x_2) = -x_2^2$ έχει ολικό μέγιστο για $x_2 = 0$. Βλέπουμε λοιπόν ότι
 $\forall \varepsilon > 0 \exists \alpha \in (0, \varepsilon)$ τ.ω. $f(1, \alpha) < f(1, 0) = 0 < f(\beta, 0)$
 $\exists \beta \in (1, 1+\varepsilon)$

• Ομοίως το σημείο $(-1, 0)$ είναι ελκυσματικό.

Πρόταση: Έστω $f: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, καλώς C^2 . Τότε αν το $\vec{a} \in U$ είναι

- τοπικό μέγιστο της f , ισχύει $D^2f(\vec{a})h \leq 0$, $\forall h \in \mathbb{R}^n$
- " ελάχιστο " " , " $D^2f(\vec{a})h \geq 0$, $\forall h \in \mathbb{R}^n$

Απ: Εξετάζουμε την περίπτωση που η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο [η ανάλογη περίπτωση είναι ανάλογη]. Για κάθε $\vec{h} \in \mathbb{R}^n$ θεωρούμε τη συνάρτηση $\varphi_{\vec{h}}: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}$ που παρουσιάζει τοπικό μέγιστο για $t=0$. Άρα ισχύει $t \mapsto f(\vec{a} + t\vec{h})$
 $\varphi_{\vec{h}}'(0) = 0$ και $\varphi_{\vec{h}}''(0) = D^2f(\vec{a})\vec{h} \leq 0$.

⑤ Ικανές συνθήκες για την ύπαρξη ακροτάτων

Άλγεβρα: Ο $n \times n$ Εσσειανός πίνακας $H_f(\vec{a})$ είναι συμμετρικός, άρα έχει μία ορθοκανονική βάση $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n)$ ιδιοδιανυσμάτων:

$\uparrow$
 $\mathbb{R}^n$

$\uparrow$
 $\mathbb{R}^n$

• $H_f(\vec{a}) \vec{v}_i = \underset{\substack{\uparrow \\ \mathbb{R}}}{\lambda_i} \vec{v}_i$, $\|\vec{v}_i\| = 1$, $\forall i = 1, 2, \dots, n$, $\vec{v}_i \cdot \vec{v}_j = 0$ για $i \neq j$

Πρόταση: Έστω $f: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, κλάσεως C^2 , έστω $\vec{a} \in U$ και $H_f(\vec{a})$

ο Εξάκωτος πίνακας της f στο $\vec{a}$. Τότε

- (i) αν $\nabla f(\vec{a}) = \vec{0}$ και οι ιδιοτιμές του $H_f(\vec{a})$ είναι όλες > 0 , η f έχει τοπικό ελάχιστο στο $\vec{a}$
 (ii) " $\nabla f(\vec{a}) = \vec{0}$ " " " " " " " " < 0 , " " " τοπικό μέγιστο στο $\vec{a}$.
 (iii) " $\nabla f(\vec{a}) = \vec{0}$ και ο $H_f(\vec{a})$ έχει μία ιδιοτιμή > 0 καθώς και μία ιδιοτιμή < 0 } , η f έχει σέγμα στο $\vec{a}$.

Απ (i) Από τον τύπο (5) έπεται ότι για $\vec{h} \in \mathbb{R}^n$ με $\|\vec{h}\|$ αρκετά μικρό, ισχύει:

$$f(\vec{a} + \vec{h}) = f(\vec{a}) + \nabla f(\vec{a}) \cdot \vec{h} + \frac{1}{2} \vec{h} \cdot (H_f(\vec{a}) \vec{h}) + \|\vec{h}\|^2 \varepsilon(\vec{h}) \text{ με } \lim_{\vec{h} \rightarrow \vec{0}} \varepsilon(\vec{h}) = 0$$

Γράφουμε $\vec{h} = \alpha_1 \vec{v}_1 + \dots + \alpha_n \vec{v}_n$ στην ορθοκανονική βάση $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n)$ ιδιοδιανυσμάτων του $H_f(\vec{a})$ και παρατηρούμε ότι

• $\|\vec{h}\|^2 = \alpha_1^2 + \dots + \alpha_n^2$

• $H_f(\vec{a}) \vec{h} = \alpha_1 \lambda_1 \vec{v}_1 + \dots + \alpha_n \lambda_n \vec{v}_n$ (όπου $\lambda_i =$ ιδιοτιμή του $H_f(\vec{a})$ για το ιδιοδιάνυσμα $\vec{v}_i$)

• $\vec{h} \cdot (H_f(\vec{a}) \vec{h}) = \alpha_1^2 \lambda_1 + \dots + \alpha_n^2 \lambda_n \geq \Lambda (\alpha_1^2 + \dots + \alpha_n^2) = \Lambda \|\vec{h}\|^2$ όπου $\Lambda = \min_{i=1, \dots, n} \lambda_i > 0$.

Επομένως, για $\|\vec{h}\| < \delta$ αρκετά μικρό έχουμε $|\varepsilon(\vec{h})| \leq \frac{\Lambda}{4}$ και

$$f(\vec{a} + \vec{h}) \geq f(\vec{a}) + \frac{\Lambda}{2} \|\vec{h}\|^2 + \|\vec{h}\|^2 \varepsilon(\vec{h}) \geq f(\vec{a}) + \frac{\Lambda}{4} \|\vec{h}\|^2 \geq f(\vec{a})$$

$\Rightarrow$ η f έχει τοπικό ελάχιστο στο $\vec{a}$.

Η περίπτωση (ii) αποδεικνύεται ανάλογα

(iii) Αν $\nabla^2 H_f(\vec{a})$ έχει μία ιδιοτιμή > 0 καθώς και μία ιδιοτιμή < 0 ,
 τότε δεν ισχύει ούτε $D^2 f(\vec{a}) \vec{h} \leq 0, \forall \vec{h} \in \mathbb{R}^n$
 ούτε $D^2 f(\vec{a}) \vec{h} \geq 0, \forall \vec{h} \in \mathbb{R}^n$

Άρα το $\vec{a}$ δεν είναι ούτε τοπικό μέγιστο ούτε τοπικό ελάχιστο. Είναι λοιπόν
 βγαλματικό σημείο.

Εφαρμογές: 1) Στο παράδειγμα της §(3) μελετήσαμε τα κρίσιμα σημεία

$\vec{a} = (\frac{\pi}{2}, 0)$, $\vec{b} = (-\frac{\pi}{2}, 0)$ και $\vec{c} = (0, \frac{\pi}{2})$ της $f(x_1, x_2) = \sin x_1 \cdot \cos x_2$.

Εφαρμόζοντας την προηγούμενη Πρόταση, βλέπουμε ότι η f έχει

• τοπικό μέγιστο στο $\vec{a}$ διότι οι ιδιοτιμές του $H_f(\vec{a}) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ είναι < 0 .

• " ελάχιστο στο $\vec{b}$ " " " " $H_f(\vec{b}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ " > 0

• άγχμα στο $\vec{c}$ διότι οι ιδιοτιμές του $H_f(\vec{c}) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ είναι 1 και -1.

2) Στο παράδειγμα της §(4) μελετήσαμε τα κρίσιμα σημεία $\vec{a} = \vec{0}$, $\vec{b} = (1, 0)$

και $\vec{c} = (-1, 0)$ της $f(x_1, x_2) = (x_1^2 - 1)^2 - x_2^2$. Έχουμε $\nabla f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 4x_1^3 - 4x_1 \\ -2x_2 \end{pmatrix}$

και $H_f(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} 12x_1^2 - 4 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$. Εφαρμόζοντας την προηγούμενη Πρόταση

βρίσκουμε πάλι ότι η f έχει

• τοπικό μέγιστο στο $\vec{a} = \vec{0}$; διότι οι ιδιοτιμές του $H_f(\vec{0}) = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$ είναι < 0

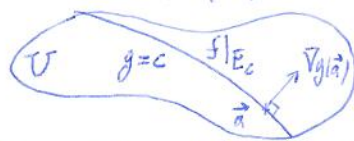
• άγχμα στο $\vec{b} = (1, 0)$, διότι οι ιδιοτιμές του $H_f(1, 0) = \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$ είναι 8 και -2.

⑥ Ακρότητα υπό ένοψη (Μέθοδος των πολλαπλασιαστών του Lagrange)

Πρόβλημα: Έστω $f, g: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, κλάσεως C^1 . Θεωρούμε
 συνιστώ

το σύνολο στάθμης της g με τιμή $c \in \mathbb{R}$: $E_c = \{ \vec{x} \in U : g(\vec{x}) = c \}$

και θέλουμε να βρούμε τα ακρότατα του περιορισμού της f στο E_c που συμβολίζεται με $f|_{E_c}$.



Θεώρημα : Έστω $f, g : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, κλάσεως C^1 και έστω $\vec{a} \in U$

τ.ω. $g(\vec{a}) = c$ και $\nabla g(\vec{a}) \neq \vec{0}$. Τότε αν η $f|_{E_c}$ (ο περιορισμός της f στο E_c) έχει τοπικό ακρότατο στο $\vec{a}$, ισχύει $\nabla f(\vec{a}) = \lambda \nabla g(\vec{a})$ για κάποιο $\lambda \in \mathbb{R}$. (δηλαδή $\nabla f(\vec{a}) \parallel \nabla g(\vec{a})$). [Το $\lambda \in \mathbb{R}$ λέγεται πολλαπλασιαστής του Lagrange].

Απ (όταν $n=2$) : Εξ' υποθέσεως $\nabla g(\vec{a}) \neq \vec{0}$ και χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι ισχύει $\frac{\partial g}{\partial x_2}(\vec{a}) \neq 0$. Από το θεώρημα πεπλεγμένης συνάρτησης έπεται ότι σε μία γειτονιά του $\vec{a} = (a_1, a_2)$ έχουμε

$$g(x_1, x_2) = c \Leftrightarrow x_2 = \varphi(x_1) \text{ με } \varphi = [a_1 - \varepsilon, a_1 + \varepsilon] \xrightarrow{C^1} \mathbb{R} \text{ και } \varphi(a_1) = a_2.$$

Επομένως $g(x_1, \varphi(x_1)) = c$, $\forall x_1 \in [a_1 - \varepsilon, a_1 + \varepsilon]$ και παραγωγίζοντας βρίσκουμε

$$\frac{\partial g}{\partial x_1}(x_1, \varphi(x_1)) + \frac{\partial g}{\partial x_2}(x_1, \varphi(x_1)) \varphi'(x_1) = 0. \text{ Ειδικότερα, για } x_1 = a_1, \text{ έχουμε}$$

$$\frac{\partial g}{\partial x_1}(\vec{a}) + \frac{\partial g}{\partial x_2}(\vec{a}) \varphi'(a_1) = 0 \Leftrightarrow \nabla g(\vec{a}) \perp \begin{pmatrix} 1 \\ \varphi'(a_1) \end{pmatrix}$$

Εξ' υποθέσεως η $f|_{E_c}$ έχει τοπικό ακρότατο στο $\vec{a}$, άρα η συνάρτηση

$x_1 \mapsto f(x_1, \varphi(x_1))$ έχει τοπικό ακρότατο για $x_1 = a_1$. Συνεπώς ότι

$$\left. \frac{d}{dx_1} f(x_1, \varphi(x_1)) \right|_{x_1=a_1} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{a}) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(\vec{a}) \cdot \varphi'(a_1) = 0 \Leftrightarrow \nabla f(\vec{a}) \perp \begin{pmatrix} 1 \\ \varphi'(a_1) \end{pmatrix}$$

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι $\nabla f(\vec{a}) \parallel \nabla g(\vec{a})$ δηλαδή $\nabla f(\vec{a}) = \lambda \nabla g(\vec{a})$ για κάποιο $\lambda \in \mathbb{R}$

Παράδειγμα : Θα προσδιορίσουμε τα ακρότατα του περιορισμού της

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_3 \text{ στη μοναδιαία σφαίρα } \Sigma = \{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 : g(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1 \}$$

Έχουμε $f, g \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$ και $\nabla f(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

ενώ $\nabla g(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \\ 2x_3 \end{pmatrix} \neq \vec{0} \Leftrightarrow \vec{x} \neq \vec{0}$.

Επειδή η σφαίρα Σ είναι συμπαγής και $f \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$, γνωρίζουμε ότι

η $f|_\Sigma$ λαμβάνει το μέγιστό της σε ένα σημείο $\vec{a} \in \Sigma$ και το ελάχιστό της σε ένα σημείο $\vec{b} \in \Sigma$.

Γνωρίζουμε επίσης ότι οι πιθανές θέσεις των ακροτών της $f|_\Sigma$ είναι

τα σημεία $\vec{x} \in \Sigma$ όπου $\nabla f(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \parallel \nabla g(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \\ 2x_3 \end{pmatrix}$.

Λύνοντας τις εξισώσεις
$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1 \\ 1 = 2\lambda x_1 \\ 0 = 2\lambda x_2 \\ 1 = 2\lambda x_3 \end{cases} \text{ για κάποιο } \lambda \in \mathbb{R}$$
 βρίσκουμε ότι:

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1 \\ x_1 = x_3 \\ x_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \vec{x} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \vee \vec{x} = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 0 \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Υπολογίζοντας $f(1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2}) = \sqrt{2}$ και $f(-1/\sqrt{2}, 0, -1/\sqrt{2}) = -\sqrt{2}$

συμπεραίνουμε ότι η $f|_\Sigma$ έχει το μέγιστο στο $(1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2})$ και

το ελάχιστο στο $(-1/\sqrt{2}, 0, -1/\sqrt{2})$.