

ΚΕΦ 5 : ΔΙΠΛΑ ΚΑΙ ΤΡΙΠΛΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ

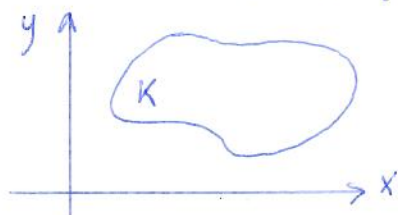
① Εισαγωγή

1854 : Ορισμός του ολοκληρώματος με τα αθροίσματα Riemann (ΑΠΕΙ 1-3)

1902 : Σύγχρονη θεωρία μέτρου και ολοκλήρωσης του Lebesgue

(→ Μάθημα 511 Θεωρία μέτρου)

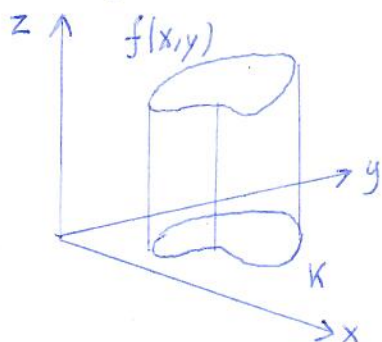
Πρόβλημα



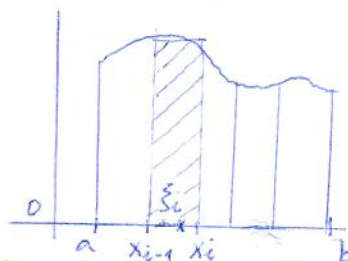
$K \subset \mathbb{R}^2$ συμπαγές

$f: K \rightarrow \mathbb{R}$ φραγμένη

- Θέλουμε να ορίσουμε το ολοκλήρωμα $\iint_K f(x,y) dx dy$. Αν $f \geq 0$, ο ορισμός πρέπει να είναι τέτοιος ώστε



$$\iint_K f(x,y) dx dy = \text{όγκος} \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \begin{array}{l} (x,y) \in K \\ 0 \leq z \leq f(x,y) \end{array} \right\}$$

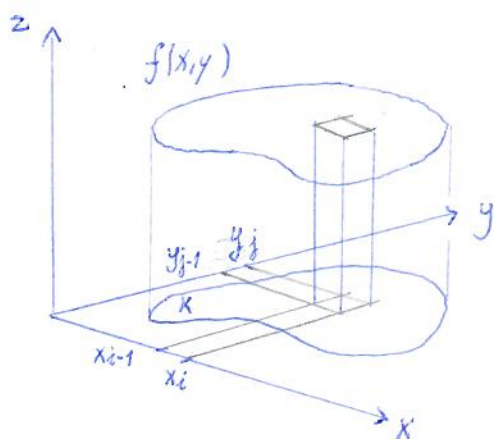


$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$$

$$\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$$

- Όταν $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$, έχουμε $\int_a^b f(x) dx = \lim_{K \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^K f(\xi_i) \Delta x_i$

- Ανάλογα, όταν $f: K \rightarrow \mathbb{R}$, $K \subset \mathbb{R}^2$



$$\iint_K f(x,y) dx dy = \lim_{K \rightarrow \infty} \sum_{i,j} f(\vec{\xi}_{ij}) \Delta x_i \Delta y_j$$

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}, \Delta y_j = y_j - y_{j-1}$$

$$\vec{\xi}_{ij} \in [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$$

② Το διπλό ολοκλήρωμα επί ορθογωνίου

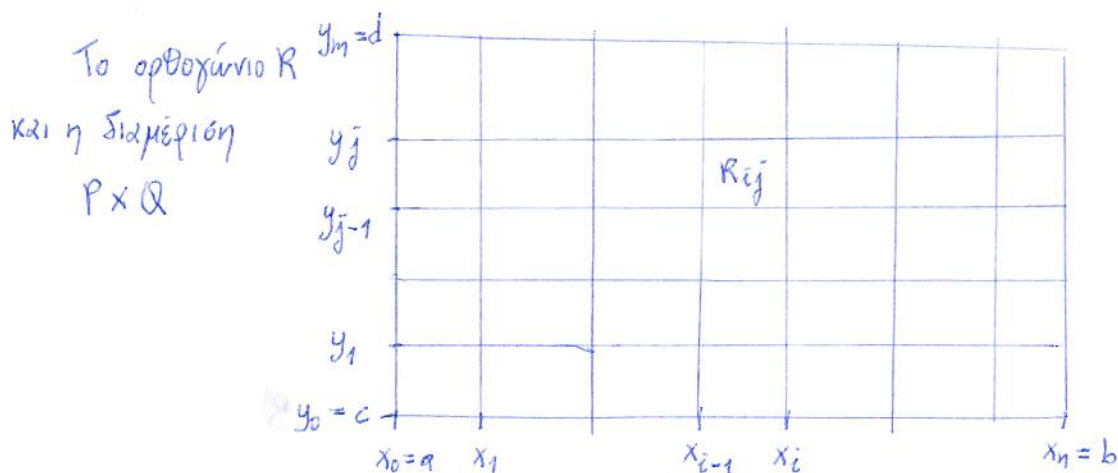
- Έστω $R = [a, b] \times [c, d]$ και $f: R \rightarrow \mathbb{R}$ φραγμένη.
- Έστω $P = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$ και $Q = \{c = y_0 < y_1 < \dots < y_m = d\}$ διαμερίσεις των $[a, b]$ και $[c, d]$. Το σύνολο

$$P \times Q = \left\{ \underbrace{[x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]}_{R_{ij}} \mid \substack{i=1, \dots, n \\ j=1, \dots, m} \right\} \text{ ονομάζεται}$$

διαμέριση του R που αντιστοιχεί στις διαμερίσεις P, Q .

- Ονομάζουμε λεπτότητα της διαμέρισης $P \times Q$ τον αριθμό

$$\|P \times Q\| = \max \left\{ \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_j - y_{j-1})^2} : \substack{i=1, \dots, n \\ j=1, \dots, m} \right\}$$



- Θέτουμε $m_{ij} = \inf_{R_{ij}} f$, $M_{ij} = \sup_{R_{ij}} f$ και

$$L(f, P \times Q) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m m_{ij} (x_i - x_{i-1}) (y_j - y_{j-1}) \quad (\text{κάτω άθροισμα})$$

$$U(f, P \times Q) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m M_{ij} (x_i - x_{i-1}) (y_j - y_{j-1}) \quad (\text{άνω άθροισμα})$$

- Έπειτα ορίσουμε το κάτω / άνω ολοκλήρωμα της f στο R :

$$\underline{\int\int}_R f(x,y) dx dy = \sup \{ L(f, P \times Q) : P \times Q \text{ διαμέριση του } R \}$$

$$\overline{\int\int}_R f(x,y) dx dy = \inf \{ U(f, P' \times Q') : P' \times Q' \text{ διαμέριση του } R \}$$

και παρατηρούμε ότι ισχύει $\underline{\int\int}_R f(x,y) dx dy \leq \overline{\int\int}_R f(x,y) dx dy$. Πράγματι,

$$\text{έχουμε } L(f, P \times Q) \leq L(f, (P \cup P') \times (Q \cup Q')) \leq U(f, (P \cup P') \times (Q \cup Q')) \leq U(f, P' \times Q')$$

[η διαμέριση $(P \cup P') \times (Q \cup Q')$ είναι μία εκλεπτυσμένη των διαμερίσεων $P \times Q, P' \times Q'$]

- Def: Μία πραγματική συνάρτηση $f: R \rightarrow \mathbb{R}$ ονομάζεται ολοκληρώσιμη κατά Riemann αν ισχύει $\underline{\int\int}_R f(x,y) dx dy = \overline{\int\int}_R f(x,y) dx dy = I$. Στην περίπτωση αυτή, το ολοκλήρωμα $\int\int_R f(x,y) dx dy$ της f επί του R είναι η κοινή τιμή I του κάτω / άνω ολοκληρώματος

Θέωρημα 1: Έστω $f: R \rightarrow \mathbb{R}$ πραγματική. Αν η f είναι συνεχής στο R ή αν τα σημεία αδυνέχειας της f είναι μία πεπερασμένη ένωση γραμμικών συνεχών συνάρτησεων, τότε η f είναι ολοκληρώσιμη στο R .

Απ: παραλείπεται

σημεία αδυνέχειας της $f \rightarrow$



Θέωρημα 2: Έστω $f: R \rightarrow \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη και έστω $(P_k \times Q_k)_{k \geq 1}$

$$P_k \times Q_k = \left\{ [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j] \begin{matrix} i=1, \dots, n_k \\ j=1, \dots, m_k \end{matrix} \right\} \text{ μία ακολουθία διαμερίσεων}$$

του R τ.ω. $\lim_{k \rightarrow \infty} \|P_k \times Q_k\| = 0$. Σχηματίζουμε για κάθε $k \geq 1$ το άθροισμα Riemann:

$$S_k = \sum_{i=1}^{n_k} \sum_{j=1}^{m_k} f(\vec{\xi}_{ij}) (x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}) \text{ όπου } \vec{\xi}_{ij} \in R_{ij} \text{ (αυθαίρετο σημείο του } R_{ij})$$

Τότε ισχύει $\lim_{k \rightarrow \infty} S_k = \int\int_R f(x,y) dx dy$.

Απ: παραλείπεται

Παράδειγμα: Έστω $f(x,y) = x \sin y$ και $R = [0,1] \times [0,\pi]$.

Η f είναι συνεχής και ολοκληρώσιμη στο R . Για $K \geq 1$, θεωρούμε τις

$$\text{διαμερίσεις } P_K \times Q_K = \left\{ \left[\frac{i-1}{K}, \frac{i}{K} \right] \times \left[\pi \frac{j-1}{K}, \pi \frac{j}{K} \right] \mid \begin{matrix} i=1, \dots, K \\ j=1, \dots, K \end{matrix} \right\} \text{ και}$$

επιλέγουμε $\vec{\xi}_{ij} = \left(\frac{i}{K}, \pi \frac{j}{K} \right) \in R_{ij}$. Προφανώς έχουμε $\lim_{K \rightarrow \infty} \|P_K \times Q_K\| = 0$,

$$\text{άρα ισχύει } S_K = \sum_{i,j=1}^K f(\vec{\xi}_{ij}) \frac{\pi}{K^2} = \frac{\pi}{K^3} \sum_{i,j=1}^K i \sin \left(\frac{\pi j}{K} \right) \xrightarrow{K \rightarrow \infty} \iint_{[0,1] \times [0,\pi]} x \sin y \, dx \, dy$$

Ο υπολογισμός διπλών ολοκληρωμάτων ανάγεται στον υπολογισμό απλών ολοκληρωμάτων χάρη στο

Θεώρημα του Fubini: Αν η $f: [a,b] \times [c,d] \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχής, τότε

$$\text{ισχύει } \iint_{[a,b] \times [c,d]} f(x,y) \, dx \, dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y) \, dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y) \, dx \right) dy$$

Σχόλια 1) Για $x \in [a,b]$ φεξιρισμένο, υπολογίζουμε πρώτα το

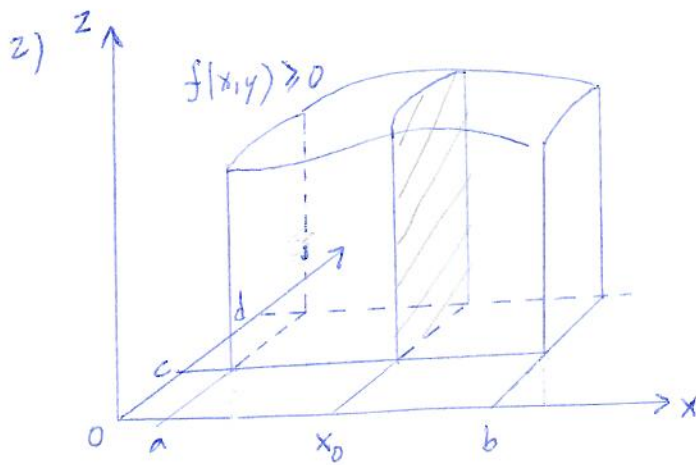
ολοκλήρωμα $F(x) = \int_c^d f(x,y) \, dy$ και έπειτα ολοκληρώνοντας τη

συνάρτηση $x \mapsto F(x)$ στο διάστημα $[a,b]$, βρίσκουμε το $\iint_{[a,b] \times [c,d]} f(x,y) \, dx \, dy$.

Ομοίως για $y \in [c,d]$ φεξιρισμένο, υπολογίζουμε πρώτα το ολοκλήρωμα

$G(y) = \int_a^b f(x,y) \, dx$ και έπειτα ολοκληρώνοντας τη συνάρτηση $y \mapsto G(y)$ στο

διάστημα $[c,d]$, βρίσκουμε το $\iint_{[a,b] \times [c,d]} f(x,y) \, dx \, dy = \int_c^d G(y) \, dy = \int_a^b F(x) \, dx$



Το $F(x_0)$ είναι το εμβαδόν της τομής του στερεού

$$\Sigma = \{(x, y, z) : x \in [a, b], y \in [c, d], 0 \leq z \leq f(x, y)\}$$

με το επίπεδο $x = x_0 \in [a, b]$

και έχουμε

$$\text{όγκος } \Sigma = \iint_{[a,b] \times [c,d]} f(x, y) dx dy = \int_a^b F(x) dx$$

Παράδειγμα : Για να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα $\iint_{[-1,1] \times [0,1]} (x^2 + y^2) dx dy$, μπορούμε
• είτε να ολοκληρώσουμε πρώτα ως προς x και μετά ως προς y :

$$\begin{aligned} \iint_{[-1,1] \times [0,1]} (x^2 + y^2) dx dy &= \int_0^1 \left(\int_{-1}^1 (x^2 + y^2) dx \right) dy = \int_0^1 \left(2y^2 + \frac{2}{3} \right) dy = \left[\frac{2y^3}{3} + \frac{2y}{3} \right]_{y=0}^{y=1} = \frac{4}{3} \\ &\quad \parallel \\ &\quad \left[\frac{x^3}{3} + y^2 x \right]_{x=-1}^{x=1} = \left(y^2 + \frac{1}{3} \right) - \left(-\frac{1}{3} - y^2 \right) \end{aligned}$$

• είτε να ολοκληρώσουμε πρώτα ως προς y και μετά ως προς x :

$$\begin{aligned} \iint_{[-1,1] \times [0,1]} (x^2 + y^2) dx dy &= \int_{-1}^1 \left(\int_0^1 (x^2 + y^2) dy \right) dx = \int_{-1}^1 \left(x^2 + \frac{1}{3} \right) dx = \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x}{3} \right]_{x=-1}^{x=1} = \frac{4}{3} \\ &\quad \parallel \\ &\quad \left[x^2 y + \frac{y^3}{3} \right]_{y=0}^{y=1} = x^2 + \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Απ (Θεώρημα Fubini) Η f είναι συνεχής, άρα ολοκληρώσιμη στο $\mathbb{R}$.

Για $k \geq 1$, θεωρούμε τις διαμερίξεις $P_k \times Q_k$ του R , με

$$P_k = \left\{ x_0 = a < x_1 = a + \frac{b-a}{k} < x_2 = a + \frac{2(b-a)}{k} < \dots < x_k = b \right\}$$

$$Q_k = \left\{ y_0 = c < y_1 = c + \frac{d-c}{k} < y_2 = c + \frac{2(d-c)}{k} < \dots < y_k = d \right\}$$

και επιλέγουμε $\vec{\xi}_{ij} = (a + i \frac{b-a}{K}, \zeta_{ij}) \in R_{ij}$ όπου το $\zeta_{ij} \in (y_{j-1}, y_j)$

είναι τ.ω
$$\underbrace{f(a + i \frac{b-a}{K}, \zeta_{ij}) \cdot (y_j - y_{j-1})}_{= f(\vec{\xi}_{ij}) \cdot \frac{d-c}{K}} = \int_{y_{j-1}}^{y_j} f(a + i \frac{b-a}{K}, y) dy \quad (\rightarrow \text{ΘΜΤ}).$$

Προφανώς έχουμε $\lim_{K \rightarrow \infty} \|P_K \times Q_K\| = 0$, άρα έπεται από το Θεώρημα 2 ότι

$$S_K = \sum_{i,j=1}^K f(\vec{\xi}_{ij}) \frac{(b-a)(d-c)}{K^2} \xrightarrow{K \rightarrow \infty} \iint_R f(x,y) dx dy$$

Έπειτα θέτουμε για κάθε $x \in [a,b]$ φ.ξ.α.ρίσμένο, $F(x) = \int_c^d f(x,y) dy$.

Από τις ιδιότητες του ολοκληρώματος Riemann για συναρτήσεις μιας μεταβλητής

προκύπτει ότι
$$\int_a^b F(x) dx = \lim_{K \rightarrow \infty} \frac{b-a}{K} \sum_{i=1}^K F(a + i \frac{b-a}{K}).$$
 Όμως έχουμε

$$F(a + i \frac{b-a}{K}) = \int_c^d f(a + i \frac{b-a}{K}, y) dy = \sum_{j=1}^K \int_{y_{j-1}}^{y_j} f(a + i \frac{b-a}{K}, y) dy = \sum_{j=1}^K f(\vec{\xi}_{ij}) \frac{d-c}{K}$$

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι

$$\int_a^b F(x) dx = \lim_{K \rightarrow \infty} \sum_{i,j=1}^K f(\vec{\xi}_{ij}) \frac{(b-a)(d-c)}{K^2} = \iint_R f(x,y) dx dy$$

δηλαδή $\int_a^b \left(\int_c^d f(x,y) dy \right) dx = \iint_R f(x,y) dx dy$. Με ανάλογα επιχειρήματα

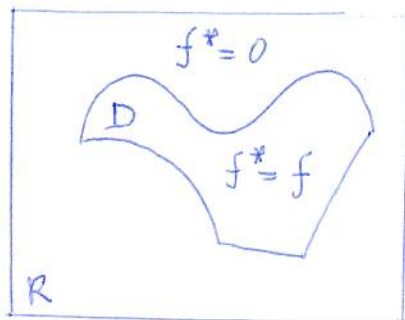
αποδεικνύεται ότι $\int_c^d \left(\int_a^b f(x,y) dx \right) dy = \iint_R f(x,y) dx dy \quad \square$

③ Το διπλό ολοκλήρωμα επί γενικότερων χωρίων

Ορ: Έστω $D \subset \mathbb{R}^2$ συμπαγές χωρίο τ.ω. το σύνολο ∂D είναι μία πεπερασμένη ένωση γραφημάτων συνεχών συναρτήσεων, έστω ένα ορθογώνιο $R = [a,b] \times [c,d]$ τ.ω. $D \subset R \subset \mathbb{R}^2$ και έστω $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής.

Ορίζουμε το $\iint_D f(x,y) dx dy$ ως εξής:

Ενεκτείνουμε την f στη συνάρτηση $f^*: R \rightarrow \mathbb{R}$, $f^*(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & \text{αν } (x,y) \in D \\ 0 & \text{αν } (x,y) \in R \setminus D \end{cases}$



Η f^* είναι φραγμένη και συνεχής παντού εκτός ίσως από το ∂D , άρα είναι ολοκληρώσιμη επί του R (βλ. Θεώρημα 1). Συνεπώς μπορούμε να ορίσουμε $\iint_D f(x,y) dx dy = \iint_R f^*(x,y) dx dy$

Ιδιότητες του ολοκληρώματος: Έστω $D \subset \mathbb{R}^2$ όπως στον παραπάνω ορισμό,

έστω $f, g: D \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχείς και $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Τότε έχουμε

$$(i) \iint_D (\lambda f + \mu g)(x,y) dx dy = \lambda \iint_D f(x,y) dx dy + \mu \iint_D g(x,y) dx dy$$

$$(ii) f(x,y) \geq g(x,y), \forall (x,y) \in D \Rightarrow \iint_D f(x,y) dx dy \geq \iint_D g(x,y) dx dy$$

$$(iii) \iint_D dx dy = \text{εμβαδόν}(D)$$

Απ: Οι ιδιότητες (i) και (ii) είναι συνέπεια του υπολογισμού του ολοκληρώματος ως ορίου των αθροισμάτων Riemann (βλ. Θεώρημα 2).

Ο υπολογισμός του ολοκληρώματος $\iint_D f(x,y) dx dy$ ανάγεται στον υπολογισμό απλών ολοκληρωμάτων στις παρακάτω περιπτώσεις:

Ορ: Καλούμε ένα χωρίο $D \subset \mathbb{R}^2$ y -απλό αν υπάρχουν συνεχείς συναρτήσεις

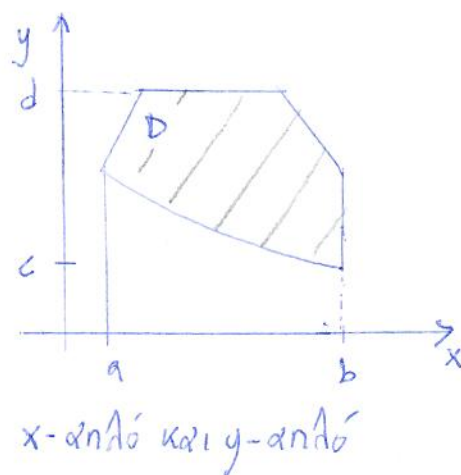
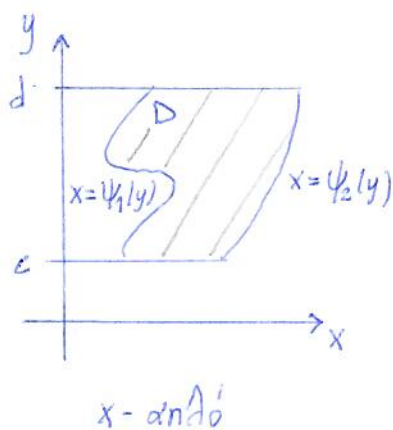
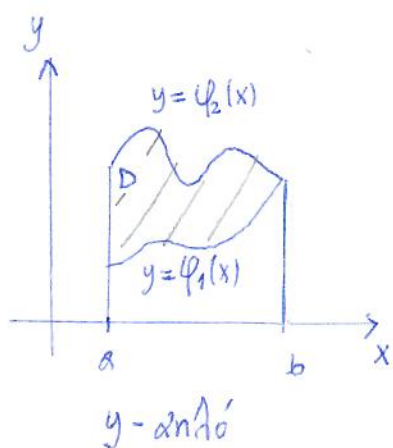
$$\varphi_1, \varphi_2: [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \text{ τ.ω. } \varphi_1(x) \leq \varphi_2(x), \forall x \in [a, b] \text{ και}$$

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a, b], \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\}.$$

Ομοίως το $D \subset \mathbb{R}^2$ καλείται x -απλό αν υπάρχουν συνεχείς συναρτήσεις

$$\psi_1, \psi_2: [c, d] \rightarrow \mathbb{R} \text{ τ.ω. } \psi_1(y) \leq \psi_2(y), \forall y \in [c, d] \text{ και}$$

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [c, d], \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y)\}.$$



Θεωρήματα Fubini Αν το $D \subset \mathbb{R}^2$ είναι ένα y-απλό χωρίο, τότε

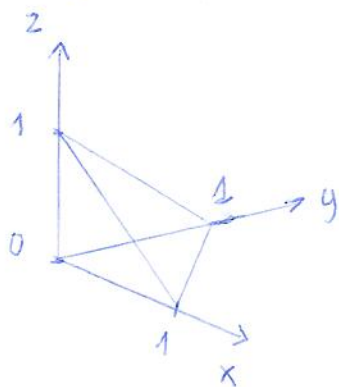
$$\iint_D f(x,y) dx dy = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y) dy \right) dx, \quad \forall f: D \rightarrow \mathbb{R} \text{ συνεχής.}$$

Ομοίως, αν το $D \subset \mathbb{R}^2$ είναι ένα x-απλό χωρίο, τότε

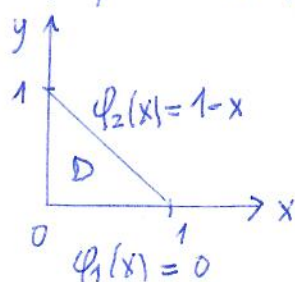
$$\iint_D f(x,y) dx dy = \int_c^d \left(\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y) dx \right) dy, \quad \forall f: D \rightarrow \mathbb{R} \text{ συνεχής}$$

Παραδείγματα 1) Θα υπολογίσουμε τον όγκο του τετραέδρου που

φράσσεται από τα επίπεδα $x=0$, $y=0$, $z=0$ και $x+y+z=1$
 $(\Leftrightarrow z=1-x-y)$



Θεωρούμε το χωρίο $D = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \begin{matrix} x \in [0,1] \\ 0 \leq y \leq 1-x \end{matrix} \}$
 (= βάση του τετραέδρου)



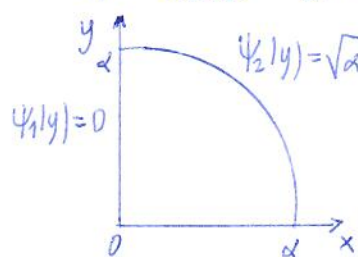
Το D είναι x-απλό και y-απλό

Θέτουμε $f(x,y) = 1-x-y$, θα έχουμε ότι όγκος του τετραέδρου $= \iint_D f(x,y) dx dy$

Υπολογίζουμε τώρα το ολοκλήρωμα

$$\begin{aligned} \iint_D (1-x-y) dx dy &= \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} (1-x-y) dy \right) dx = \int_0^1 \frac{(x-1)^2}{2} dx = \left[\frac{(x-1)^3}{6} \right]_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{6} \\ &\stackrel{\text{Fubini y-απλό}}{=} \left[(1-x)y - \frac{y^2}{2} \right]_{y=0}^{y=1-x} = \frac{(1-x)^2}{2} \end{aligned}$$

2) Έστω $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0, \alpha], 0 \leq y \leq \sqrt{\alpha^2 - x^2}\}$ με $\alpha > 0$.



Θέλουμε να υπολογίσουμε το $\iint_D \sqrt{\alpha^2 - y^2} dx dy = I$

Το D είναι ένα y -από ^{ένισης} x -από χωρίο, διότι
 $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [0, \alpha], 0 \leq x \leq \sqrt{\alpha^2 - y^2}\}$

Το ολοκλήρωμα $\int_0^{\sqrt{\alpha^2 - y^2}} \sqrt{\alpha^2 - y^2} dy$ ΔΕΝ υπολογίζεται εύκολα, άρα

είναι απλούστερο να ολοκληρώσουμε πρώτα ως προς x και μετά ως προς y :

$$I = \int_0^{\alpha} \left(\int_0^{\sqrt{\alpha^2 - y^2}} \sqrt{\alpha^2 - y^2} dx \right) dy = \int_0^{\alpha} (x^2 - y^2) dy = \left[\alpha^2 y - \frac{y^3}{3} \right]_{y=0}^{y=\alpha} = \frac{2\alpha^3}{3}$$

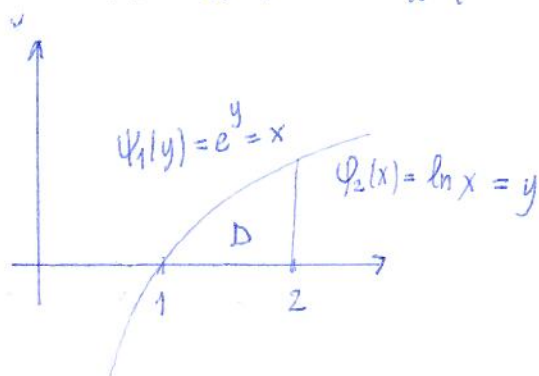
$$= \left[\sqrt{\alpha^2 - y^2} x \right]_{x=0}^{x=\sqrt{\alpha^2 - y^2}} = (\alpha^2 - y^2)$$

3) Ομοίως, αν $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [1, 2], 0 \leq y \leq \ln x\}$, για

να υπολογίσουμε το $I = \iint_D (x-1) \sqrt{1+e^{2y}} dx dy$, τα πράγματα θα απλοποιηθούν

αν παρατηρήσουμε ότι το $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [0, \ln 2], e^y \leq x \leq 2\}$

είναι ένα x -από χωρίο και ολοκληρώσουμε πρώτα ως προς x .



Επομένως, έχουμε

$$I = \int_0^{\ln 2} \left(\int_{e^y}^2 (x-1) \sqrt{1+e^{2y}} dx \right) dy$$

$$= \sqrt{1+e^{2y}} \left[\frac{x^2}{2} - x \right]_{x=e^y}^{x=2}$$

$$= \sqrt{1+e^{2y}} \left(e^y - \frac{e^{2y}}{2} \right)$$

$$\text{και } I = \int_0^{\ln 2} \sqrt{1+e^{2y}} e^y dy - \frac{1}{2} \int_0^{\ln 2} \sqrt{1+e^{2y}} e^{2y} dy$$

$$= I_1 - \frac{1}{2} I_2$$

$$\text{Υπολογίζουμε τώρα } I_2 = \int_0^{\ln 2} \sqrt{1+e^{2y}} e^{2y} dy \stackrel{u=e^{2y}}{=} \int_1^4 \frac{\sqrt{1+u}}{2} du = \left[\frac{1}{3} (1+u)^{3/2} \right]_1^4 = \frac{1}{3} (5^{3/2} - 2^{3/2})$$

$$I_1 = \int_0^{\ln 2} \sqrt{1+e^{2y}} e^y dy \stackrel{v=e^y}{=} \int_1^2 \sqrt{1+v^2} dv = \int_1^2 1 \cdot \sqrt{1+v^2} dv$$

$$\stackrel{\uparrow}{=} \left[v \sqrt{1+v^2} \right]_1^2 - \int_1^2 \frac{v^2}{\sqrt{1+v^2}} dv = (2\sqrt{5} - \sqrt{2}) - I_1 + \int_1^2 \frac{dv}{\sqrt{1+v^2}}$$

ολοκλ κατά μέρη

$$= \int_1^2 \frac{1+v^2-1}{\sqrt{1+v^2}} dv$$

$$\sinh^{-1}(v) = \ln(v + \sqrt{v^2+1})$$

$$(\sinh^{-1})'(v) = \frac{1}{\sqrt{v^2+1}}$$

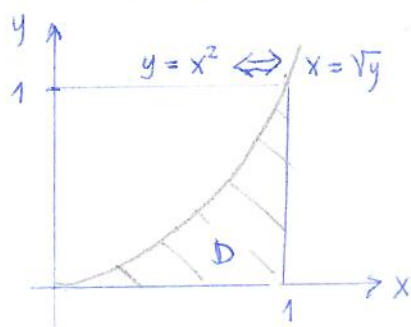
$$\Rightarrow I_1 = \frac{2\sqrt{5}-\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} \int_1^2 \frac{dv}{\sqrt{1+v^2}}$$

$$= \frac{2\sqrt{5}-\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} \left[\ln(v + \sqrt{v^2+1}) \right]_1^2 = \frac{2\sqrt{5}-\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} \ln \left(\frac{2+\sqrt{5}}{1+\sqrt{2}} \right)$$

$$\text{Συμπεράσμα: } I = I_1 - \frac{1}{2} I_2 = \frac{1}{2} (2\sqrt{5}-\sqrt{2} + \ln \left(\frac{2+\sqrt{5}}{1+\sqrt{2}} \right)) - \frac{1}{6} (5^{3/2} - 2^{3/2})$$

4) Ομοίως, αν $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [0,1], \sqrt{y} \leq x \leq 1\}$, για να

υπολογίσουμε το $I = \iint_D e^{x^3} dx dy$, παρατηρούμε ότι το D είναι ενίοchs



ένα y -χωρίο $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0,1], 0 \leq y \leq x^2\}$

και έχουμε

$$I = \int_0^1 \left(\int_0^{x^2} e^{x^3} dy \right) dx = \int_0^1 x^2 e^{x^3} dx = \left[\frac{e^{x^3}}{3} \right]_{x=0}^{x=1}$$

$$\stackrel{||}{=} \left[e^{x^3} y \right]_{y=0}^{y=x^2} = x^2 e^{x^3} = \frac{e-1}{3}$$

④ Το τριπλό ολοκλήρωμα

Αν το $S \subset \mathbb{R}^3$ είναι ένα συμπαγές χωρίο τ.ω. το ∂S να είναι μία πεπεραμένη ένωση γραμμικών συνεχών συναρτήσεων (όπως $x = \alpha(y, z)$, $y = \beta(x, z)$, $z = \gamma(x, y)$) και η $f: S \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχής, τότε το τριπλό ολοκλήρωμα $\iiint_S f(x, y, z) dx dy dz$ ορίζεται (όπως και στη διδιάστατη περίπτωση) ως όριο των αθροισμάτων Riemann.

Βασικές ιδιότητες • $\iiint_S dx dy dz = \text{όγκος}(S)$

• $\iiint_S (\lambda f + \mu g) = \lambda \iiint_S f + \mu \iiint_S g$ (γραμμικότητα)

• $f \geq g$ στο $S \Rightarrow \iiint_S f \geq \iiint_S g$ (μονοτονία)

Ανάλυση σε διαδοχικά ολοκληρώματα

α) Όταν $S = [a, b] \times [c, d] \times [p, q]$

$$\begin{aligned} \iiint_S f(x, y, z) dx dy dz &= \int_p^q \left(\int_c^d \left(\int_a^b f(x, y, z) dx \right) dy \right) dz = \int_p^q \left(\int_a^b \left(\int_c^d f(x, y, z) dy \right) dx \right) dz \\ &= \int_a^b \left(\int_p^q \left(\int_c^d f(x, y, z) dy \right) dz \right) dx = \text{κ.ο.κ.} \end{aligned}$$

[συνολικά έξι
δυνατές διατάξεις]

Παράδειγμα : Έστω $S = [0, 1] \times [0, 2] \times [0, 3]$, θα υπολογίσουμε

$$\begin{aligned} \text{το } I &= \iiint_S e^{x+y+z} dx dy dz = \int_0^3 \left(\int_0^2 \left(\int_0^1 e^{x+y+z} dx \right) dy \right) dz \\ &= \left[e^{x+y+z} \right]_{x=0}^{x=1} = e^{y+z+1} - e^{y+z} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Αρα } I &= \int_0^3 \left(\int_0^z \underbrace{e^{y+z+1}}_{\uparrow \varphi_2} - \underbrace{e^{y+z}}_{\uparrow \varphi_1} dy \right) dz = \int_0^3 (e^{z+3} - e^{z+2} - e^{z+1} + e^z) dz \\ &= \left[e^{y+z+1} - e^{y+z} \right]_{y=0}^{y=z} = e^{z+3} - e^{z+2} - e^{z+1} + e^z \end{aligned}$$

$$\Rightarrow I = \left[e^{z+3} - e^{z+2} - e^{z+1} + e^z \right]_{z=0}^{z=3} = e^6 - e^5 - e^4 + e^2 + e - 1$$

β) Για στοιχειώδη χωρία: Υποθέτουμε ότι η μία μεταβλητή του $S \subset \mathbb{R}^3$

(π.χ. το z) βρίσκεται μεταξύ δύο συναρτήσεων των υπόλοιπων μεταβλητών

(π.χ. των x και y): $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in D \subset \mathbb{R}^2, \gamma_1(x, y) \leq z \leq \gamma_2(x, y)\}$

με $\gamma_1, \gamma_2 : \underbrace{D}_{\subset \mathbb{R}^2} \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχείς και $\gamma_1 \leq \gamma_2$ στο D .

Υποθέτουμε επίσης ότι το $D \subset \mathbb{R}^2$ είναι είτε y -αηλό είτε x -αηλό.

Τότε, ισχύει

$$\iiint_S f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \left(\int_{\gamma_1(x, y)}^{\gamma_2(x, y)} f(x, y, z) dz \right) dy \right) dx$$

αν $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a, b], \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\}$ y -αηλό

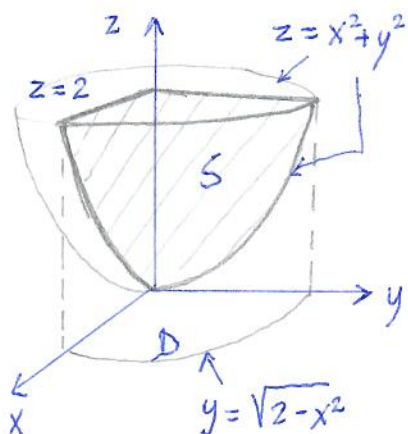
$$= \int_c^d \left(\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} \left(\int_{\gamma_1(x, y)}^{\gamma_2(x, y)} f(x, y, z) dz \right) dx \right) dy$$

αν $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [c, d], \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y)\}$ x -αηλό

Παράδειγμα: Έστω $S \subset \mathbb{R}^3$, το χωρίο που βρίσκεται στο τεταρτημόριο

$x \geq 0, y \geq 0$ και φράσσεται από το επίπεδο $z = 2$ και την επιφάνεια

$z = x^2 + y^2$. Θα υπολογίσουμε το $I = \iiint_S x dx dy dz$



Το χωρίο S περιγράφεται με τις ανισότητες:

$$S = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in D, x^2 + y^2 \leq z \leq 2 \}$$

όπου $D = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0, \sqrt{2}], 0 \leq y \leq \sqrt{2-x^2} \}$

($D = y - \text{ανάλυση}$).

Ευνενώς

$$\begin{aligned} I &= \iiint_S x \, dx \, dy \, dz = \int_0^{\sqrt{2}} \left(\int_0^{\sqrt{2-x^2}} \left(\int_{x^2+y^2}^2 x \, dz \right) dy \right) dx \\ &= \int_0^{\sqrt{2}} \left(\int_0^{\sqrt{2-x^2}} x(2-x^2-y^2) \, dy \right) dx = \int_0^{\sqrt{2}} \frac{2x}{3} (2-x^2)^{3/2} dx \\ &= \left[x(2-x^2)y - x \frac{y^3}{3} \right]_{y=0}^{y=\sqrt{2-x^2}} = \frac{2x}{3} (2-x^2)^{3/2} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow I = \left[-\frac{2}{15} (2-x^2)^{5/2} \right]_{x=0}^{x=\sqrt{2}} = \frac{2}{15} 2^{5/2} = \frac{8\sqrt{2}}{15}$$

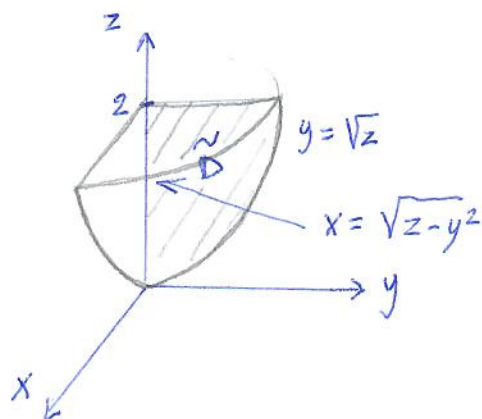
Εναλλακτικά, μπορούμε να οριοθετήσουμε πρώτα το x και να περιγράψουμε

το S με τις ανισότητες:

$$S = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (y, z) \in \tilde{D}, 0 \leq x \leq \sqrt{z-y^2} \}$$

όπου $\tilde{D} = \{ (y, z) \in \mathbb{R}^2 : z \in [0, 2], 0 \leq y \leq \sqrt{z} \}$

($\tilde{D} = y - \text{ανάλυση}$)

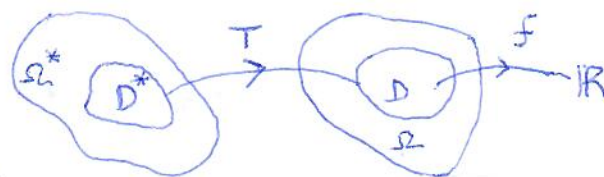


Ευνενώς,

$$\begin{aligned} I &= \iiint_S x \, dx \, dy \, dz = \int_0^2 \left(\int_0^{\sqrt{z}} \left(\int_0^{\sqrt{z-y^2}} x \, dx \right) dy \right) dz \\ &= \int_0^2 \left(\int_0^{\sqrt{z}} \frac{z-y^2}{2} dy \right) dz = \int_0^2 \left[\frac{zy}{2} - \frac{y^3}{6} \right]_{y=0}^{y=\sqrt{z}} dz \end{aligned}$$

$$\Rightarrow I = \int_0^2 \frac{z^{3/2}}{3} dz = \left[\frac{2}{15} z^{5/2} \right]_{z=0}^{z=2} = \frac{2}{15} 2^{5/2} = \frac{8\sqrt{2}}{15}$$

⑤ Το θεώρημα αλλαγής μεταβλητών



Θεώρημα: Έστω $T: \Omega^* \rightarrow \Omega$ μια C^1 αμφιδιαφορίση μεταξύ των ανοιχτών συνόλων $\Omega^*, \Omega \subset \mathbb{R}^n$ ($n=2,3$) και έστω $D^* \subset \Omega^* \subset \mathbb{R}^n$ ένα στοιχειώδες χωρίο όπως αυτά που θεωρήσαμε στις § 2-3-4. Υποθέτουμε ότι το $D=T(D^*)$ είναι επίσης ένα θεμελιώδες χωρίο. Τότε, για κάθε συνεχή συνάρτηση $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, ισχύει

$$\bullet \iint_D f(x,y) dx dy = \iint_{D^*} f(x(u,v), y(u,v)) \overset{\text{απόλυτη τιμή}}{|\det(DT(u,v))|} du dv, \text{ όταν } n=2,$$

$$T(u,v) = \begin{pmatrix} x(u,v) \\ y(u,v) \end{pmatrix} \text{ και } DT(u,v) = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial x}{\partial v}(u,v) \\ \frac{\partial y}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial y}{\partial v}(u,v) \end{bmatrix} = \text{Ιακωβιανός πίνακας}$$

$(u,v) \in D^*$

$$\bullet \iiint_D f(x,y,z) dx dy dz = \iiint_{D^*} f(x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w)) \overset{\text{απόλυτη τιμή}}{|\det(DT(u,v,w))|} du dv dw$$

$$\text{όταν } n=3, \text{ με } T(u,v,w) = \begin{pmatrix} x(u,v,w) \\ y(u,v,w) \\ z(u,v,w) \end{pmatrix} \text{ και } DT(u,v,w) = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}(u,v,w) & \frac{\partial x}{\partial v}(u,v,w) & \frac{\partial x}{\partial w}(u,v,w) \\ \frac{\partial y}{\partial u}(u,v,w) & \frac{\partial y}{\partial v}(u,v,w) & \frac{\partial y}{\partial w}(u,v,w) \\ \frac{\partial z}{\partial u}(u,v,w) & \frac{\partial z}{\partial v}(u,v,w) & \frac{\partial z}{\partial w}(u,v,w) \end{bmatrix}$$

$(u,v,w) \in D^*$

$= \text{Ιακωβιανός πίνακας}$

Απ: στο Μάθημα 511 Θεωρίας μέτρου

Παρατήρηση: Για συναρτήσεις μιας μεταβλητής, έχουμε τον τύπο:

$$\int_{T(a)}^{T(b)} f(x) dx = \int_a^b f(T(u)) T'(u) du, \text{ επειδή η εικόνα των πραγματικών αριθμών είναι προενατολίσμένη.}$$

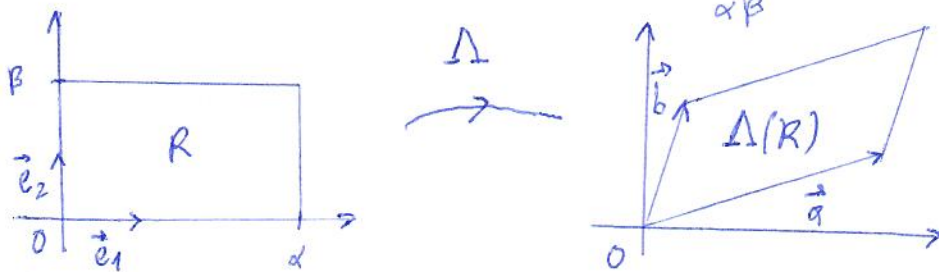
Αιτιολόγηση του τύπου αλλαγής μεταβλητών (όταν $n=2$)

• Γραμμική Αλγεβρα: Έστω το ορθογώνιο $R = [0, \alpha] \times [0, \beta]$,

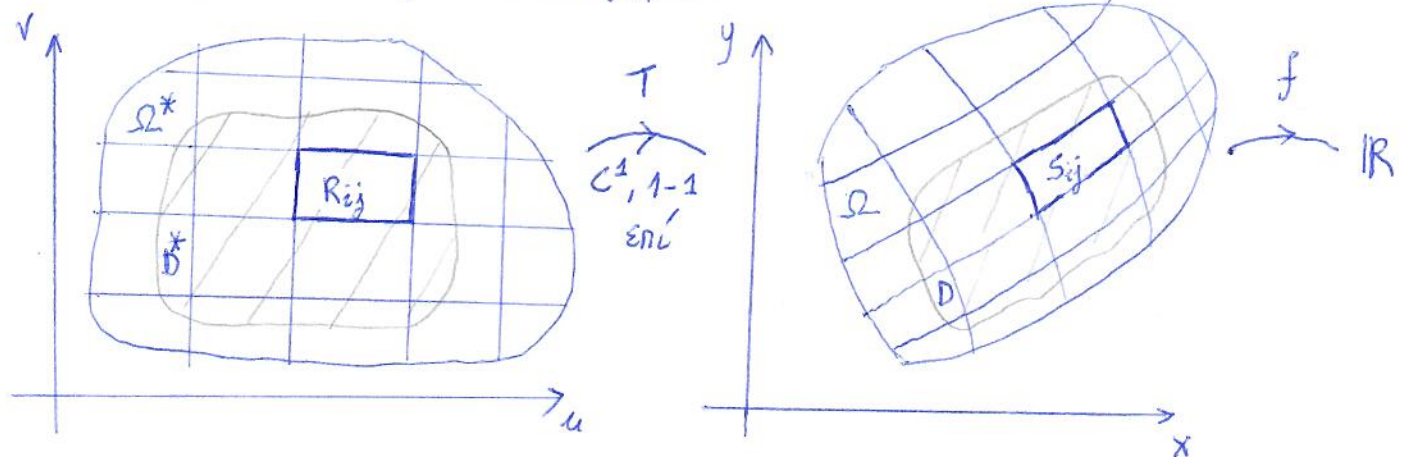
$(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ η κανονική βάση του $\mathbb{R}^2$ και $\Delta: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ένας γραμμικός μετασχηματισμός. Τότε ισχύει ότι

α) $\Delta(R)$ = παραλληλόγραμμο με προσκείμενες πλευρές τα $\vec{a} = \alpha \Delta \vec{e}_1$ και $\vec{b} = \beta \Delta \vec{e}_2$,

β) $\text{εμβαδόν}(\Delta(R)) = |\det(\vec{a}, \vec{b})| = \text{εμβαδόν}(R) \cdot |\det \Delta|$ (βλ κεφ 1).



• Επανερχόμαστε τώρα στο Θεώρημα:

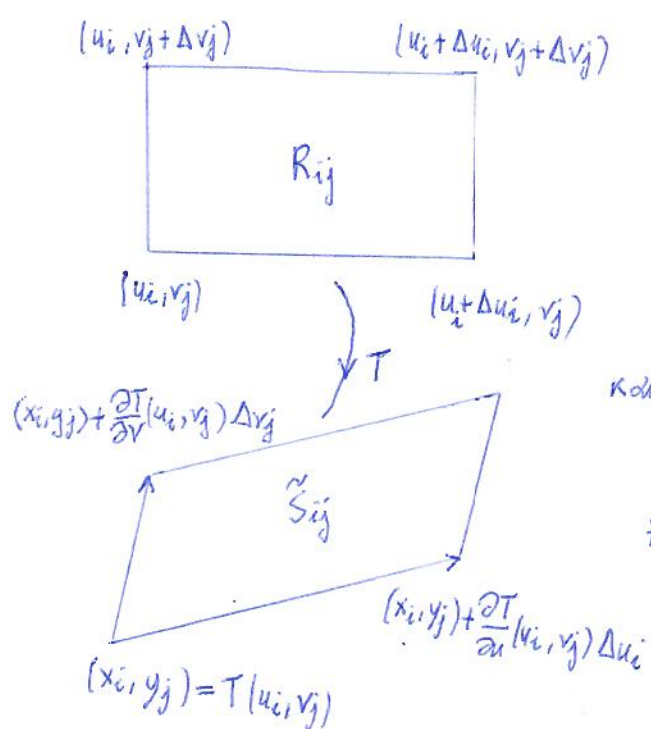


Σε μία γειτονιά ενός σημείου $(u, v) \in \Omega^*$ ισχύει

$$T(u+h, v+k) \simeq T(u, v) + \underbrace{\frac{\partial T}{\partial u}(u, v)}_{\mathbb{R}^2} h + \underbrace{\frac{\partial T}{\partial v}(u, v)}_{\mathbb{R}^2} k \quad \text{όταν τα } |h|, |k| \text{ είναι αρκετά μικρά.}$$

$$= DT(u, v) \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \quad DT(u, v): \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \text{ γραμμικός μετασχηματισμός}$$

- Άρα η εικόνα $T(R_{ij}) = S_{ij}$ του μικρού ορθογωνίου R_{ij}



προεγγίζεται από το παραλληλόγραμμο $\tilde{S}_{ij}$ με προεκείμενες πλευρές:

$$\left[(x_i, y_j), (x_i, y_j) + \frac{\partial T}{\partial u}(u_i, v_j) \Delta u_i \right]$$

$$\text{και } \left[(x_i, y_j), (x_i, y_j) + \frac{\partial T}{\partial v}(u_i, v_j) \Delta v_j \right].$$

$$\text{Επιπλέον, εμβαδόν}(\tilde{S}_{ij}) = \text{εμβαδόν}(R_{ij}) \cdot |\det(DT(u_i, v_j))| = \Delta u_i \Delta v_j |\det(DT(u_i, v_j))|$$

$$[DT(u_i, v_j) = \begin{bmatrix} \frac{\partial T}{\partial u}(u_i, v_j) & \frac{\partial T}{\partial v}(u_i, v_j) \end{bmatrix}_{\substack{\text{στήλες} \\ \uparrow \\ \mathbb{R}^2 \quad \mathbb{R}^2}}] \text{ 2x2 πίνακας}$$

- Συμπέρασμα:

$$I = \iint_{D^*} f(x(u, v), y(u, v)) |\det(DT(u, v))| du dv$$

$$\approx \sum_{i,j} f(x(u_i, v_j), y(u_i, v_j)) |\det(DT(u_i, v_j))| \Delta u_i \Delta v_j$$

$$\approx \sum_{i,j} f(x_i, y_j) \text{εμβαδόν}(\tilde{S}_{ij})$$

$$\approx \sum_{i,j} f(x_i, y_j) \text{εμβαδόν}(S_{ij})$$

$$\approx \iint_D f(x, y) dx dy$$

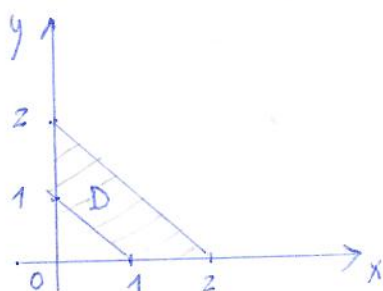
[Παρατήρηση: Παρόλο που τα μικρά χωρία S_{ij} δεν είναι ορθογώνια, το ολοκλήρωμα $\iint_D f(x, y) dx dy$ προεγγίζεται από το άθροισμα $\sum_{i,j} f(x_i, y_j) \text{εμβαδόν}(S_{ij})$].

⑤ α) Αφφινικοί μετασχηματισμοί :

- $T(u, v) = A \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$ όπου A 2×2 αντιστρέψιμος πίνακας και $u_0, v_0 \in \mathbb{R}$ σταθ.
- $T(u, v, w) = A \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix}$ " A 3×3 " " και $u_0, v_0, w_0 \in \mathbb{R}$ σταθ.

Τότε ο αφφινικός μετασχηματισμός T είναι μία C^∞ αμφιστοχική του $\mathbb{R}^n$ επί του $\mathbb{R}^n$ ($n=2, 3$) και $\begin{cases} |\det DT(u, v)| = |\det A| & (n=2) \\ |\det DT(u, v, w)| = |\det A| & (n=3) \end{cases}$

Παράδειγμα : Θα υπολογίσουμε το $I = \iint_D e^{\frac{y-x}{y+x}} dx dy$ όπου D το τριγώνιο με κορυφές $(0, 1), (0, 2), (1, 0), (2, 0)$

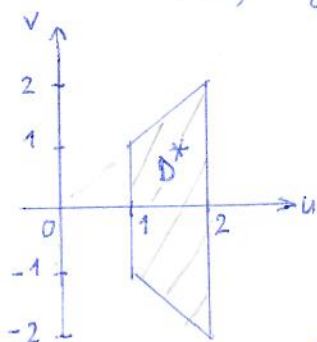


Έχουμε $D = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, 1 \leq x+y \leq 2 \}$

και θέτουμε $\begin{cases} u = x+y \\ v = y-x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{u-v}{2} \\ y = \frac{u+v}{2} \end{cases}, (x, y) = T(u, v)$

Ισχύει $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 1 \leq x+y \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{u-v}{2} \geq 0 \\ \frac{u+v}{2} \geq 0 \\ 1 \leq u \leq 2 \end{cases}$, άρα

$D = T(D^*)$ όπου $D^* = \{ (u, v) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq u \leq 2, -u \leq v \leq u \}$ (v-ακλό).



Επιπλέον, $DT(u, v) = \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \Rightarrow \det(DT(u, v)) = \frac{1}{2}$.

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι

$$I = \iint_D e^{\frac{y-x}{y+x}} dx dy = \iint_{D^*} \frac{e^{\frac{v}{u}}}{2} du dv = \int_1^2 \left(\int_{-u}^u \frac{1}{2} e^{v/u} dv \right) du$$

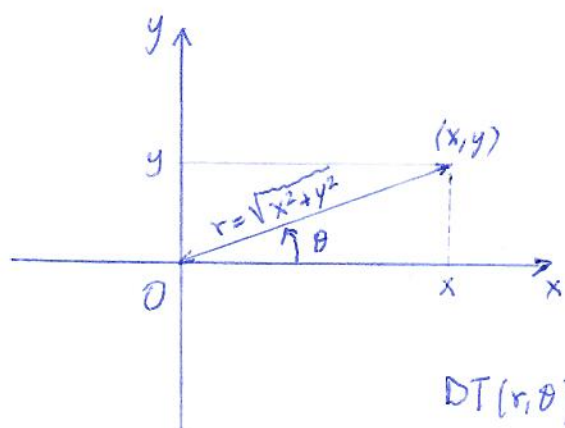
$$\Rightarrow I = \int_1^2 \frac{u}{2} (e - e^{-1}) du$$

$$I = (e - e^{-1}) \left[\frac{u^2}{4} \right]_{u=1}^{u=2} = \frac{3}{4} (e - e^{-1})$$

$$= \left[\frac{u}{2} e^{v/u} \right]_{v=-u}^{v=u} = \frac{u}{2} (e - e^{-1})$$

⑤ β) Ο πολικός μετασχηματισμός: $T: [0, \infty) \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$(r, \theta) \mapsto (x = r \cos \theta, y = r \sin \theta)$$



Είναι μια $\mathbb{C}^\infty$ αμφιδιευθόρνη του $\Omega^* = (0, \infty) \times (0, 2\pi)$

επί του $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0) : x \geq 0\}$ (βλ. κεφ 3 § 9).

Επιπλέον, έχουμε

$$DT(r, \theta) = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial r}(r, \theta) & \frac{\partial x}{\partial \theta}(r, \theta) \\ \frac{\partial y}{\partial r}(r, \theta) & \frac{\partial y}{\partial \theta}(r, \theta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{bmatrix}, \det(DT(r, \theta)) = r.$$

Παρατήρηση: Το θεώρημα αλλαγής μεταβλητών ισχύει όμως και για χωρία D^* , $D = T(D^*)$ τ.ω. $D^* \subset [0, \infty) \times [0, 2\pi] = \overline{\Omega^*}$. Ο λόγος είναι ότι το σύνολο των σημείων του D^* όπου $r=0$ ή $\theta=0$ ή 2π , περιέχεται στο $\partial\Omega^*$ και για τις ανάγκες της ολοκλήρωσης μπορεί να αγνοηθεί.

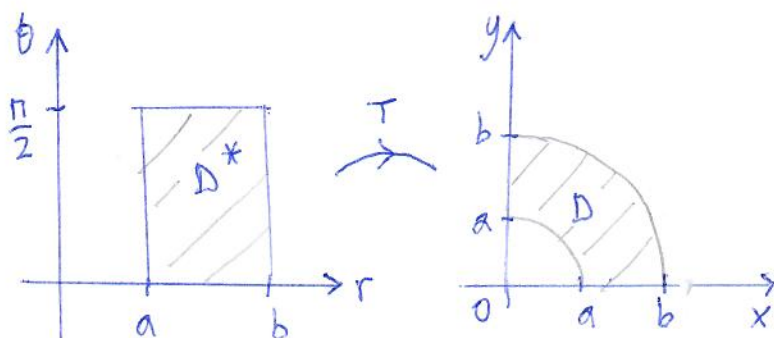
Το θεώρημα αλλαγής μεταβλητών σε πολικές συντεταγμένες διατυπώνεται λοιπόν ως εξής:

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D^*} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta \quad \text{όπου} \quad \begin{cases} D^* \subset [0, \infty) \times [0, 2\pi] \\ D = T(D^*), f: D \rightarrow \mathbb{R} \text{ συνεχής} \end{cases}$$

Παραδείγματα 1) Έστω $D^* = [0, R] \times [0, 2\pi]$, $D = T(D^*) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 \leq R^2\}$ και $f(x, y) = 1$. Εφαρμόζοντας τον προηγούμενο τύπο, βρίσκουμε

$$\text{Εμβαδόν}(D) = \iint_{[0, R] \times [0, 2\pi]} r dr d\theta = \int_0^R \left(\int_0^{2\pi} r d\theta \right) dr = \int_0^R 2\pi r dr = \left[\pi r^2 \right]_{r=0}^{r=R} = \pi R^2$$

2) Έστω D το χωρίο του πρώτου τεταρτημορίου που βρίσκεται μεταξύ των τόξων των κύκλων $x^2 + y^2 = a^2$ και $x^2 + y^2 = b^2$ όπου $0 < a < b$. Έχουμε $D = T(D^*)$ όπου $D^* = [a, b] \times [0, \frac{\pi}{2}]$.

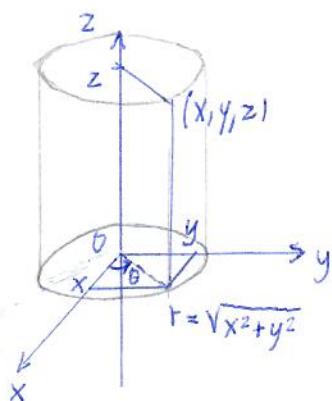


Θα υπολογίσουμε το $I = \iint_D \ln(x^2 + y^2) dx dy = \iint_{D^*} r \ln(r^2) dr d\theta = \int_a^b \left(\int_0^{\pi/2} r \ln(r^2) d\theta \right) dr$

$$= \int_a^b \frac{\pi r}{2} \ln(r^2) dr = \pi \int_a^b r \ln r dr = \pi \left[\frac{r^2}{2} \ln r \right]_{r=a}^{r=b} - \pi \int_a^b \frac{r}{2} dr$$

$$= \frac{\pi}{2} (b^2 \ln b - a^2 \ln a) - \frac{\pi}{4} (b^2 - a^2)$$

⑤ γ) Ο κυλινδρικός μετασχηματισμός: $T: [0, \infty) \times [0, 2\pi] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$
 $(r, \theta, z) \mapsto (x = r \cos \theta, y = r \sin \theta, z)$



Είναι μία C^∞ αμφιδιάρθρωση του $\Omega^* = (0, \infty) \times (0, 2\pi) \times \mathbb{R}$

επί του $\Omega = \mathbb{R}^3 \setminus \{(x, 0, z) : x \geq 0, z \in \mathbb{R}\}$

Επιπλέον έχουμε $DT(r, \theta, z) = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial r}(r, \theta, z) & \frac{\partial x}{\partial \theta}(-11) & \frac{\partial x}{\partial z}(1) \\ \frac{\partial y}{\partial r}(-11) & \frac{\partial y}{\partial \theta}(-11) & \frac{\partial y}{\partial z}(1) \\ \frac{\partial z}{\partial r}(-11) & \frac{\partial z}{\partial \theta}(-11) & \frac{\partial z}{\partial z}(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \\ \sin \theta & r \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

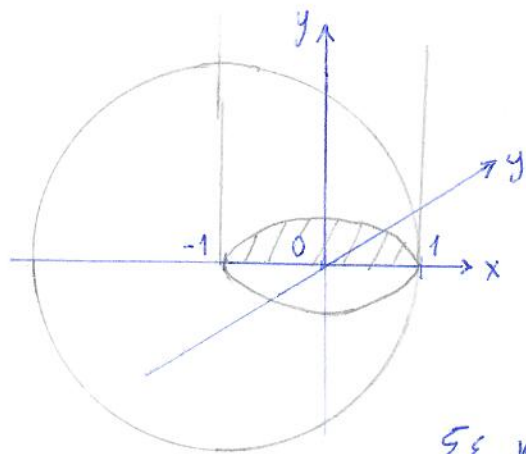
$$\Rightarrow \det(DT(r, \theta, z)) = r$$

Αποδεικνύεται ότι το θεώρημα αλλαγής μεταβλητών ισχύει και για χωρία

D^* , $D = T(D^*)$ τ.ω. $D^* \subset [0, \infty) \times [0, 2\pi] \times \mathbb{R}$:

$$\iiint_D f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{D^*} f(r \cos \theta, r \sin \theta, z) r dr d\theta dz$$

Παράδειγμα: Έστω το στερεό $K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y \geq 0, z \geq 0, x^2 + y^2 \leq 1, (x+1)^2 + y^2 + z^2 \leq 4\}$



Το στερέο K είναι η τομή

του κυλίνδρου $x^2 + y^2 \leq 1, z \in \mathbb{R}$

με τα επίπεδα $z = 0$ και $y = 0$

και με την μπάλα $(x+1)^2 + y^2 + z^2 \leq 4$.

Σε κυλινδρικές συντεταγμένες, έχουμε $K = T(K^*)$

$$\text{με } K^* = \{(r, \theta, z) : r \leq 1, \theta \in [0, \pi], 0 \leq z \leq \sqrt{3 - r^2 - 2r \cos \theta}\}$$

$$\text{Γιότι } r \leq 1, \theta \in [0, \pi] \Leftrightarrow x^2 + y^2 \leq 1, y \geq 0$$

$$\text{και } (x+1)^2 + y^2 + z^2 \leq 4, z \geq 0 \Leftrightarrow (r \cos \theta + 1)^2 + r^2 \sin^2 \theta + z^2 \leq 4, z \geq 0 \Leftrightarrow 0 \leq z \leq \sqrt{3 - r^2 - 2r \cos \theta}$$

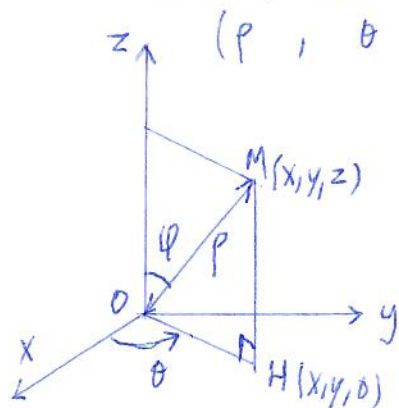
Εφαρμόζοντας τον τύπο αλλαγής μεταβλητών θα υπολογίσουμε το

$$\begin{aligned} I &= \iiint_K z \, dx \, dy \, dz = \iiint_{K^*} r z \, dr \, d\theta \, dz = \int_0^1 \left(\int_0^\pi \left(\int_0^{\sqrt{3 - r^2 - 2r \cos \theta}} r z \, dz \right) d\theta \right) dr \\ &= \int_0^1 \left(\int_0^\pi \frac{3r - r^3 - 2r^2 \cos \theta}{2} d\theta \right) dr \quad (\text{επειδή } \int_0^\pi \cos \theta \, d\theta = 0) = \left[\frac{r z^2}{2} \right]_{z=0}^{z=\sqrt{3 - r^2 - 2r \cos \theta}} \\ &= \int_0^1 \frac{\pi}{2} (3r - r^3) dr = \frac{\pi}{2} \left[\frac{3r^2}{2} - \frac{r^4}{4} \right]_{r=0}^{r=1} = \frac{5\pi}{8} \end{aligned}$$

⑤ δ) Ο σφαιρικός μετασχηματισμός:

$$T: [0, \infty) \times [0, 2\pi] \times [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(r, \theta, \varphi) \mapsto (x = r \sin \varphi \cos \theta, y = r \sin \varphi \sin \theta, z = r \cos \varphi)$$



r = απόσταση του σημείου $M(x, y, z)$ από την αρχή των αξόνων O .

φ = γωνία που σχηματίζει το $\vec{OM}$ με τον άξονα Oz

θ = προκύπτουσα γωνία που σχηματίζει το $\vec{OH} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$ με τον άξονα Ox

Αποδεικνύεται ότι ο σφαιρικός μετασχηματισμός είναι μια C^∞ αμφιδιαφόρηση του $\Omega^* = (0, \infty) \times (0, 2\pi) \times (0, \pi)$ επί του $\Omega = \mathbb{R}^3 \setminus \{(x, 0, z) : x \geq 0, z \in \mathbb{R}\}$.

Επιπλέον έχουμε:

$$DT(p, \theta, \varphi) = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial p}(p, \theta, \varphi) & \frac{\partial x}{\partial \theta}(-1) & \frac{\partial x}{\partial \varphi}(-1) \\ \frac{\partial y}{\partial p}(p, \theta, \varphi) & \frac{\partial y}{\partial \theta}(-1) & \frac{\partial y}{\partial \varphi}(-1) \\ \frac{\partial z}{\partial p}(p, \theta, \varphi) & \frac{\partial z}{\partial \theta}(-1) & \frac{\partial z}{\partial \varphi}(-1) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \sin \varphi \cos \theta & -\sin \varphi \sin \theta & \rho \cos \varphi \cos \theta \\ \sin \varphi \sin \theta & \rho \sin \varphi \cos \theta & \rho \cos \varphi \sin \theta \\ \cos \varphi & 0 & -\rho \sin \varphi \end{bmatrix}$$

$$\det(DT(p, \theta, \varphi)) = \cos \varphi \begin{vmatrix} -\rho \sin \varphi \sin \theta & \rho \cos \varphi \cos \theta \\ \rho \sin \varphi \cos \theta & \rho \cos \varphi \sin \theta \end{vmatrix} - \rho \sin \varphi \begin{vmatrix} \sin \varphi \cos \theta & -\sin \varphi \sin \theta \\ \sin \varphi \sin \theta & \rho \sin \varphi \cos \theta \end{vmatrix}$$

$$= -\rho^2 \cos^2 \varphi \sin \varphi - \rho^2 \sin^3 \varphi = -\rho^2 \sin \varphi$$

Αποδεικνύεται ότι το θεώρημα αλλαγής μεταβλητών ισχύει και για χωρία D^* , $D = T(D^*)$ τ.ω. $D^* \subset [0, \infty) \times [0, 2\pi] \times [0, \pi]$:

$$\iiint_D f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{D^*} f(\rho \sin \varphi \cos \theta, \rho \sin \varphi \sin \theta, \rho \cos \varphi) \rho^2 \sin \varphi d\rho d\theta d\varphi$$

Παραδείγματα 1) Θα υπολογίσουμε τον όγκο της ^{κλειστής} μνίδας $\bar{B}(\vec{0}, R) \subset \mathbb{R}^3$:

$$\text{όγκος}(\bar{B}(\vec{0}, R)) = \iiint_{\bar{B}(\vec{0}, R)} dx dy dz = \iiint_{[0, R] \times [0, 2\pi] \times [0, \pi]} \rho^2 \sin \varphi d\rho d\theta d\varphi$$

$$\text{επειδή } T([0, R] \times [0, 2\pi] \times [0, \pi]) = \bar{B}(\vec{0}, R)$$

$$\begin{aligned} \text{Άρα } \text{όγκος}(\bar{B}(\vec{0}, R)) &= \int_0^R \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_0^\pi \rho^2 \sin \varphi d\varphi \right) d\theta \right) d\rho = \int_0^R \left(\int_0^{2\pi} \rho^2 d\theta \right) d\rho = \int_0^R 4\pi \rho^2 d\rho = \frac{4}{3} \pi R^3 \\ &= \rho^2 \left[-\cos \varphi \right]_{\varphi=0}^{\varphi=\pi} = 2\rho^2 \end{aligned}$$

2) Θα υπολογίσουμε το $I = \iiint_{\bar{B}(\vec{0},1)} \exp(x^2+y^2+z^2)^{3/2} dx dy dz$.

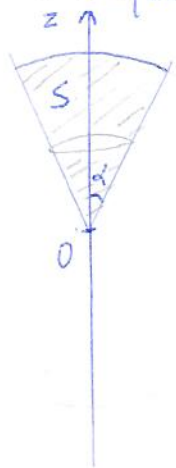
Έχουμε $\bar{B}(\vec{0},1) = T([0,1] \times [0,2\pi] \times [0,\pi])$ $d\rho d\theta d\varphi$

$$I = \iiint_{[0,1] \times [0,2\pi] \times [0,\pi]} \rho^2 e^{\rho^3} \sin \varphi d\rho d\theta d\varphi = \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} \underbrace{\left(\int_0^\pi \rho^2 e^{\rho^3} \sin \varphi d\varphi \right)}_{= \rho^2 e^{\rho^3} [-\cos \varphi]_{\varphi=0}^{\varphi=\pi} = 2\rho^2 e^{\rho^3}} d\theta \right) d\rho$$

$$\Rightarrow I = \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} 2\rho^2 e^{\rho^3} d\theta \right) d\rho = \int_0^1 4\pi \rho^2 e^{\rho^3} d\rho = \left[\frac{4\pi}{3} e^{\rho^3} \right]_{\rho=0}^{\rho=1} = \frac{4\pi}{3} (e-1)$$

3) Έστω $S^* = [0,R] \times [0,2\pi] \times [0,\alpha]$ όπου $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$ και $S = T(S^*)$

Το στερεό S είναι η τομή της μπάλας $\bar{B}(\vec{0},R)$ με τον κώνο



$$K = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z \geq \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\tan \alpha} \right\}.$$

Θα υπολογίσουμε τον όγκο του S . Έχουμε

$$I = \text{όγκος}(S) = \iiint_S dx dy dz = \iiint_{[0,R] \times [0,2\pi] \times [0,\alpha]} \rho^2 \sin \varphi d\rho d\theta d\varphi$$

$$I = \int_0^R \left(\int_0^{2\pi} \underbrace{\left(\int_0^\alpha \rho^2 \sin \varphi d\varphi \right)}_{= \rho^2 [-\cos \varphi]_{\varphi=0}^{\varphi=\alpha} = \rho^2 (1 - \cos \alpha)} d\theta \right) d\rho = \int_0^R \left(\int_0^{2\pi} \rho^2 (1 - \cos \alpha) d\theta \right) d\rho$$

$$\Rightarrow I = \int_0^R 2\pi (1 - \cos \alpha) \rho^2 d\rho = 2\pi (1 - \cos \alpha) \left[\frac{\rho^3}{3} \right]_{\rho=0}^{\rho=R} = \frac{2\pi}{3} (1 - \cos \alpha) R^3$$

⑥ Εφαρμογές - Κέντρα μάζας

Έστω $S \subset \mathbb{R}^3$ ένα στερεό. Υποθέτουμε ότι σε κάθε σημείο $(x, y, z) \in S$

η πυκνότητα μάζας του στερεού είναι $\delta(x, y, z)$ με $\delta: S \rightarrow (0, \infty)$ συνεχή συνάρτηση.

Ορ: Εξ' ορισμού το κέντρο μάζας του στερεού S είναι το σημείο $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ με συντεταγμένες

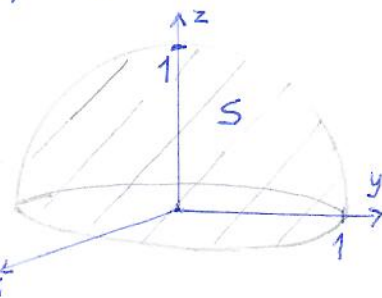
$$\bar{x} = \frac{\iiint_S x \delta(x, y, z) dx dy dz}{\iiint_S \delta(x, y, z) dx dy dz}, \quad \bar{y} = \frac{\iiint_S y \delta(x, y, z) dx dy dz}{\iiint_S \delta(x, y, z) dx dy dz}, \quad \bar{z} = \frac{\iiint_S z \delta(x, y, z) dx dy dz}{\iiint_S \delta(x, y, z) dx dy dz}$$

όπου στον παρονομαστή, το $\iiint_S \delta(x, y, z) dx dy dz$ είναι η συνολική μάζα του στερεού S .

Παράδειγμα 1) Θα βρούμε τη συνολική μάζα του κύβου $S = [1, 2] \times [1, 2] \times [1, 2]$ με πυκνότητα μάζας που δίνεται από την $\delta(x, y, z) = (1+x)e^z y$.

$$\begin{aligned} \text{Μάζα}(S) &= \iiint_{[1,2] \times [1,2] \times [1,2]} (1+x)e^z y dx dy dz = \int_1^2 \left(\int_1^2 \left(\int_1^2 (1+x)e^z y dx \right) dy \right) dz \\ &= \left[\left(x + \frac{x^2}{2} \right) e^z y \right]_{x=1}^{x=2} = \frac{5}{2} e^z y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \text{Μάζα}(S) &= \int_1^2 \left(\int_1^2 \frac{5}{2} e^z y dy \right) dz = \int_1^2 \frac{15}{4} e^z dz = \left[\frac{15}{4} e^z \right]_{z=1}^{z=2} = \frac{15}{4} (e^2 - e) \\ &= \frac{5}{2} e^z \left[\frac{y^2}{2} \right]_{y=1}^{y=2} = \frac{15}{4} e^z. \end{aligned}$$



2) Θα βρούμε το κέντρο μάζας του ημισφαιρικού χωρίου S .

$$S = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, z \geq 0\} \text{ με μοναδιαία πυκνότητα μάζας.}$$
$$(\delta(x, y, z) = 1)$$

Υπολογίζουμε πρώτα τη συνολική μάζα του S :

$$\text{Μάζα}(S) = \iiint_S 1 \cdot dx dy dz = \text{όγκος}(S) = \frac{1}{2} \text{όγκος}(\bar{B}(\vec{0}, 1)) = \frac{2\pi}{3}$$

Έπειτα, παρατηρούμε ότι λόγω συμμετρίας το κέντρο μάζας πρέπει να βρίσκεται πάνω στον άξονα των z . Πράγματι το S είναι συμμετρικό ως προς τα επίπεδα $x=0$, $y=0$, ενώ οι συναρτήσεις $(x,y,z) \mapsto x$, $(x,y,z) \mapsto y$ είναι περιττές ως προς αυτά τα επίπεδα (βλ. Ασκ 9).

Άρα $\bar{x} = \bar{y} = 0$. Θα υπολογίσουμε τώρα το $\bar{z}$. Έχουμε

$$I = \iiint_S z \, dx \, dy \, dz = \iiint_{[0,1] \times [0,2\pi] \times [0,\frac{\pi}{2}]} \rho^3 \cos \varphi \sin \varphi \, d\rho \, d\theta \, d\varphi$$

επειδή $S = T([0,1] \times [0,2\pi] \times [0,\frac{\pi}{2}])$ όπου T ο ορθογώνιος μετασχηματισμός και $z = \rho \cos \varphi$

$$\text{και } \cos \varphi \sin \varphi = \frac{\sin 2\varphi}{2}.$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow I &= \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\pi/2} \rho^3 \frac{\sin 2\varphi}{2} \, d\varphi \right) d\theta \right) d\rho = \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} \frac{\rho^3}{2} \, d\varphi \right) d\rho = \int_0^1 \pi \rho^3 \, d\rho = \frac{\pi}{4} \\ &= \rho^3 \left[-\frac{\cos 2\varphi}{4} \right]_{\varphi=0}^{\varphi=\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2} \rho^3 \end{aligned}$$

$$\underline{\text{Συμπέρασμα:}} \quad \bar{z} = \frac{I}{M(S)} = \frac{\pi/4}{2\pi/3} = \frac{3}{8} \Rightarrow (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = (0, 0, \frac{3}{8})$$