

Κεφ 2 : Στοιχεία τοπολογίας στο $\mathbb{R}^n$

① Ανοιχτά | κλειστά υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$

Ορ: Έστω $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$ και $r > 0$, τότε το υποσύνολο

$$B(\vec{a}, r) = \{ \vec{x} \in \mathbb{R}^n : \|\vec{x} - \vec{a}\| < r \} \quad (\text{αντίστοιχα } \overline{B}(\vec{a}, r) = \{ \vec{x} \in \mathbb{R}^n : \|\vec{x} - \vec{a}\| \leq r \})$$

του $\mathbb{R}^n$ ονομάζεται ανοιχτή μπάλα (αντίστοιχα κλειστή μπάλα) του $\mathbb{R}^n$ με κέντρο το $\vec{a}$ και ακτίνα r .

Παραδείγματα 1) Στο $\mathbb{R}$ (για $n=1$) οι ανοιχτές μπάλες είναι τα ανοιχτά διαστήματα $(a-r, a+r)$.

2) Στο $\mathbb{R}^2$ (για $n=2$) η μπάλα $B(\vec{0}, 1)$ είναι ο ανοιχτός μοναδιαίος δίσκος.

Ορ: Έστω U, F και Φ υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$

(i) Το U λέγεται ανοιχτό στο $\mathbb{R}^n$ αν για κάθε $\vec{x} \in U$, υπάρχει $r > 0$ τ.ω. $B(\vec{x}, r) \subset U$.

(ii) Το F λέγεται κλειστό στο $\mathbb{R}^n$ αν το συμπλήρωμά του $\mathbb{R}^n \setminus F$ είναι ανοιχτό στο $\mathbb{R}^n$.

(iii) Το Φ λέγεται φραγμένο αν υπάρχει $R > 0$ τ.ω. $\Phi \subset B(\vec{0}, R)$

Παραδείγματα 1) Το $\emptyset$ και το $\mathbb{R}^n$ είναι ανοιχτά και κλειστά.

2) Η ανοιχτή μπάλα $B(\vec{a}, r)$ είναι ανοιχτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$.

Πράγματι έστω $\vec{x} \in B(\vec{a}, r)$ και έστω $s = \|\vec{x} - \vec{a}\| < r$. Για κάθε $\vec{y} \in \mathbb{R}^n$ τ.ω $\|\vec{y} - \vec{x}\| < r - s$ ισχύει $\|\vec{y} - \vec{a}\| \leq \|\vec{y} - \vec{x}\| + \|\vec{x} - \vec{a}\| < r$.
 Άρα $B(\vec{x}, r-s) \subset B(\vec{a}, r)$ και συνεπώς το $B(\vec{a}, r)$ είναι ανοιχτό υποσύνολο.

3) Ομοίως, η κλειστή μπάλα $\bar{B}(\vec{a}, r)$ είναι κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$

4) Το σύνολο $(-1, 1) \times \{0\}$ δεν είναι ούτε ανοιχτό ούτε κλειστό στο $\mathbb{R}^2$.

Ορ: Έστω $A \subset \mathbb{R}^n$.

(i) Ένα σημείο $\vec{a} \in A$ λέγεται εσωτερικό σημείο του A αν

$$\exists r > 0 \text{ τ.ω. } B(\vec{a}, r) \subset A$$

Συμβολίζουμε με $\overset{\circ}{A}$ το σύνολο των εσωτερικών σημείων του A .

(ii) Ένα σημείο $\vec{b} \in \mathbb{R}^n \setminus A$ λέγεται εξωτερικό σημείο του A αν

$$\exists r > 0 \text{ τ.ω. } B(\vec{b}, r) \subset \mathbb{R}^n \setminus A$$

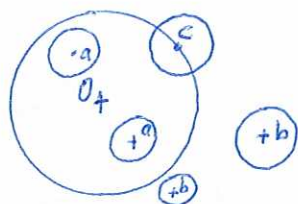
Συμβολίζουμε με $\text{ext}(A)$ το σύνολο των εξωτερικών σημείων του A .

(iii) Ένα σημείο $\vec{z} \in \mathbb{R}^n$ λέγεται συνοριακό σημείο του A αν

$$\forall r > 0 \text{ ισχύει } B(\vec{z}, r) \cap A \neq \emptyset \text{ και } B(\vec{z}, r) \cap (\mathbb{R}^n \setminus A) \neq \emptyset$$

Συμβολίζουμε με ∂A το σύνολο των συνοριακών σημείων του A .

Παραδείγματα 1) Στο $\mathbb{R}^2$ θεωρούμε την ανοιχτή μπάλα $B(\vec{0}, 1)$

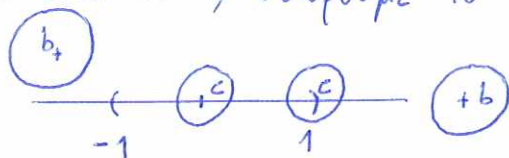


$$\text{Έχουμε } \overset{\circ}{B(\vec{0}, 1)} = B(\vec{0}, 1)$$

$$\text{ext}(B(\vec{0}, 1)) = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^2 : \|\vec{x}\| > 1\}$$

$$\begin{aligned} \partial B(\vec{0}, 1) &= \{\vec{x} \in \mathbb{R}^2 : \|\vec{x}\| = 1\} \\ &= \text{μοναδιαίος κύκλος} \end{aligned}$$

2) Στο $\mathbb{R}^2$, θεωρούμε το υποσύνολο $A = (-1, 1) \times \{0\}$



Έχουμε $\overset{\circ}{A} = \emptyset$, $\partial A = [-1, 1] \times \{0\}$

και $\text{ext } A = \mathbb{R}^2 \setminus \partial A$

Σχόλια 1) Το $\overset{\circ}{A}$ είναι ανοιχτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$. Πράγματι, έστω $\vec{a} \in \overset{\circ}{A}$ και $r > 0$ τ.ω. $B(\vec{a}, r) \subset A$. Για κάθε $\vec{x} \in B(\vec{a}, r)$ είδαμε ότι ισχύει $B(\vec{x}, r - \|\vec{x} - \vec{a}\|) \subset B(\vec{a}, r) \subset A$. Άρα $B(\vec{a}, r) \subset \overset{\circ}{A}$ και συνεπώς το $\overset{\circ}{A}$ είναι ανοιχτό.

2) Εξ' ορισμού, έχουμε $\text{ext}(A) = \overline{\mathbb{R}^n \setminus A}^{\circ}$ που είναι επίσης ανοιχτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$.

3) Το σημείο $\vec{x}$ ανήκει στο $\mathbb{R}^n \setminus \partial A$ αν $\exists r > 0$ τ.ω.

$$B(\vec{x}, r) \cap A = \emptyset \quad \text{ή} \quad B(\vec{x}, r) \cap (\mathbb{R}^n \setminus A) = \emptyset$$

δηλαδή $B(\vec{x}, r) \subset (\mathbb{R}^n \setminus A)$ ή $B(\vec{x}, r) \subset A$.

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι $\mathbb{R}^n \setminus \partial A = \overset{\circ}{A} \cup \text{ext}(A)$ και το σύνολο ∂A είναι κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$. Επιπλέον, κάθε $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ ανήκει είτε στο $\overset{\circ}{A}$, είτε στο ∂A , είτε στο $\text{ext}(A)$.

Ορ: Έστω $A \subset \mathbb{R}^n$. Η κλειστή θήκη του A είναι το σύνολο $\overset{\circ}{A} \cup \partial A$ που συμβολίζεται με $\overline{A}$ (προφανώς είναι κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$).

2) Ακολουθίες στο $\mathbb{R}^n$

Ορ: Λέμε ότι η ακολουθία $(\vec{a}_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^n$ συγκλίνει στο $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$ και γράφουμε $\lim_{k \rightarrow \infty} \vec{a}_k = \vec{a}$ όταν $\lim_{k \rightarrow \infty} \|\vec{a}_k - \vec{a}\| = 0$

Η σύγκλιση μιας ακολουθίας του $\mathbb{R}^n$ ανάγεται στη σύγκλιση των συνιστωσών της (βλ. Ασκ. 5):

Πρόταση: Έστω $(\vec{a}_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^n$ με $\vec{a}_k = \begin{pmatrix} a_{k1} \\ a_{k2} \\ \vdots \\ a_{kn} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$. Τότε έχουμε $\lim_{k \rightarrow \infty} \vec{a}_k = \vec{a}$ με $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ ανν $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{ki} = a_i, \forall i = 1, 2, \dots, n$.

Παράδειγμα 1) Η ακολουθία $\vec{a}_k = \begin{pmatrix} \frac{k}{2k+1} \\ k^2 \ln(1 + \frac{1}{k^2}) \end{pmatrix}$ συγκλίνει στο $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

2) Η ακολουθία $\vec{a}_k = \begin{pmatrix} k^2 \\ k\sqrt{2} \end{pmatrix}$ δεν συγκλίνει διότι $\lim_{k \rightarrow \infty} k^2 = +\infty$

Πράξεις: Έστω $(\vec{a}_k)_{k \in \mathbb{N}}, (\vec{b}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ δύο ακολουθίες του $\mathbb{R}^n$ και $(\lambda_k)_{k \in \mathbb{N}}$ μία ακολουθία του $\mathbb{R}$. Υποθέτουμε ότι $\lim_{k \rightarrow \infty} \vec{a}_k = \vec{a}$, $\lim_{k \rightarrow \infty} \vec{b}_k = \vec{b}$ και $\lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_k = \lambda$. Τότε, ισχύει $\lim_{k \rightarrow \infty} (\vec{a}_k + \vec{b}_k) = \vec{a} + \vec{b}$, $\lim_{k \rightarrow \infty} (\lambda_k \vec{a}_k) = \lambda \vec{a}$, $\lim_{k \rightarrow \infty} (\vec{a}_k \cdot \vec{b}_k) = \vec{a} \cdot \vec{b}$ κλπ.

Πορίσματα (i) Κάθε συγκλίνουσα ακολουθία ^{στο $\mathbb{R}^n$} είναι φραγμένη.

(ii) Κάθε φραγμένη ακολουθία του $\mathbb{R}^n$ έχει συγκλίνουσα υποακολουθία.

(Θεώρημα Bolzano-Weierstrass στο $\mathbb{R}^n$)

Απ : (i) Αφού η ακολουθία $(\vec{a}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ συγκλίνει στο $\mathbb{R}^n$, οι συντεταγμένες ακολουθίες $(a_{k1})_{k \in \mathbb{N}}, \dots, (a_{kn})_{k \in \mathbb{N}}$ συγκλίνουν στο $\mathbb{R}$ και είναι φραγμένες στο $\mathbb{R}$. Άρα και η $(\vec{a}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ είναι φραγμένη στο $\mathbb{R}^n$.

(ii) Για λόγους ανιούτητας παρουσιάζουμε το επιχείρημα στη διάσταση $n=2$.

Έστω $(\vec{a}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ με $\vec{a}_k = \begin{pmatrix} a_k \\ b_k \end{pmatrix}$, μία φραγμένη ακολουθία του $\mathbb{R}^2$.

Προφανώς, οι συντεταγμένες ακολουθίες $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}, (b_k)_{k \in \mathbb{N}}$ είναι επίσης φραγμένες στο $\mathbb{R}$. Γνωρίζουμε (από το θεώρημα B-W στο $\mathbb{R}$) ότι

υπάρχει μία υποακολουθία $(a_{k_m})_{m \in \mathbb{N}}$ της $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ που συγκλίνει στο $\mathbb{R}$.

Επείτα, εφαρμόζουμε πάλι το θεώρημα B-W στην φραγμένη ακολουθία

$(b_{k_m})_{m \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ και εξάγουμε μία υποακολουθία $(b_{k_{m_l}})_{l \in \mathbb{N}}$ που συγκλίνει

στο $\mathbb{R}$. Η $(\vec{a}_{k_{m_l}})_{l \in \mathbb{N}}$ είναι η ζητούμενη υποακολουθία της $(\vec{a}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ που συγκλίνει στο $\mathbb{R}^2$. $\square$

Πρόταση Έστω $A \subset \mathbb{R}^n$. Τότε το A είναι κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ αν για κάθε ακολουθία $(\vec{a}_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset A$ με $\lim_{k \rightarrow \infty} \vec{a}_k = \vec{a}$ στο $\mathbb{R}^n$, έχουμε ότι $\vec{a} \in A$.

Απ : Υποθέτουμε ότι το A είναι κλειστό και έστω $(\vec{a}_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset A$ τ.ω.

$\vec{a}_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \vec{a}$. Θα αποδείξουμε ότι $\vec{a} \in A$. Πράγματι αν $\vec{a} \in \mathbb{R}^n \setminus A$,

υπάρχει $r > 0$ τ.ω $B(\vec{a}, r) \subset \mathbb{R}^n \setminus A$ επειδή το $\mathbb{R}^n \setminus A$ είναι ανοιχτό.

Επομένως θα έχουμε $\|\vec{a}_k - \vec{a}\| < r$ για $k \geq k_0$ αρκετά μεγάλο. ΑΤΟΠΟ!

Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι κάθε συγκλίνουσα ακολουθία στοιχείων του A

έχει το όριο της στο A και ότι το A δεν είναι κλειστό. Έτσι το $\mathbb{R}^n \setminus A$

δεν είναι ανοιχτό, που σημαίνει ότι

$\exists \vec{a} \in \mathbb{R}^n \setminus A$ τ.ω $B(\vec{a}, r) \cap A \neq \emptyset$ για κάθε $r > 0$.

Ειδικότερα για κάθε $k = 1, 2, \dots$ υπάρχει ένα σημείο $\vec{a}_k \in \bar{B}(\vec{a}, \frac{1}{k}) \cap A$.

Εκ κατασκευής η ακολουθία $(\vec{a}_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset A$ συγκλίνει στο $\vec{a} \in \mathbb{R}^n \setminus A$, το οποίο είναι άτοπο. Άρα, το A πρέπει να είναι κλειστό. $\square$

③ Συμπαγή υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$

Ορ: Ένα υποσύνολο K του $\mathbb{R}^n$ λέγεται συμπαγές αν είναι κλειστό και φραγμένο στο $\mathbb{R}^n$.

Παράδειγμα: 1) Μία κλειστή μπάλα είναι συμπαγής.

2) Το σύνολο $\{\frac{1}{k}, k=1, 2, 3, \dots\}$ δεν είναι κλειστό στο $\mathbb{R}$,

αλλά το σύνολο $\{0\} \cup \{\frac{1}{k}, k=1, 2, 3, \dots\}$ είναι συμπαγές στο $\mathbb{R}$.

Πρόταση: Ένα υποσύνολο K του $\mathbb{R}^n$ είναι συμπαγές ανν για κάθε

ακολουθία $(\vec{a}_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset K$, υπάρχει υποακολουθία $(\vec{a}_{k_m})_{m \in \mathbb{N}}$ και

στοιχείο $\vec{a} \in K$, ώστε $\lim_{m \rightarrow \infty} \vec{a}_{k_m} = \vec{a}$.

Απ: Υποθέτουμε ότι το K είναι κλειστό και φραγμένο. Έστω

μία ακολουθία $(\vec{a}_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset K$. Τότε η $(\vec{a}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ είναι φραγμένη

και γνωρίζουμε από το θεώρημα B-W, ότι έχει μία συγκλίνουσα

υποακολουθία $(\vec{a}_{k_m})_{m \in \mathbb{N}}$. Επειδή το K είναι κλειστό, συμπεραίνουμε

ότι $\vec{a} = \lim_{m \rightarrow \infty} \vec{a}_{k_m} \in K$, που είναι το ζητούμενο.

Αντίστροφα, ας υποθέσουμε ότι το K δεν είναι υφαισμένο. Τότε για κάθε $k = 1, 2, 3, \dots$ υπάρχει $\vec{a}_k \in K$ τ.ω $\|\vec{a}_k\| > k$, και συνεπώς η ακολουθία $(\vec{a}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ δεν μπορεί να έχει καμία συγκλίνουσα υποακολουθία. Τέλος, αν το K δεν είναι κλειστό, θα υπάρχει μία ακολουθία $(\vec{a}_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset K$ που να συγκλίνει σε σημείο $\vec{a} \notin K$. Προφανώς, είναι αδύνατον να εξάγουμε από την $(\vec{a}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ μία υποακολουθία που να συγκλίνει σε στοιχείο του K . $\square$

④ Όρια συναρτήσεων μεταξύ Ευκλείδειων χώρων.

Θα γενικεύσουμε την έννοια του ορίου για συναρτήσεις $f: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ μεταξύ Ευκλείδειων χώρων.

- Η f ονομάζεται διανυσματική συνάρτηση αν $m > 1$ και βαθμωτή συνάρτηση αν $m = 1$. Η f ονομάζεται συνάρτηση πολλών μεταβλητών (αντίστοιχα μιας μεταβλητής) όταν $n > 1$ (αντίστοιχα $n = 1$).

• Σε ό,τι ακολουθεί το πεδίο ορισμού της f θα είναι ένα ανοιχτό υποσύνολο U του $\mathbb{R}^n$. Μας ενδιαφέρει να βρούμε το όριο της f καθώς το $\vec{x}$ τείνει είτε σε ένα σημείο του U είτε σε κάποιο συνοριακό σημείο του U .

- Ο λόγος για τον οποίο θεωρούμε μόνο συναρτήσεις που ορίζονται σε ανοιχτά σύνολα θα φανεί στο επόμενο κεφάλαιο. Όταν μελετήσουμε την παράγωγοιμότητα της f σε ένα σημείο $\vec{a}$, θα δούμε ότι η f πρέπει να

ορίζεται σε μία γείτονιά $B(\vec{a}, r)$ του $\vec{a}$. Όταν $n=m=1$ και μελετάμε την παραγωγισιμότητα της f στο $a \in \mathbb{R}$, γνωρίζουμε ότι η f πρέπει να ορίζεται σε κάποιο διάστημα $(a-r, a+r)$, $r>0$.

Ορ: Έστω $f: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ όπου U είναι ένα ανοιχτό σύνολο του $\mathbb{R}^n$,
έστω $\vec{a} \in U$ και έστω $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$. Λέμε ότι η $f(\vec{x})$ τείνει
(ένωση)

στο $\vec{b}$ καθώς το $\vec{x}$ τείνει στο $\vec{a}$ και γράφουμε $\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} f(\vec{x}) = \vec{b}$ όταν

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ τ.ω. για κάθε $x \in U$ που ικανοποιεί την $0 < \|\vec{x} - \vec{a}\| < \delta$
να ισχύει $\|f(\vec{x}) - \vec{b}\| < \varepsilon$

Παράδειγμα: 1) Είναι προφανές ότι $\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} \vec{x} = \vec{a}$ και αν $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$

ισχύει επίσης ότι $\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} x_i = a_i, \forall i = 1, 2, \dots, n$.

2) Θα δείξουμε ότι $\lim_{(x_1, x_2) \rightarrow (0,0)} \frac{2x_1^2 x_2}{x_1^2 + x_2^2} = 0$. Πράγματι, έχουμε

$$\left| \frac{2x_1^2 x_2}{x_1^2 + x_2^2} \right| \leq \left| \frac{2x_1^2 x_2}{x_1^2} \right| = 2|x_2|. \text{ Άρα για δεδομένο } \varepsilon > 0, \text{ επιλέγουμε}$$

$\delta = \frac{\varepsilon}{2}$ και βλέπουμε ότι για κάθε $\vec{x} = (x_1, x_2)$ που ικανοποιεί την

$$0 < \|\vec{x} - \vec{0}\| < \delta \text{ ισχύει } \left| \frac{2x_1^2 x_2}{x_1^2 + x_2^2} - 0 \right| \leq 2|x_2| \leq 2\|\vec{x}\| < \varepsilon$$

Πρόταση (Μοναδικότητα του ορίου)

Αν $\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} f(\vec{x}) = \vec{b}_1$ και $\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} f(\vec{x}) = \vec{b}_2$, τότε $\vec{b}_1 = \vec{b}_2$.

Απ: $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_1 > 0 \text{ τ.ω. } 0 < \|\vec{x} - \vec{a}\| < \delta_1 \Rightarrow \|f(\vec{x}) - \vec{b}_1\| < \varepsilon$
 $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_2 > 0 \text{ τ.ω. } 0 < \|\vec{x} - \vec{a}\| < \delta_2 \Rightarrow \|f(\vec{x}) - \vec{b}_2\| < \varepsilon$

Άρα για κάθε $\varepsilon > 0$ μπορούμε να επιλέξουμε ένα $\vec{x}_\varepsilon \in U$ τ.ω. $0 < \|\vec{x}_\varepsilon - \vec{a}\| < \min(\delta_1, \delta_2)$

και έχουμε $\left. \begin{array}{l} \|f(\vec{x}_\varepsilon) - \vec{b}_1\| < \varepsilon \\ \|f(\vec{x}_\varepsilon) - \vec{b}_2\| < \varepsilon \end{array} \right\} \Rightarrow \|\vec{b}_1 - \vec{b}_2\| < 2\varepsilon$. Συμπεραίνουμε λοιπόν
 ότι $\vec{b}_1 = \vec{b}_2$ $\square$ δυνατότητα

Πρόταση (Πράξεις) Έστω $f, g: U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ όπου U είναι ανοιχτό σύνολο, έστω $\vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^m$, έστω $\lambda: U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ και $l \in \mathbb{R}$. Θεωρούμε επίσης ένα σημείο $\vec{a} \in U \cup \partial U$. Τότε

(i) $\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} f(\vec{x}) = \vec{b}$ και $\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} g(\vec{x}) = \vec{c} \Rightarrow \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} (f(\vec{x}) + g(\vec{x})) = \vec{b} + \vec{c}$

(ii) $\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} f(\vec{x}) = \vec{b}$ και $\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} \lambda(\vec{x}) = l \Rightarrow \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} (\lambda(\vec{x}) f(\vec{x})) = l \vec{b}$
 $\quad \quad \quad \mathbb{R} \quad \quad \mathbb{R}^m$

(iii) $\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} \lambda(\vec{x}) = l \neq 0 \Rightarrow \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} \frac{1}{\lambda(\vec{x})} = \frac{1}{l}$

(iv) $\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} f(\vec{x}) = \vec{b}$ και $\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} g(\vec{x}) = \vec{c} \Rightarrow \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} f(\vec{x}) \cdot g(\vec{x}) = \vec{b} \cdot \vec{c}$
 $\quad \quad \quad f(\vec{x}) \times g(\vec{x}) = \vec{b} \times \vec{c} \text{ (αν } m=3)$

(v) Αν $f(\vec{x}) = \begin{pmatrix} f_1(\vec{x}) \\ \vdots \\ f_m(\vec{x}) \end{pmatrix}$ όπου $f_i: U \rightarrow \mathbb{R}$, $i=1, \dots, m$ είναι οι συνιστώσες

συναρτήσεις, τότε $\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} f(\vec{x}) = \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \Leftrightarrow \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} f_i(\vec{x}) = b_i \quad \forall i=1, \dots, m$

Απ: (i) Εξ' ορισμού
$$\begin{cases} \forall \varepsilon > 0 \exists \delta_1 > 0 \text{ τ.ω. } 0 < \|\vec{x} - \vec{a}\| < \delta_1 \Rightarrow \|f(\vec{x}) - \vec{b}\| < \frac{\varepsilon}{2} \\ \forall \varepsilon > 0 \exists \delta_2 > 0 \text{ τ.ω. } 0 < \|\vec{x} - \vec{a}\| < \delta_2 \Rightarrow \|g(\vec{x}) - \vec{c}\| < \frac{\varepsilon}{2} \end{cases}$$

Άρα για $0 < \|\vec{x} - \vec{a}\| < \min\{\delta_1, \delta_2\}$, έχουμε $\|(f(\vec{x}) + g(\vec{x})) - (\vec{b} + \vec{c})\| < \varepsilon$ που είναι το ζητούμενο.

Το (ii) και το (iii) αποδεικνύονται ^{επίσης} όπως και στην περίπτωση βαθμωτών συναρτήσεων μιας μεταβλητής.

Το (v) προκύπτει από τις ανισότητες:

$$|f_i(\vec{x}) - b_i| \leq \|f(\vec{x}) - \vec{b}\| \leq |f_1(\vec{x}) - b_1| + \dots + |f_m(\vec{x}) - b_m|$$

$\uparrow$
 $\forall i=1, \dots, m$

(βλ. Ασκ 2, Κεφ 1)

Από το (v), συμπεραίνουμε εύκολα το (iv) $\square$

Πρόταση: Έστω $f: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ όπου U είναι ανοιχτό σύνολο, έστω

$\vec{a} \in U \cup \partial U$ και $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$. Τότε έχουμε $\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} f(\vec{x}) = \vec{b}$ ανν για κάθε

ακολουθία $(\vec{x}_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset U \setminus \{\vec{a}\}$ τ.ω. $\lim_{k \rightarrow \infty} \vec{x}_k = \vec{a}$ ισχύει $\lim_{k \rightarrow \infty} f(\vec{x}_k) = \vec{b}$.

Απ: Αν $\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} f(\vec{x}) = \vec{b}$ και $(\vec{x}_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset U \setminus \{\vec{a}\}$ είναι μία ακολουθία τ.ω.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \vec{x}_k = \vec{a}, \text{ έχουμε } \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \text{ τ.ω. } 0 < \|\vec{x} - \vec{a}\| < \delta \Rightarrow \|f(\vec{x}) - \vec{b}\| < \varepsilon$$

$$\text{και } \exists K_\delta \text{ τ.ω. } k \geq K_\delta \Rightarrow 0 < \|\vec{x}_k - \vec{a}\| < \delta.$$

Άρα για $k \geq K_\delta$ ισχύει $\|f(\vec{x}_k) - \vec{b}\| < \varepsilon$ που είναι το ζητούμενο.

Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι δεν ισχύει $\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} f(\vec{x}) = \vec{b}$. Επομένως

$$\exists \varepsilon > 0 \text{ τ.ω για κάθε } \delta > 0, \text{ υπάρχει } \vec{x}_\delta \neq \vec{a} \text{ που ικανοποιεί } \begin{cases} \|\vec{x}_\delta - \vec{a}\| < \delta \\ \|f(\vec{x}_\delta) - \vec{b}\| \geq \varepsilon. \end{cases}$$

$\cap$
 U

Επιλέγοντας $\delta = \frac{1}{K}$ με $K = 1, 2, \dots$, κατασκευάζουμε μία ακολουθία

$(\vec{x}_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset U \setminus \{\vec{a}\}$ τ.ω. $\lim_{k \rightarrow \infty} \vec{x}_k = \vec{a}$, αλλά η ακολουθία $(f(\vec{x}_k))_{k \in \mathbb{N}}$ ΔΕΝ τείνει στο $\vec{b}$, καθώς $K \rightarrow \infty$. $\square$

Παράδειγμα : Έστω $f(x_1, x_2) = \frac{x_1^2}{x_1^2 + x_2^2}$, $f: \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$.

Εφαρμόζοντας την προηγούμενη Πρόταση, θα δείξουμε ότι η f ΔΕΝ τείνει σε κάποιο όριο, καθώς το $(x_1, x_2) \rightarrow (0, 0)$. Θεωρούμε λοιπόν δύο

ακολουθίες : την $\vec{x}_k = (\frac{1}{k}, 0)$ και την $\vec{y}_k = (0, \frac{1}{k})$ που τείνουν στο

$(0, 0)$, καθώς το $k \rightarrow \infty$. Έχουμε ότι $f(\vec{x}_k) = 1$ και $f(\vec{y}_k) = 0$.

Αφού $\lim_{k \rightarrow \infty} f(\vec{x}_k) \neq \lim_{k \rightarrow \infty} f(\vec{y}_k)$ συμπεραίνουμε ότι το $\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{0}} f(\vec{x})$ ΔΕΝ

υπάρχει.

⑤ Συνέχεια

Ορ : Έστω $f: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ μια συνάρτηση που ορίζεται στο ανοιχτό σύνολο U και έστω $\vec{a} \in U$. Λέμε ότι η f είναι συνεχής στο $\vec{a}$ όταν

$$\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} f(\vec{x}) = f(\vec{a}) \Leftrightarrow \left\{ \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ τ.ω. } \left\{ \begin{array}{l} \|\vec{x} - \vec{a}\| < \delta \\ \vec{x} \in U \end{array} \right\} \Rightarrow \|f(\vec{x}) - f(\vec{a})\| < \varepsilon \right.$$

Λέμε ότι η f είναι συνεχής στο U όταν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του U .

Πρόταση (Πράξεις) Έστω $f, g: U \rightarrow \mathbb{R}^m$ και $\lambda: U \rightarrow \mathbb{R}$ όπου $U \subset \mathbb{R}^n$ είναι ανοιχτό σύνολο. Έστω επίσης $\vec{a} \in U$. Τότε, αν οι f, g, λ είναι συνεχείς στο $\vec{a}$, το ίδιο ισχύει για τις συνάρτησεις $f+g, \lambda g, f \cdot g, f \times g$ (αν $m=3$). Με την προϋπόθεση ότι $\lambda(\vec{a}) \neq 0$, η συνάρτηση $\frac{1}{\lambda}$ είναι και αυτή συνεχής στο $\vec{a}$.

Πρόταση: Έστω $f: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ όπου U είναι ανοιχτό σύνολο και έστω $\vec{a} \in U$. Τότε η $f(\vec{x}) = (f_1(\vec{x}), f_2(\vec{x}), \dots, f_m(\vec{x}))$ είναι συνεχής στο $\vec{a}$ αν και μόνο αν κάθε μία από τις συνιστώσες συναρτήσεις $f_1, f_2, \dots, f_m: U \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο $\vec{a}$.

Παραδείγματα: Οι γραμμικές και πολυωνυμικές συναρτήσεις είναι συνεχείς στο $\mathbb{R}^n$.

Πρόταση (Σύνθεση): Έστω $f: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ και $g: V \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^p$ όπου U είναι ανοιχτό σύνολο του $\mathbb{R}^n$ και $f(U) \subset V$.

Αν η f είναι συνεχής στο $\vec{a}$ και η g είναι συνεχής στο $f(\vec{a})$, τότε και η $g \circ f$ είναι συνεχής στο $\vec{a}$.

Απ: Εξ' ορισμού, έχουμε

$$\left[\begin{array}{l} \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \text{ τ.ω. } \|\vec{y} - f(\vec{a})\| < \delta, \vec{y} \in V \Rightarrow \|g(\vec{y}) - g(f(\vec{a}))\| < \varepsilon \\ \exists \alpha > 0 \text{ τ.ω. } \|\vec{x} - \vec{a}\| < \alpha, \vec{x} \in U \Rightarrow \|f(\vec{x}) - f(\vec{a})\| < \delta \end{array} \right.$$

Άρα $\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0$ τ.ω. $\|\vec{x} - \vec{a}\| < \alpha, \vec{x} \in U \Rightarrow \|g(f(\vec{x})) - g(f(\vec{a}))\| < \varepsilon$ που είναι το ζητούμενο $\square$

Πρόταση: Έστω $f: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ όπου U είναι ανοιχτό σύνολο του $\mathbb{R}^n$ και έστω K ένα συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ που περιέχεται στο U . Υποθέτουμε ότι η f είναι συνεχής σε κάθε σημείο του K .

Τότε, υπάρχει $\vec{x}_{\min} \in K$ τ.ω. $f(\vec{x}_{\min}) = \min_K f$ και $\vec{x}_{\max} \in K$ τ.ω. $f(\vec{x}_{\max}) = \max_K f$.

Απ: Έστω $\mu = \inf_K f$ και έστω $(\vec{x}_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset K$ τ.ω. $\lim_{k \rightarrow \infty} f(\vec{x}_k) = \mu$

Επειδή το K είναι συμπαγές, υπάρχει μία υπο ακολουθία $(\vec{x}_{k_m})_{m \in \mathbb{N}}$ τ.ω.

$\lim_{m \rightarrow \infty} \vec{x}_{k_m} = \vec{x}_{\min} \in K$. Άρα λόγω της συνέχειας της f στο $\vec{x}_{\min}$, συμπεραίνουμε ότι $f(\vec{x}_{\min}) = \lim_{m \rightarrow \infty} f(\vec{x}_{k_m}) = \mu$. Η απόδειξη για το $\vec{x}_{\max}$ είναι ανάλογη $\square$