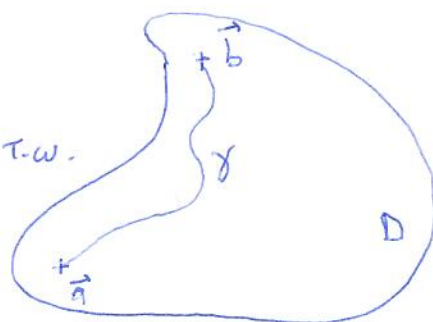


Ασκ 1: Έστω $D \subset \mathbb{R}^2$ συμπαγές χωρίο τ.ω το ∂D είναι μια πεπερασμένη ένωση γραμμικών συνεχών συναρτήσεων. Υποθέτουμε επίσης ότι το D είναι κατά τοξοά συνεκτικό: $\forall \vec{a}, \vec{b} \in D$, υπάρχει μία καμπύλη $\gamma: [0,1] \rightarrow D \subset \mathbb{R}^2$ τ.ω η γ είναι συνεχής και $\gamma(0) = \vec{a}$, $\gamma(1) = \vec{b}$.
Να δείχθεί ότι για κάθε συνεχή συνάρτηση $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, ισχύει

$$I = \iint_D f(x,y) dx dy = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{εμβαδόν του } D}}{A(D)} \cdot f(x_0, y_0) \quad \text{για κάποιο } (x_0, y_0) \in D. \quad (\text{ΘΜΤ})$$

Απ: Το D είναι συμπαγές, άρα $\exists \vec{a}, \vec{b} \in D$ τ.ω.

$$f(\vec{a}) = \min_D f \quad \text{και} \quad f(\vec{b}) = \max_D f$$



το D είναι κατά τοξοά συνεκτικό, άρα $\exists \gamma: [0,1] \rightarrow D$ συνεχής τ.ω $\gamma(0) = \vec{a}$, $\gamma(1) = \vec{b}$

Λόγω των ορίσμάτων $f(\vec{a}) \leq f(x,y) \leq f(\vec{b})$, $\forall (x,y) \in D$,

$$\text{έχουμε} \quad \underbrace{\iint_D f(\vec{a}) dx dy}_{\substack{\parallel \\ A(D)f(\vec{a})}} \leq \underbrace{\iint_D f(x,y) dx dy}_{\substack{\parallel \\ I}} \leq \underbrace{\iint_D f(\vec{b}) dx dy}_{\substack{\parallel \\ A(D)f(\vec{b})}}$$

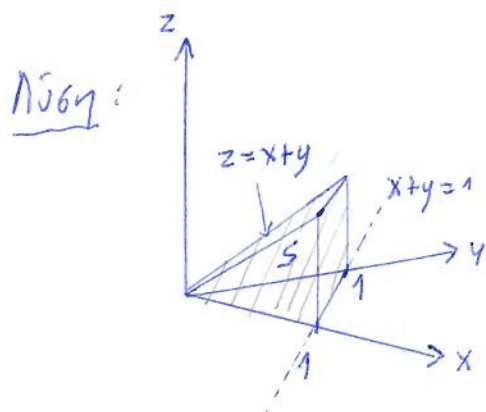
ή ισοδύναμα $f(\vec{a}) \leq \frac{I}{A(D)} \leq f(\vec{b})$. Τέλος, επειδή η

συνάρτηση $f \circ \gamma: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχής και $\begin{cases} f(\gamma(0)) = f(\vec{a}) \\ f(\gamma(1)) = f(\vec{b}) \end{cases}$

$\exists t_0 \in [0,1]$ τ.ω $f(\gamma(t_0)) = \frac{I}{A(D)}$. Άρα το $\int$ παίρνει το γινόμενο
είναι $(x_0, y_0) = \gamma(t_0) \in D$.

Άσκ 2: Έστω $S \subset \mathbb{R}^3$ το χωρίο που ορίζεται από τα επίπεδα $x=0$, $y=0$, $z=0$, $x+y=1$ και $z=x+y$.

Να υπολογιστεί το $\iiint_S x \, dx \, dy \, dz$



Έχουμε

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x \in [0,1], 0 \leq y \leq 1-x, 0 \leq z \leq x+y\}$$

$$\begin{aligned} \text{Άρα } \iiint_S x \, dx \, dy \, dz &= \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} \left(\int_0^{x+y} x \, dz \right) dy \right) dx = \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} (x^2 + xy) dy \right) dx \\ &= \int_0^1 \left[x^2 y + \frac{xy^2}{2} \right]_{y=0}^{y=1-x} dx \\ &= \int_0^1 \left(x^2(1-x) + \frac{x(1-x)^2}{2} \right) dx \\ &= \int_0^1 \left(x^2 - x^3 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2} \right) dx \\ &= \int_0^1 \left(\frac{x}{2} - \frac{x^3}{2} \right) dx \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \iiint_S x \, dx \, dy \, dz = \int_0^1 \frac{x-x^3}{2} \, dx = \left[\frac{x^2}{4} - \frac{x^4}{8} \right]_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{8}$$

Άσκ 3: Έστω $S \subset \mathbb{R}^3$ το στερεό που περικλείεται ανάμεσα στο παραβολοειδές $z=2x^2+y^2$ και την επιφάνεια $z=4-y^2$.

Να υπολογιστεί το $\iiint_S z \, dx \, dy \, dz$.

Λύση: Εξ' ορισμού $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 2x^2+y^2 \leq z \leq 4-y^2\}$

Θα προσδιορίσουμε το χωρίο $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 2x^2+y^2 \leq 4-y^2\}$

Ισχύει $2x^2+y^2 \leq 4-y^2 \Leftrightarrow x^2+y^2 \leq 2$, άρα $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 2\}$

Έχουμε λοιπόν

$$I = \iiint_S z \, dx \, dy \, dz = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \left(\int_{-\sqrt{2-x^2}}^{\sqrt{2-x^2}} \left(\int_{2x^2+y^2}^{4-y^2} z \, dz \right) dy \right) dx$$

$$= \left[\frac{z^2}{2} \right]_{z=2x^2+y^2}^{z=4-y^2} = \frac{(4-y^2)^2 - (2x^2+y^2)^2}{2}$$

$$= 8 - 2x^4 - 4y^2 - 2x^2y^2$$

$$\Rightarrow I = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \left(\int_{-\sqrt{2-x^2}}^{\sqrt{2-x^2}} (8 - 2x^4 - 4y^2 - 2x^2y^2) dy \right) dx = \iint_D (8 - 2x^4 - 4y^2 - 2x^2y^2) dx \, dy$$

και θα χρησιμοποιήσουμε τις πολικές συντεταγμένες $\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases} \begin{matrix} r \in [0, \sqrt{2}] \\ \theta \in [0, 2\pi] \end{matrix}$
για να υπολογίσουμε το τελευταίο ολοκλήρωμα:

$$I = \int_0^{\sqrt{2}} \left(\int_0^{2\pi} (8 - 2r^4 \cos^4 \theta - 4r^2 \sin^2 \theta - 2r^4 \sin^2 \theta \cos^2 \theta) r \, d\theta \right) dr$$

$$\bullet I_1 = \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta \, d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos 2\theta}{2} \, d\theta = \pi$$

$$\bullet I_2 = \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta \cos^2 \theta \, d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 2\theta}{4} \, d\theta = \int_0^{4\pi} \frac{\sin^2 t}{8} \, dt = \frac{\pi}{4}$$

$$\bullet I_3 = \int_0^{2\pi} \cos^4 \theta \, d\theta = \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta (1 - \sin^2 \theta) \, d\theta = \underbrace{\int_0^{2\pi} \cos^2 \theta \, d\theta}_{= I_1} - I_2 = \frac{3\pi}{4}$$

Συμπέρασμα : $I = \int_0^{\sqrt{2}} \left(16\pi r - \frac{3\pi}{2} r^5 - 4\pi r^3 - \frac{\pi}{2} r^5 \right) dr$

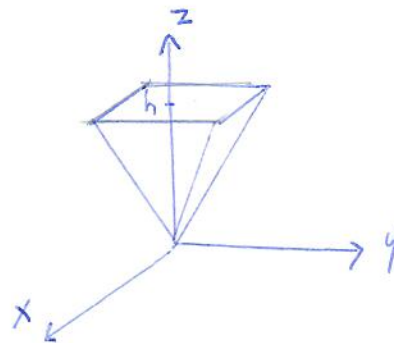
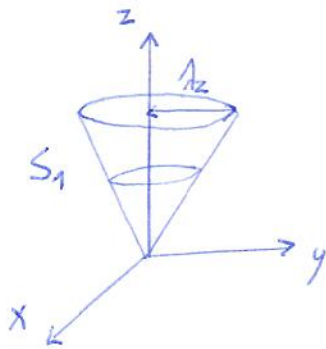
$$= \left[8\pi r^2 - \frac{3\pi}{12} r^6 - \pi r^4 - \frac{\pi}{12} r^6 \right]_{r=0}^{r=\sqrt{2}} = \frac{28\pi}{3}$$

Α6Κ4: Έστω ο κύβος $S_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z \in [0, 1], \sqrt{x^2 + y^2} \leq 1, z\}$

και η πυρμίδα $S_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z \in [0, h], |x| \leq A_z, |y| \leq A_z\}$

όπου $h, \lambda > 0$ σταθερές. Να υπολογιστούν οι όγκοι των S_1 και S_2 .

Λύση :



Γραφουμε $S_1 = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z \in [0, h], -Az \leq x \leq Az, |y| \leq \sqrt{A^2 z^2 - x^2} \}$

και έχουμε $\text{όγκος}(S_1) = \iiint_{S_1} dx dy dz = \int_0^h \left(\int_{-\lambda_z}^{\lambda_z} \left(\int_{-\sqrt{\lambda_z^2 - x^2}}^{\sqrt{\lambda_z^2 - x^2}} dy \right) dx \right) dz$

$$= \int_0^h \left(\int_{-A_z}^{A_z} 2\sqrt{A_z^2 - x^2} dx \right) dz$$

$$= \text{εμβαδόν} \text{ δίκην ακτίνας } \lambda_z = \pi \lambda_z^2$$

$$= \int_0^h \pi A^2 z^2 dz = \frac{\pi A^2 h^3}{3} = \frac{1}{3} \rho_{\text{άλη}} \times \dot{\psi}_{05}$$

Ομοίως, έχουμε $S_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z \in [0, h], -\lambda z \leq x \leq \lambda z, -\lambda z \leq y \leq \lambda z\}$
 και ογκος $S_2 = \int_0^h \int_{-\lambda z}^{\lambda z} \int_{-\lambda z}^{\lambda z} dx dy dz = \int_0^h (2\lambda z)^2 dz = \frac{8\lambda^2}{3} h^3$

και ογκος $S_2 = \iiint_{S_2} dx dy dz = \int_0^h \left(\int_{-Az}^{Az} \left(\int_{-Az}^{Az} dy \right) dx \right) dz = \int_0^h 4A^2 z^2 dz = \frac{4A^2 h^3}{3} = \frac{1}{3} \text{ βάρος υφους}$
 = εμβαδόν τετραγώνου
 με πλευρές μήκους $2Az$

ΑΣΚ 5 : Έστω $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχείς. Να δείχθεί ότι

$$I = \iint_{[a,b] \times [c,d]} f(x)g(y) dx dy = \left(\int_a^b f(x) dx \right) \left(\int_c^d g(y) dy \right) \quad \left[\begin{array}{l} a, b, c, d \in \mathbb{R} \text{ σταθερές} \\ a < b, c < d \end{array} \right]$$

Λύση : Έχουμε

$$I = \iint_{[a,b] \times [c,d]} f(x)g(y) dx dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x)g(y) dy \right) dx = \int_a^b (G(d) - G(c)) f(x) dx$$

$$= f(x) (G(d) - G(c)) \text{ όπου } G \text{ μία παράγωγος της } g$$

$$\text{Άρα } I = (G(d) - G(c)) \int_a^b f(x) dx = \left(\int_a^b f(x) dx \right) \left(\int_c^d g(y) dy \right)$$

ΑΣΚ 6 : Να δείχθεί ότι $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$

Λύση : Παρατηρούμε πρώτα ότι το ολοκλήρωμα $I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx < \infty$.

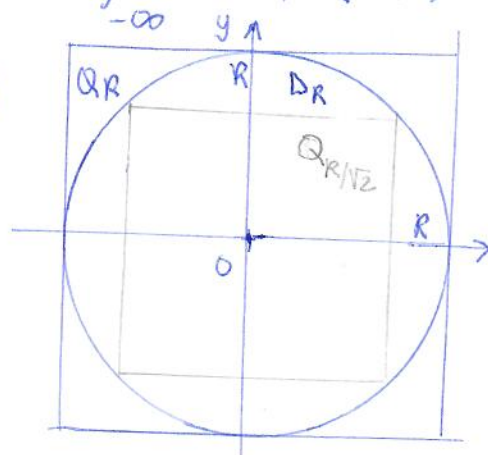
Έστω $Q_R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq R, |y| \leq R\}$

και $D_R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq R^2\}$

Υπολογίζουμε

$$I_R = \iint_{Q_R} e^{-x^2-y^2} dx dy = \iint_{[-R,R] \times [-R,R]} e^{-x^2} e^{-y^2} dx dy$$

$$\text{ΑΣΚ 5 (Fubini)} \Rightarrow \left(\int_{-R}^R e^{-x^2} dx \right)^2$$



Έπειτα υπολογίσουμε χρησιμοποιώντας πολικές συντεταγμένες

$$\begin{aligned} \text{Το } \tilde{I}_R &= \iint_{D_R} e^{-x^2-y^2} dx dy = \int_0^R \left(\int_0^{2\pi} r e^{-r^2} d\theta \right) dr = \int_0^R 2\pi r e^{-r^2} dr \\ &= \pi \left[-e^{-r^2} \right]_{r=0}^{r=R} = \pi - \pi e^{-R^2} \end{aligned}$$

Επειδή $Q_{R/\sqrt{2}} \subset D_R \subset Q_R$ και $e^{-x^2-y^2} \geq 0$ έχουμε για κάθε $R > 0$

$$(*) \quad I_{R/\sqrt{2}} \leq \tilde{I}_R \leq I_R \quad \text{με} \quad \begin{cases} \lim_{R \rightarrow \infty} I_R = \lim_{R \rightarrow \infty} I_{R/\sqrt{2}} = I^2 \\ \lim_{R \rightarrow \infty} \tilde{I}_R = \pi \end{cases}$$

$$\text{Άρα } I^2 = \pi \iff \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

Θα υπολογίσουμε τώρα τις ανισότητες (*). Έτσι όπως ορίσαμε το ολοκλήρωμα του Riemann, έχουμε

$$\tilde{I}_R = \iint_{Q_R} \varphi_R(x,y) dx dy \quad \text{όπου} \quad \varphi_R(x,y) = \begin{cases} e^{-x^2-y^2} & \text{αν } (x,y) \in D_R \\ 0 & \text{αν } (x,y) \in Q_R \setminus D_R \end{cases}$$

$$I_{R/\sqrt{2}} = \iint_{Q_R} \psi_R(x,y) dx dy \quad \text{όπου} \quad \psi_R(x,y) = \begin{cases} e^{-x^2-y^2} & \text{αν } (x,y) \in Q_{R/\sqrt{2}} \\ 0 & \text{αν } (x,y) \in Q_R \setminus Q_{R/\sqrt{2}} \end{cases}$$

$$\text{και ισχύει} \quad \psi_R \leq \varphi_R \leq e^{-x^2-y^2} \quad \text{στο } Q_R$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \iint_{Q_R} \psi_R(x,y) dx dy &\leq \iint_{Q_R} \varphi_R(x,y) dx dy \leq \iint_{Q_R} e^{-x^2-y^2} dx dy \\ &\parallel \quad \parallel \quad \parallel \\ I_{R/\sqrt{2}} &\quad \tilde{I}_R \quad I_R \end{aligned}$$

ΑΣΚ 7: Να υπολογιστεί το εμβαδόν της ελλείψης:

$$E = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} \leq 1 \right\} \quad \text{όπου } \alpha, \beta > 0 \text{ σταθερές.}$$

Λύση: Θεωρούμε το γραμμικό μετασχηματισμό $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = T(u, v) = \begin{pmatrix} \alpha u \\ \beta v \end{pmatrix}$$

με $DT(u, v) = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix}$ και $\det(DT(u, v)) = \alpha\beta$. Έχουμε λοιπόν

$$E = T(D) \quad \text{όπου } D = \left\{ (u, v) \in \mathbb{R}^2 : u^2 + v^2 \leq 1 \right\} \quad \text{και}$$

$$\left[u = \frac{x}{\alpha}, v = \frac{y}{\beta} \quad \text{αφά } u^2 + v^2 \leq 1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} \leq 1 \right]$$

$$\begin{aligned} \text{εμβαδόν } |E| &= \iint_E dx dy = \iint_D \underbrace{|\det(DT(u, v))|}_{=\alpha\beta} du dv = (\alpha\beta) \cdot \text{εμβαδόν}(D) \\ &= (\alpha\beta) \cdot \pi = \pi\alpha\beta \end{aligned}$$

ΑΣΚ 8: Να υπολογιστεί χρησιμοποιώντας κυλινδρικές συντεταγμένες, ο όγκος του κώνου $S = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z \in [0, h], \sqrt{x^2 + y^2} \leq \lambda z \right\}$ ($h, \lambda > 0$ σταθερές).

Λύση: Έστω T ο κυλινδρικός μετασχηματισμός (βλ §(5) γ)

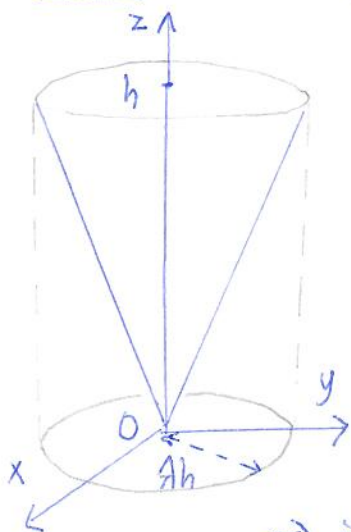
Τότε έχουμε $S = T(S^*)$ όπου

$$S^* = \left\{ (r, \theta, z) : r \in [0, \lambda h], \theta \in [0, 2\pi], \frac{r}{\lambda} \leq z \leq h \right\}$$

$$\begin{aligned} \text{Ενενώς } \text{όγκος}(S) &= \iiint_S dx dy dz = \iiint_{S^*} r dr d\theta dz \\ &= \int_0^{\lambda h} \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_{\frac{r}{\lambda}}^h r dz \right) d\theta \right) dr \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \text{όγκος}(S) = \int_0^{\lambda h} \left(\int_0^{2\pi} \left(h r - \frac{r^2}{\lambda} \right) d\theta \right) dr = \int_0^{\lambda h} \left(2\pi h r - \frac{2\pi}{\lambda} r^2 \right) dr$$

$$= \left[\pi h r^2 - \frac{2\pi}{3\lambda} r^3 \right]_{r=0}^{r=\lambda h} = \frac{\pi}{3} \lambda^2 h^3 = \frac{\pi \lambda^2 h^2}{3} \cdot h = \frac{\text{βάση}}{3} \cdot \text{ύψος}$$

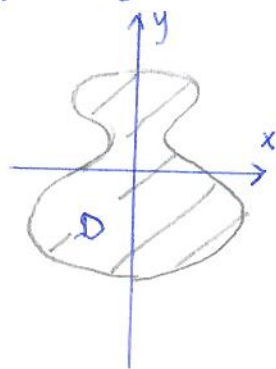


Άσκ 9 : Έστω $D \subset \mathbb{R}^2$ ένα στοιχειώδες χωρίο, συμμετρικό ως προς των άξονα των y : $(x,y) \in D \Leftrightarrow (-x,y) \in D$,

και έστω $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής τ.ω.

$$f(-x,y) = -f(x,y), \forall (x,y) \in D.$$

Να δείχθει ότι $\iint_D f(x,y) dx dy = 0$.



Λύση : Θεωρούμε το γραμμικό μετασχηματισμό $T(u,v) = (-u,v) = (x,y)$

Έχουμε $T(D) = D$ και $\det(DT(u,v)) = \det\left(\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = -1$.

$$\text{Άρα } \iint_D f(x,y) dx dy = \iint_D f(-u,v) du dv = - \iint_D f(u,v) du dv \Rightarrow \iint_D f(x,y) dx dy = 0$$