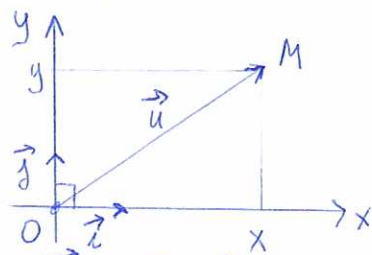


Κεφ 1 : Η γεωμετρία του Ευκλείδειου χώρου

① Καρτεσιανές συντεταγμένες στο επίπεδο / στο τριδιάστατο (3D) χώρο

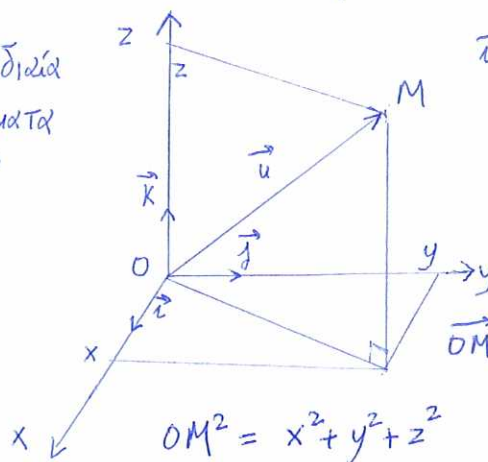


$$\vec{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$$

$$OM^2 = x^2 + y^2$$

Πυθαγόρειο Θεώρημα

$\vec{i}, \vec{j}$: μοναδιαία
διανύσματα
 $\vec{i} \perp \vec{j}$



$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$: μοναδιαία
διανύσματα
ανά δύο κάθετα

$$\vec{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

$$OM^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

- Κάθε σημείο M (διάνυσμα $\vec{u} = \vec{OM}$) του επιπέδου προσδιορίζεται

μοναδικά από τις συντεταγμένες του $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
(τις συνιστώσες του)

- Ομοίως, κάθε σημείο M (διάνυσμα $\vec{u} = \vec{OM}$) του 3D χώρου

προσδιορίζεται μοναδικά από τις συντεταγμένες του $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.
(τις συνιστώσες του)

② Ο διανυσματικός χώρος $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 1$)

Ορ: Ο n -διάστατος Ευκλείδειος χώρος είναι το σύνολο

$$\mathbb{R}^n = \{ \vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) : x_i \in \mathbb{R}, \forall i = 1, 2, \dots, n \}$$

των διατεταγμένων n -άδων πραγματικών αριθμών.

- Πράξεις: αν $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$, $\vec{y} = (y_1, \dots, y_n)$ είναι δύο στοιχεία του $\mathbb{R}^n$ και αν $\lambda \in \mathbb{R}$, ορίζουμε:

$$\vec{x} + \vec{y} = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$$

$$\vec{x} - \vec{y} = (x_1 - y_1, \dots, x_n - y_n)$$

$$-\vec{x} = (-x_1, \dots, -x_n)$$

$$\lambda \vec{x} = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n)$$

Συμβολίζουμε με $\vec{0}$ ή 0 το μηδενικό στοιχείο $(0, \dots, 0)$.

Με αυτές τις πράξεις το σύνολο $\mathbb{R}^n$ γίνεται ένας διανυσματικός χώρος.

(συνήθως)

- Η κανονική βάση του $\mathbb{R}^n$ αποτελείται από τα διανύσματα

$$\vec{e}_1 = (1, 0, \dots, 0), \vec{e}_2 = (0, 1, 0, \dots, 0) \dots \vec{e}_n = (0, \dots, 0, 1)$$

- Κάθε διάνυσμα $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ γράφεται μοναδικά $\vec{x} = x_1 \vec{e}_1 + \dots + x_n \vec{e}_n$.

Το σημείο M τ.ω. $\vec{OM} = \vec{x}$ έχει συντεταγμένες $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ στο σύστημα $(0, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$

③ Εσωτερικό γινόμενο στο $\mathbb{R}^n$

ορ: Ορίζουμε επίσης το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων

$$\vec{x} = (x_1, \dots, x_n) \text{ και } \vec{y} = (y_1, \dots, y_n):$$

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n \in \mathbb{R} \text{ (είναι ένας πραγματικός αριθμός).}$$

(Άλλοι συμβολισμοί $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle$ ή $(\vec{x}, \vec{y})$.)

Ιδιότητες (προκύπτουν άμεσα από τον ορισμό)

$$(i) \quad \vec{x} \cdot \vec{y} = \vec{y} \cdot \vec{x}, \quad \forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$$

$$(ii) \quad (\vec{x}_1 + \vec{x}_2) \cdot \vec{y} = \vec{x}_1 \cdot \vec{y} + \vec{x}_2 \cdot \vec{y}, \quad \forall \vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$$

$$(iii) \quad (\lambda \vec{x}) \cdot \vec{y} = \lambda (\vec{x} \cdot \vec{y}), \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$$

$$(iv) \quad \vec{x} \cdot \vec{x} \geq 0, \quad \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n$$

$$(v) \quad \vec{x} \cdot \vec{x} = 0 \iff \vec{x} = \vec{0}$$

$$(vi) \quad \vec{0} \cdot \vec{y} = 0, \quad \forall \vec{y} \in \mathbb{R}^n$$

(vii) Για κάθε $\vec{y} \in \mathbb{R}^n$ φεξιδιαγόμενο, η συνάρτηση
 $\mathbb{R}^n \ni x \mapsto \vec{x} \cdot \vec{y} \in \mathbb{R}$ είναι γραμμική.

Ορ: Λέμε ότι δύο διανύσματα $\vec{x}$ και $\vec{y}$ είναι κάθετα
και γράφουμε $\vec{x} \perp \vec{y}$ όταν ισχύει $\vec{x} \cdot \vec{y} = 0$.

(4) Ευκλείδεια νόρμα στο $\mathbb{R}^n$ - Απόσταση στο $\mathbb{R}^n$

Ορ: Αν $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, ο αριθμός

$$\|\vec{x}\| = (\vec{x} \cdot \vec{x})^{1/2} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2} \geq 0$$

καλείται Ευκλείδεια νόρμα του $\vec{x}$.

• Η Ευκλείδεια νόρμα έχει τις εξής ιδιότητες :

$$(N1) \quad \|\vec{x}\| \geq 0, \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n \text{ και } \|\vec{x}\| = 0 \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{0}$$

$$(N2) \quad \|\lambda \vec{x}\| = |\lambda| \|\vec{x}\|, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n$$

$$(N3) \quad \|\vec{x} + \vec{y}\| \leq \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|, \forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n \text{ (τριγωνική ανισότητα)}$$

Απ (N3) : Θα αποδείξουμε πρώτα την ανισότητα των Cauchy-Schwarz :

$$(CS) \quad |\vec{x} \cdot \vec{y}| \leq \|\vec{x}\| \|\vec{y}\| \quad \forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$$

και ισχύει $|\vec{x} \cdot \vec{y}| = \|\vec{x}\| \|\vec{y}\|$ αν τα διανύσματα $\vec{x}$ και $\vec{y}$ είναι συγχρημικά

Απ (CS): (1) Αν $\vec{x} = \vec{0}$, έχουμε $|\vec{x} \cdot \vec{y}| = 0 = \|\vec{x}\| \|\vec{y}\|$.

(2) Αν $\vec{x} \neq \vec{0}$ και $\vec{y} \in \mathbb{R}^n$ είναι φιζαριόμενα, θεωρούμε για $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \text{το τριώνυμο } P(\lambda) &= (\lambda \vec{x} + \vec{y}) \cdot (\lambda \vec{x} + \vec{y}) \geq 0 \quad (\text{βλ (iv)}) \\ &= \lambda^2 (\vec{x} \cdot \vec{x}) + 2\lambda (\vec{x} \cdot \vec{y}) + \vec{y} \cdot \vec{y} \\ &= \lambda^2 \|\vec{x}\|^2 + 2\lambda (\vec{x} \cdot \vec{y}) + \|\vec{y}\|^2 \end{aligned}$$

Επειδή ισχύει $P(\lambda) \geq 0, \forall \lambda \in \mathbb{R}$, η διακρίνουσα του τριωνύμου

$$\Delta = 4((\vec{x} \cdot \vec{y})^2 - \|\vec{x}\|^2 \|\vec{y}\|^2) \text{ είναι } \leq 0, \text{ άρα } |\vec{x} \cdot \vec{y}| \leq \|\vec{x}\| \|\vec{y}\|.$$

Επιπλέον αν έχουμε $|\vec{x} \cdot \vec{y}| = \|\vec{x}\| \|\vec{y}\| \Leftrightarrow \Delta = 0$, τότε το τριώνυμο

$$\mu\theta\epsilon\nu\acute{\iota}\zeta\epsilon\tau\alpha \text{ για κάποιο } \lambda_0 \in \mathbb{R}: P(\lambda_0) = \|\lambda_0 \vec{x} + \vec{y}\|^2 = 0.$$

Συμπεραίνουμε λοιπόν (βλ (N1)) ότι $\lambda_0 \vec{x} + \vec{y} = \vec{0} \Rightarrow \vec{x}$ και $\vec{y}$ συγχρημικά.

Αντίστροφα, αν τα $\vec{x}$ και $\vec{y}$ είναι συγχρηματικά, έχουμε $\vec{y} = \lambda \vec{x}$
για κάποιο $\lambda \in \mathbb{R}$ και $|\vec{x} \cdot \vec{y}| = |\lambda| \|\vec{x}\|^2 = \|\vec{x}\| \|\vec{y}\|$. $\square$

Από την ανισότητα των C-S συμπεραίνουμε εύκολα την τριγωνική ανισότητα.
Πράγματι, υπολογίζουμε:

$$\begin{aligned} \|\vec{x} + \vec{y}\|^2 &= (\vec{x} + \vec{y}) \cdot (\vec{x} + \vec{y}) = \|\vec{x}\|^2 + 2(\vec{x} \cdot \vec{y}) + \|\vec{y}\|^2 \\ &\leq \|\vec{x}\|^2 + 2\|\vec{x}\|\|\vec{y}\| + \|\vec{y}\|^2 = (\|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|)^2 \quad \square \\ &\quad \uparrow \\ &\quad \text{(C.S)} \end{aligned}$$

Ορ: Μία συνάρτηση από το $\mathbb{R}^n$ στο $\mathbb{R}$ που έχει τις παραπάνω
ιδιότητες (N1), (N2) και (N3) καλείται νόρμα.

Παραδείγματα: Οι συναρτήσεις:

$$\|\vec{x}\|_1 = |x_1| + |x_2| + \dots + |x_n|$$

$$\text{και } \|\vec{x}\|_\infty = \max_{i=1, \dots, n} |x_i|$$

$$(\vec{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n)$$

είναι νόρμες του $\mathbb{R}^n$. Είναι προφανές ότι ικανοποιούν τις ιδιότητες
(N1) και (N2). Θα επαληθεύσουμε ότι ικανοποιούν επίσης την (N3).

Για την $\|\cdot\|_1$, έχουμε

$$\|\vec{x} + \vec{y}\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i + y_i| \leq \sum_{i=1}^n (|x_i| + |y_i|) = \|\vec{x}\|_1 + \|\vec{y}\|_1.$$

Για την $\|\cdot\|_\infty$, έχουμε για κάθε $i = 1, \dots, n$:

$$|x_i + y_i| \leq |x_i| + |y_i| \leq \|\vec{x}\|_\infty + \|\vec{y}\|_\infty, \text{ άρα } \|\vec{x} + \vec{y}\|_\infty = \max_{i=1, \dots, n} |x_i + y_i| \leq \|\vec{x}\|_\infty + \|\vec{y}\|_\infty.$$

ορ: Η Ευκλείδεια απόσταση d μεταξύ των διανυσμάτων $\vec{x} = \vec{OM}$ και $\vec{y} = \vec{ON}$ του $\mathbb{R}^n$ (ή μεταξύ των σημείων M και N) δίνεται από τη σχέση:

$$d(\vec{x}, \vec{y}) = d(M, N) = \|\vec{x} - \vec{y}\| = \|\vec{MN}\|$$

Είναι φανερό ότι $d(\vec{x}, \vec{y}) = d(\vec{y}, \vec{x}) \geq 0$ και ότι

$d(\vec{x}, \vec{y}) = 0 \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{y}$. Επίσης, ισχύει η τριγωνική ανισότητα:

$$d(\vec{x}, \vec{y}) \leq d(\vec{x}, \vec{z}) + d(\vec{z}, \vec{y})$$

ορ: Μία βάση $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n)$ του $\mathbb{R}^n$ λέγεται ορθοκανονική όταν

ικανοποιεί $\|\vec{v}_i\| = 1, \forall i = 1, \dots, n$ (μοναδιαία διανύσματα)
και $\vec{v}_i \cdot \vec{v}_j = 0, \forall i \neq j, 1 \leq i, j \leq n$. (ανά δύο κάθετα)

Προφανώς η κανονική βάση $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$ είναι ορθοκανονική.

Παρατήρηση: Ταυτίζοντας την κανονική βάση $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ με τη βάση $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$

$(\vec{x}, \vec{y})$ του Καρτεσιανού επιπέδου, βλέπουμε ότι
 $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{k})$ " " τριδιάστατου χώρου

1) η νόρμα $\|\cdot\|$ μετράει το μήκος των διανυσμάτων όπως στην Ευκλείδεια γεωμετρία.

2) Ο παραπάνω ορισμός της απόστασης d ταυτίζεται με τον ορισμό της Ευκλείδειας γεωμετρίας.

3) Ο ορισμός των κάθετων διανυσμάτων από τη σχέση $\vec{x} \cdot \vec{y} = 0$ ταυτίζεται με τον ορισμό της Ευκλείδειας γεωμετρίας.

Αφ' ενός, έχουμε $\|\vec{x} - \vec{y}\|^2 = (\vec{x} - \vec{y}) \cdot (\vec{x} - \vec{y}) = \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2 - 2\vec{x} \cdot \vec{y}$.

Γράφοντας $\vec{x} = \vec{OM}$ και $\vec{y} = \vec{ON}$, βλέπουμε ότι ισχύει $\vec{x} \cdot \vec{y} = 0$ ανν

$$\|\vec{x} - \vec{y}\|^2 = \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2 \Leftrightarrow MN^2 = OM^2 + ON^2.$$

Αφ' ετέρου, στα πλαίσια της Ευκλείδειας γεωμετρίας, το Πυθαγόρειο

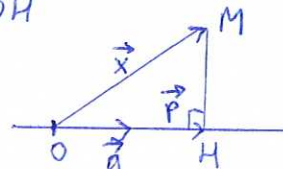
Θεώρημα αποδεικνύει ότι ισχύει $MN^2 = OM^2 + ON^2$ ανν η γωνία $\widehat{MON}$ είναι ορθή.

⑤ Ορθογώνια προβολή - γωνία

Ορ: Έστω $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ και $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$, $\vec{a} \neq \vec{0}$. Η ορθογώνια προβολή του $\vec{x} = \vec{OM}$ επί του $\vec{a}$ είναι το διάνυσμα $\vec{p} = \vec{OH}$

τ.ω. $\vec{p} \parallel \vec{a}$ και $\vec{x} - \vec{p} = \vec{HM} \perp \vec{a}$
($\vec{p}$ και $\vec{a}$ ευθυγραμμικά)

Θα αποδείξουμε ότι $\boxed{\vec{p} = \frac{\vec{x} \cdot \vec{a}}{\|\vec{a}\|^2} \vec{a}}$



Πράγματι, εξ' ορισμού έχουμε $\vec{p} \parallel \vec{a} \Leftrightarrow \vec{p} = \lambda \vec{a}$ για κάποιο $\lambda \in \mathbb{R}$.

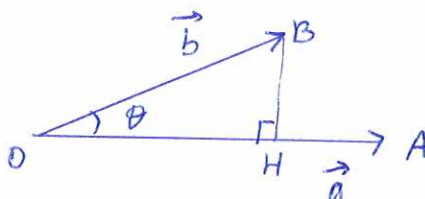
Επιπλέον, αφού $\vec{x} - \vec{p} \perp \vec{a}$, το λ είναι η λύση της εξίσωσης:

$$(\vec{x} - \vec{p}) \cdot \vec{a} = (\vec{x} - \lambda \vec{a}) \cdot \vec{a} = 0 \Leftrightarrow \lambda \|\vec{a}\|^2 = \vec{x} \cdot \vec{a} \quad \square$$

Ορ: Έστω $\vec{a} = \vec{OA}$ και $\vec{b} = \vec{OB}$ μη μηδενικά διανύσματα του $\mathbb{R}^n$.

Η γωνία που σχηματίζουν τα $\vec{a}$ και $\vec{b}$ είναι η γωνία $\theta = \widehat{AOB} \in [0, \pi]$

του τριγώνου AOB



Θα αποδείξουμε ότι ισχύει $\boxed{\vec{a} \cdot \vec{b} = \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \cos \theta}$.

Πράγματι, έστω $\vec{OH}$ η ορθογώνια προβολή του $\vec{b}$ επί του $\vec{a}$.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο OHB , έχουμε $\vec{OH} = \|\vec{OB}\| \cos \theta \frac{\vec{OA}}{\|\vec{OA}\|}$.

$$\text{Άρα } \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{OA} \cdot \vec{OB} = \vec{OA} \cdot (\vec{OH} + \vec{HB}) = \vec{OA} \cdot \vec{OH} + \underbrace{\vec{OA} \cdot \vec{HB}}_{=0} \quad \text{μοναδιαίο διάνυσμα}$$

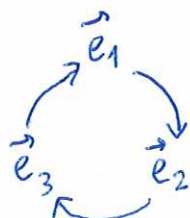
$$\Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = \|\vec{OA}\| \|\vec{OB}\| \cos \theta \quad \square$$

⑥ Εξωτερικό γινόμενο (ΜΟΝΟ στο $\mathbb{R}^3$)

ορ Έστω $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ η κανονική βάση του $\mathbb{R}^3$. Το εξωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ και $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ είναι το διάνυσμα:

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{b} &= \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \vec{e}_1 - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \vec{e}_2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \vec{e}_3 \in \mathbb{R}^3 \\ &= \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Παραδείγματα: $\vec{e}_1 \times \vec{e}_2 = \vec{e}_3, \vec{e}_2 \times \vec{e}_3 = \vec{e}_1, \vec{e}_3 \times \vec{e}_1 = \vec{e}_2$



(μεταθέτουμε κυκλικά τα $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$)

Αλγεβρικές ιδιότητες (έπονται από τον ορισμό)

(i) $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$ $\triangle$ (το $\times$ δεν είναι μεταθετικό)

(ii) $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$

(iii) Για κάθε $\vec{a}$ (αντίστοιχα $\vec{b}$) φιξαρμένο, η συνάρτηση

$\mathbb{R}^3 \ni \vec{x} \mapsto \vec{a} \times \vec{x} \in \mathbb{R}^3$ (αντίστοιχα $\mathbb{R}^3 \ni \vec{x} \mapsto \vec{x} \times \vec{b}$) είναι γραμμική.

Πρόταση: Έστω $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$. Τότε ισχύει

$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ και ειδικότερα έχουμε $\begin{cases} \vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{a} \\ \vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{b} \end{cases}$

Ο πραγματικός αριθμός $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$ καλείται μικτό γινόμενο των $\vec{a}, \vec{b}$ και $\vec{c}$.

Απ: $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} c_1 - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} c_2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} c_3$

$= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$ ανάπτυγμα κατά ελάσσονες
της 3ης γραμμής της ορίσυνδας

Επιπλέον είναι προφανές ότι $\det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{a}) = 0 = \det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{b})$, άρα

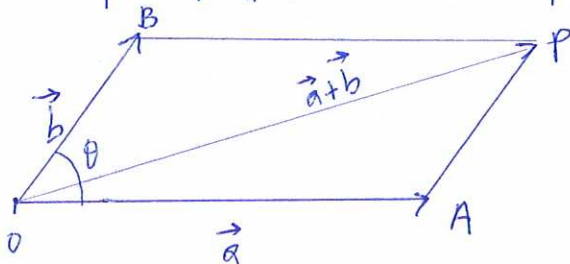
$\vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{a}$ και $\vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{b}$ $\square$

Πρόταση: Έστω $\vec{a}, \vec{b}$ δύο μη μηδενικά διανύσματα του $\mathbb{R}^3$

και έστω $\theta \in [0, \pi]$ η γωνία που σχηματίζουν. Τότε έχουμε

$\|\vec{a} \times \vec{b}\| = \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \sin \theta = \text{εμβαδόν του παραλληλογράμμου } OAPB$

που παράχουν τα $\vec{a}$ και $\vec{b}$.



$\overset{\parallel}{\underset{OA}{\vec{a}}} \quad \overset{\parallel}{\underset{OB}{\vec{b}}}$

$$\begin{aligned}
 \underline{\text{Απ:}} \quad \|\vec{a} \times \vec{b}\|^2 &= \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}^2 \\
 &= (a_2 b_3 - a_3 b_2)^2 + (a_1 b_3 - a_3 b_1)^2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1)^2 \quad \text{ανάπτυγμα} \\
 &= (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - (a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3)^2 \\
 &= \|\vec{a}\|^2 \|\vec{b}\|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2 = \|\vec{a}\|^2 \|\vec{b}\|^2 - \|\vec{a}\|^2 \|\vec{b}\|^2 \cos^2 \theta \\
 &= \|\vec{a}\|^2 \|\vec{b}\|^2 \sin^2 \theta
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \|\vec{a} \times \vec{b}\| = \underbrace{\|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \sin \theta}_{\substack{\text{Βάση} \times \text{ύψος} \text{ του παραλληλολογράμμου OAPB} \\ = \text{εμβαδόν} \quad " \quad " \quad " \quad "}} \quad (\sin \theta \geq 0 \text{ επειδή } \theta \in [0, \pi]) . \quad \square$$

Πόρισμα (γεωμετρική ερμηνεία του εξωτερικού γινομένου)

Έστω $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$. Τότε έχουμε $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$ ανν τα $\vec{a}$ και $\vec{b}$ είναι συγχρημικά

Διαφορετικά (αν τα $\vec{a}$ και $\vec{b}$ δεν είναι συγχρημικά) το $\vec{a} \times \vec{b}$ είναι το

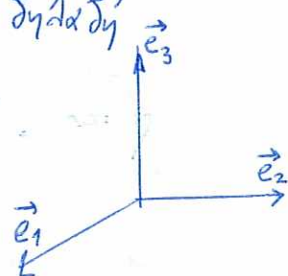
διάνυσμα τ.ω.: (i) $\|\vec{a} \times \vec{b}\| = \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \sin \theta$ ($\theta = \text{γωνία που σχηματίζουν τα } \vec{a} \text{ και } \vec{b}, \theta \in (0, \pi)$)

$$(ii) \vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{a}, \vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{b}$$

$$(iii) \det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{a} \times \vec{b}) = \|\vec{a} \times \vec{b}\|^2 > 0, \text{ δηλαδή } \vec{e}_3$$

η βάση $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{a} \times \vec{b})$ του $\mathbb{R}^3$ είναι δεξιόστροφη όπως και η

κανονική βάση $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ ($\det(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3) = 1 > 0$).



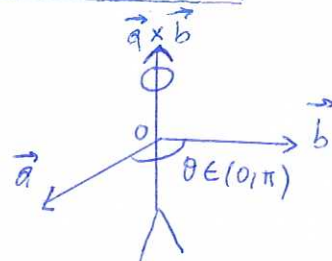
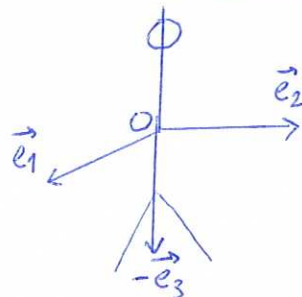
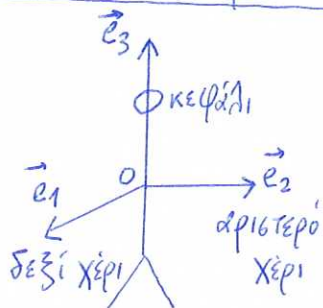
Απ: Δύο μη μηδενικά διανύσματα $\vec{a}$ και $\vec{b}$ είναι συγχρημικά ανν η γωνία που σχηματίζουν είναι $\theta = 0$ ή π , δηλαδή ανν ισχύει $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$. Διαφορετικά, αν $\vec{a} = \vec{0}$ ή $\vec{b} = \vec{0}$ είναι προφανές ότι τα $\vec{a}$ και $\vec{b}$ είναι συγχρημικά και ισχύει επίσης $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$.

(iii) $\det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{a} \times \vec{b}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = \|\vec{a} \times \vec{b}\|^2 > 0$ επειδή υποθέσαμε ότι τα $\vec{a}$ και $\vec{b}$ δεν είναι συγχρημικά $\square$

Εξ' ορισμού μία βάση $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ του $\mathbb{R}^3$ λέγεται δεξιόστροφη (αντίστοιχα αριστερόστροφη), αν ισχύει $\det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) > 0$ (αντίστοιχα $\det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) < 0$).

Για να δούμε αν μία βάση είναι δεξιόστροφη μπορούμε να εφαρμόσουμε τον ηρωτικό κανόνα του παρατηρητή του Ampère: η βάση $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ είναι δεξιόστροφη:

ΟΤΑΝ το δεξί χέρι του παρατηρητή δείχνει κατά την κατεύθυνση του $\vec{a}$
το αριστερό χέρι " " " " " " " " $\vec{b}$
και το κεφάλι " " " " " " " " $\vec{c}$



η κανονική βάση είναι δεξιόστροφη
 $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$

η βάση $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, -\vec{e}_3)$ είναι
αριστερόστροφη: $\det(\vec{e}_1, \vec{e}_2, -\vec{e}_3) = -1$

η βάση $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{a} \times \vec{b})$
είναι δεξιόστροφη

Παρατήρηση: Στο προηγούμενο Πρόβλημα, υπάρχουν δύο διανύσματα που ικανοποιούν τις συνθήκες (i) και (ii), αφού μπορούμε να επιλέξουμε με δύο τρόπους την κάθετη κατεύθυνση στο επίπεδο των $\vec{a}$ και $\vec{b}$. Η συνθήκη (iii) προσδιορίζει την κατεύθυνση του $\vec{a} \times \vec{b}$ έτσι ώστε η βάση $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{a} \times \vec{b})$ να είναι δεξιόστροφη

⑦ Εξισώσεις ορισμένων υποσυνόλων του $\mathbb{R}^n$

α) Εξίσωση ευθείας που διέρχεται από το σημείο A τ.ω. $\vec{OA} = (a_1, \dots, a_n)$ και έχει τη διεύθυνση του διανύσματος $\vec{v} = (v_1, \dots, v_n) \neq \vec{0}$.

Ένα σημείο M τ.ω. $\vec{OM} = (x_1, \dots, x_n)$ ανήκει στην ευθεία αν

$\vec{AM} \parallel \vec{v} \Leftrightarrow \vec{AM} = t\vec{v}$ για κάποιο $t \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = a_1 + tv_1 \\ x_2 = a_2 + tv_2 \\ \dots \\ x_n = a_n + tv_n \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{παραμετρική} \\ \text{εξίσωση} \\ \text{της ευθείας} \end{matrix}$



Παρατήρηση : Για να βρούμε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από δύο διαφορετικά σημεία A και B , αναγόμετε στην προηγούμενη εξίσωση θέτοντας $\vec{v} = \vec{AB}$.

β) Εξίσωση υπερεπιπέδου που διέρχεται από το σημείο A τ.ω. $\vec{OA} = (a_1, \dots, a_n)$ και έχει κάθετο διάνυσμα το $\vec{v} = (v_1, \dots, v_n) \neq \vec{0}$

(υπερεπίπεδο του $\mathbb{R}^n =$ γραμμικός υποχώρος διάστασης $n-1$)

Ένα σημείο M τ.ω. $\vec{OM} = (x_1, \dots, x_n)$ ανήκει στο υπερεπίπεδο αν

$$\vec{AM} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{AM} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow \vec{OM} \cdot \vec{v} = \vec{OA} \cdot \vec{v}$$

$$\Leftrightarrow v_1 x_1 + v_2 x_2 + \dots + v_n x_n = v_1 a_1 + v_2 a_2 + \dots + v_n a_n$$

Παράδειγμα : Εξίσωση του επιπέδου του $\mathbb{R}^3$ που διέρχεται από το σημείο

$$A = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ και είναι κάθετο στο διάνυσμα } \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} :$$

$$x_1 - x_2 + 2x_3 = \vec{OA} \cdot \vec{v} = 3$$

γ) Εξίσωση της σφαίρας με κέντρο το σημείο A τ.ω. $\vec{OA} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ και ακτίνα $R > 0$.

Ένα σημείο M τ.ω. $\vec{OM} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ ανήκει στη σφαίρα αν

$$\|\vec{AM}\| = R \Leftrightarrow \|\vec{AM}\|^2 = R^2 \Leftrightarrow (x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 + \dots + (x_n - a_n)^2 = R^2$$

⑧ Απόσταση μεταξύ δύο υποσυνόλων του $\mathbb{R}^n$

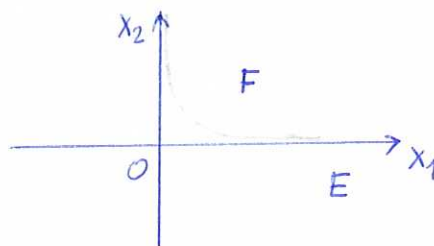
Ορ : Έστω E και F δύο υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$. Η απόσταση μεταξύ τους

$$\text{είναι } d(E, F) = \inf \{ \|\vec{x} - \vec{y}\| : \vec{x} \in E, \vec{y} \in F \}$$

Παραδείγματα : (i) Αν $E \cap F \neq \emptyset$, τότε $d(E, F) = 0$.

(ii) Έστω $E = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_2 < 0\}$ και $F = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 > 0, x_2 > \frac{1}{x_1}\}$

Τότε $E \cap F = \emptyset$, αλλά $d(E, F) = 0$



(iii) Απόσταση του σημείου B τ.ω $\vec{OB} = \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ από το επίπεδο $v_1 x_1 + v_2 x_2 + v_3 x_3 + D = 0$ του $\mathbb{R}^3$.

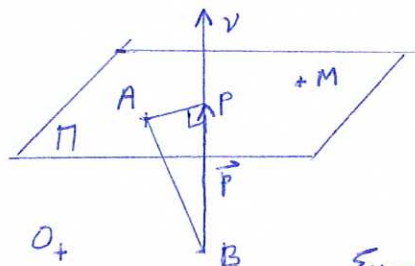
Έστω Π το επίπεδο $v_1 x_1 + v_2 x_2 + v_3 x_3 + D = 0$ και A ένα σημείο του Π .

Γνωρίζουμε ότι το επίπεδο Π είναι κάθετο στο διάνυσμα $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ και ισχύει

$\vec{OA} \cdot \vec{v} + D = 0$. Έστω $\vec{p} = \frac{\vec{BA} \cdot \vec{v}}{\|\vec{v}\|^2} \vec{v}$ η ορθογώνια προβολή του $\vec{BA}$ επί

του $\vec{v}$ και έστω P το σημείο τ.ω. $\vec{BP} = \vec{p}$. Έχουμε $\vec{BP} \parallel \vec{v}$ και $\vec{BP} \perp \vec{AP}$,

άρα $P \in \Pi$. Επιπλέον, για κάθε $M \in \Pi$ ισχύει $\vec{BM} = \vec{BP} + \vec{PM}$ με $\vec{PM} \perp \vec{v}$



$$\text{και } \|\vec{BM}\|^2 = (\vec{BP} + \vec{PM}) \cdot (\vec{BP} + \vec{PM})$$

$$= \|\vec{BP}\|^2 + \|\vec{PM}\|^2 + \underbrace{2\vec{PM} \cdot \vec{BP}}_0 \geq \|\vec{BP}\|^2$$

$$\text{Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι } d(B, \Pi) = \|\vec{BP}\| = \frac{|\vec{BA} \cdot \vec{v}|}{\|\vec{v}\|} = \frac{|\vec{OB} \cdot \vec{v} - \vec{OA} \cdot \vec{v}|}{\|\vec{v}\|}$$

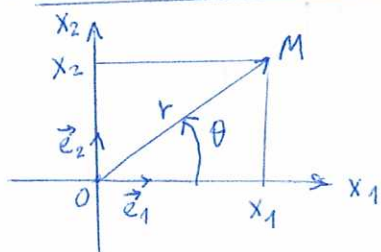
$$\Rightarrow d(B, \Pi) = \frac{|\vec{OB} \cdot \vec{v} + D|}{\|\vec{v}\|} = \frac{|b_1 v_1 + b_2 v_2 + b_3 v_3 + D|}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}}$$

Εφαρμογή: Για το επίπεδο $3x_1 - 2x_2 + 8x_3 + 1 = 0$ και το σημείο $B = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$\text{Βρίσκουμε } d(B, \Pi) = \frac{|2 \cdot 3 - 0 \cdot 2 - 1 \cdot 8 + 1|}{\sqrt{3^2 + 2^2 + 8^2}} = \frac{1 - 1}{\sqrt{77}} = \frac{1}{\sqrt{77}}$$

9) Πολικές, κυλινδρικές και σφαιρικές συντεταγμένες

α) Πολικές συντεταγμένες στο $\mathbb{R}^2$.



Οι πολικές συντεταγμένες (r, θ)
 $\uparrow \quad \uparrow$
 $[0, +\infty) \quad [0, 2\pi)$

του σημείου M τ.ω $\vec{OM} = x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2$

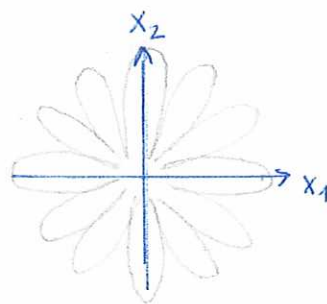
ορίζονται από τις εξισώσεις:

$$x_1 = r \cos \theta, \quad x_2 = r \sin \theta \quad \text{με } r \geq 0 \text{ και } \theta \in [0, 2\pi)$$

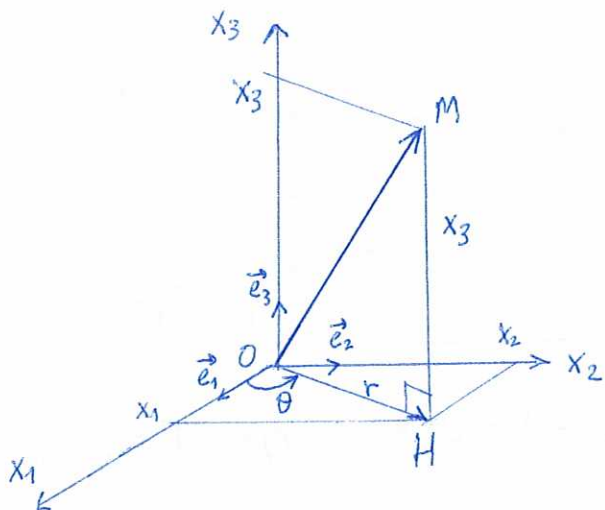
όπου $r = OM$ και θ είναι η προσανατολισμένη γωνία που σχηματίζουν τα διανύσματα $\vec{e}_1$ και $\vec{OM}$

Παράδειγμα: $r = \frac{3}{2} + \cos(12\theta), \theta \in [0, 2\pi)$

Εξίσωση της μαργαρίτας



β) Κυλινδρικές συντεταγμένες στο $\mathbb{R}^3$



Οι κυλινδρικές συντεταγμένες

(r, θ, x_3) του σημείου M τ.ω.

$\vec{OM} = x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + x_3 \vec{e}_3$ ορίζονται

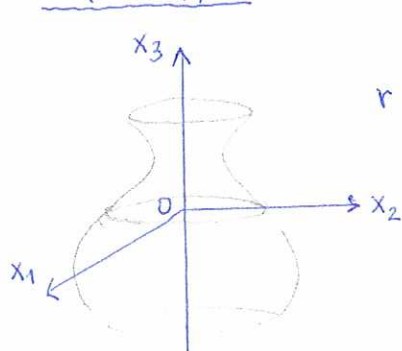
από τις εξισώσεις:

$$x_1 = r \cos \theta, \quad x_2 = r \sin \theta, \quad x_3 = x_3$$

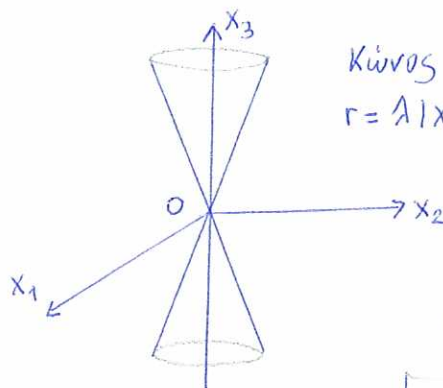
με $r \geq 0$, $\theta \in [0, 2\pi)$ και $x_3 \in \mathbb{R}$

όπου r είναι το μήκος του διανύσματος $\vec{OH} = x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2$ και θ είναι η προσανατολισμένη γωνία που σχηματίζουν τα $\vec{e}_1$ και $\vec{OH}$ στο επίπεδο $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$.

Παράδειγμα: Εξισώσεις στερεών εκ περιστροφής



$$r = f(x_3)$$



κώνος

$$r = \lambda |x_3| \text{ με } \lambda > 0 \text{ σταθερά}$$

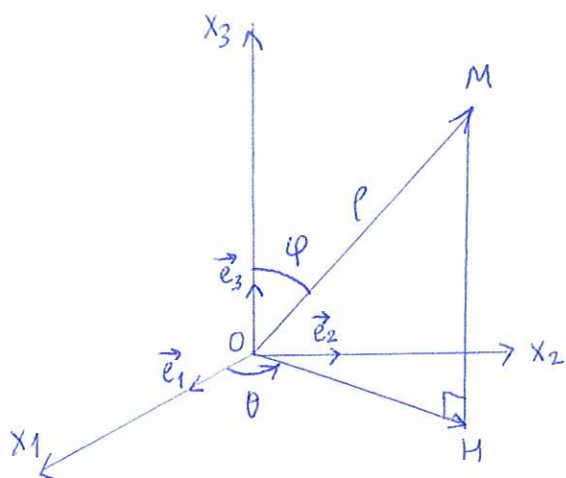


κύλινδρος

$$r = R_0$$

με $R_0 > 0$ σταθερά

γ) Σφαιρικές συντεταγμένες στο $\mathbb{R}^3$



Οι σφαιρικές συντεταγμένες (r, θ, φ) του σημείου M τ.ω.

$$\vec{OM} = x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + x_3 \vec{e}_3$$

ορίζονται από τις εξισώσεις:

$$\begin{cases} x_1 = r \sin \varphi \cos \theta \\ x_2 = r \sin \varphi \sin \theta \\ x_3 = r \cos \varphi \end{cases} \quad \begin{matrix} r \geq 0 \\ \text{με } \theta \in [0, 2\pi] \\ \varphi \in [0, \pi] \end{matrix}$$

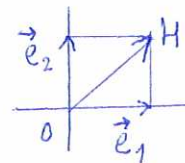
όπου $r = \|\vec{OM}\|$, θ είναι η προεκτυλισμένη γωνία που σχηματίζουν τα διανύσματα $\vec{e}_1$ και $\vec{OH} = x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2$ στο επίπεδο $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$

και $\varphi \in [0, \pi]$ είναι η γωνία που σχηματίζουν τα διανύσματα $\vec{e}_3$ και $\vec{OM}$.

Παράδειγμα: Οι σφαιρικές συντεταγμένες του σημείου M τ.ω. $\vec{OM} = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \sqrt{2} \vec{e}_3$

είναι $r = \|\vec{OM}\| = 2$, $\theta = \frac{\pi}{4}$ επειδή $\vec{OH} = \vec{e}_1 + \vec{e}_2$

και φ με $\cos \varphi = \frac{\vec{e}_3 \cdot \vec{OM}}{\|\vec{e}_3\| \|\vec{OM}\|} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, άρα $\varphi = \frac{\pi}{4}$

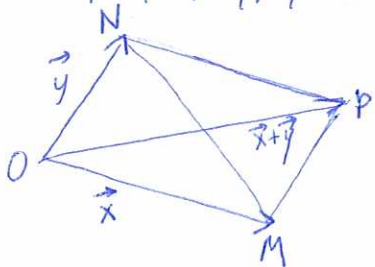


Ασκ 1: Έστω $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$. Να δείχθει ότι

$$\|\vec{x} + \vec{y}\|^2 + \|\vec{x} - \vec{y}\|^2 = 2\|\vec{x}\|^2 + 2\|\vec{y}\|^2 \quad (\text{νόμος του παραλληλογράμμου})$$

Λύση: $\|\vec{x} + \vec{y}\|^2 + \|\vec{x} - \vec{y}\|^2 = (\vec{x} + \vec{y}) \cdot (\vec{x} + \vec{y}) + (\vec{x} - \vec{y}) \cdot (\vec{x} - \vec{y})$
 $= \|\vec{x}\|^2 + 2\vec{x} \cdot \vec{y} + \|\vec{y}\|^2 + \|\vec{x}\|^2 - 2\vec{x} \cdot \vec{y} + \|\vec{y}\|^2$
 $= 2\|\vec{x}\|^2 + 2\|\vec{y}\|^2$

Γεωμετρική ερμηνεία: Έστω ότι $\vec{x} = \vec{OM}$, $\vec{y} = \vec{ON}$, $\vec{x} + \vec{y} = \vec{OP}$



Τότε $\vec{x} - \vec{y} = \vec{NM}$ και στο παραλληλόγραμμο OMPN

$$\text{Ισχύει } OP^2 + MN^2 = 2OM^2 + 2ON^2$$

$$= OM^2 + MP^2 + PN^2 + NO^2$$

Ασκ 2: Θεωρούμε στο $\mathbb{R}^n$ τις νόρμες $\|\vec{x}\|_1 = |x_1| + |x_2| + \dots + |x_n|$,

$$\|\vec{x}\|_\infty = \max_{i=1, \dots, n} |x_i| \quad \text{καθώς και την Ευκλείδεια νόρμα } \|\cdot\|.$$

(i) Να δείχθει ότι $\|\vec{x}\|_\infty \leq \|\vec{x}\| \leq \|\vec{x}\|_1 \leq n \|\vec{x}\|_\infty, \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n$

(ii) Όταν $n=2$, να προσδιοριστούν τα σύνολα $B_\infty = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^2 : \|\vec{x}\|_\infty < 1\}$,

$$B = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^2 : \|\vec{x}\| < 1\} \quad \text{και} \quad B_1 = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^2 : \|\vec{x}\|_1 < 1\}.$$

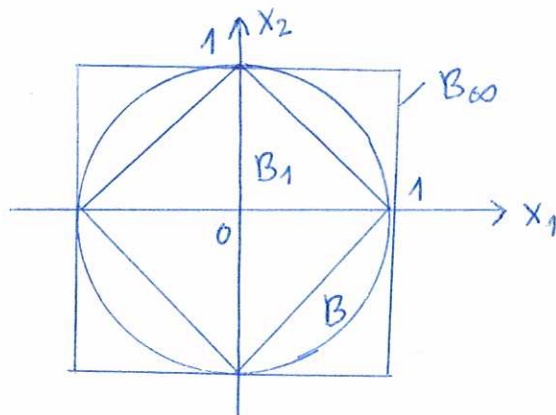
Λύση: (i) Για κάθε $i=1, \dots, n$ ισχύει $|x_i| \leq \sqrt{x_1^2 + \dots + x_i^2 + \dots + x_n^2} = \|\vec{x}\|$.

Άρα $\|\vec{x}\|_\infty = \max_{i=1, \dots, n} |x_i| \leq \|\vec{x}\|$. Είναι επίσης φανερό ότι

$$\|\vec{x}\|^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n |x_i| \right)^2 = \|\vec{x}\|_1^2 \Rightarrow \|\vec{x}\| \leq \|\vec{x}\|_1. \quad \text{Τέλος, έχουμε}$$

$$|x_i| \leq \|\vec{x}\|_\infty, \forall i=1, \dots, n. \quad \text{Συνεπώς } \sum_{i=1}^n |x_i| \leq n \|\vec{x}\|_\infty \Rightarrow \|\vec{x}\|_1 \leq n \|\vec{x}\|_\infty.$$

(ii)



Ασκ 3 : Έστω $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k$ γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα του $\mathbb{R}^n$
 $(1 \leq k \leq n)$. Θέτουμε $\vec{u}_1 = \vec{v}_1$

$$\vec{u}_2 = \vec{v}_2 - \frac{\vec{v}_2 \cdot \vec{u}_1}{\|\vec{u}_1\|^2} \vec{u}_1$$

$$\vec{u}_3 = \vec{v}_3 - \frac{\vec{v}_3 \cdot \vec{u}_1}{\|\vec{u}_1\|^2} \vec{u}_1 - \frac{\vec{v}_3 \cdot \vec{u}_2}{\|\vec{u}_2\|^2} \vec{u}_2$$

$$\vec{u}_k = \vec{v}_k - \frac{\vec{v}_k \cdot \vec{u}_1}{\|\vec{u}_1\|^2} \vec{u}_1 - \frac{\vec{v}_k \cdot \vec{u}_2}{\|\vec{u}_2\|^2} \vec{u}_2 - \dots - \frac{\vec{v}_k \cdot \vec{u}_{k-1}}{\|\vec{u}_{k-1}\|^2} \vec{u}_{k-1}$$

(i) Να δείχθεί ότι $\vec{u}_i \neq \vec{0}$, $\forall i=1, \dots, k$ και ότι τα διανύσματα

$\left\{ \frac{\vec{u}_1}{\|\vec{u}_1\|}, \frac{\vec{u}_2}{\|\vec{u}_2\|}, \dots, \frac{\vec{u}_k}{\|\vec{u}_k\|} \right\}$ αποτελούν μία ορθοκανονική βάση του γραμμικού υποχώρου

$$E = \text{Span}(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k).$$

(ii) Εφαρμογή : όταν $k=3$, $n=4$, $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

να βρεθεί μία ορθοκανονική βάση του γραμμικού υποχώρου $\text{Span}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3) \subset \mathbb{R}^4$.

Λύση (i) Θα δείξουμε με επαγωγή ότι για κάθε $j=1, \dots, k$, ισχύει

$$(*) \begin{cases} \vec{u}_1, \dots, \vec{u}_j \neq \vec{0} \text{ και τα } \left(\frac{\vec{u}_1}{\|\vec{u}_1\|}, \dots, \frac{\vec{u}_j}{\|\vec{u}_j\|} \right) \text{ αποτελούν μία} \\ \text{ορθοκανονική βάση του γρ. υποχώρου } \text{Span}(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_j). \end{cases}$$

Για $j=1$, (*) ισχύει διότι $\vec{v}_1 \neq \vec{0}$. Υποθέτουμε τώρα ότι (*) ισχύει για $j \geq 1$. Τότε τα διανύσματα $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_j$ είναι ανά δύο κάθετα.

Θα επαληθεύσουμε ότι $\vec{u}_{j+1} \cdot \vec{u}_\ell = 0$, $\forall \ell = 1, \dots, j$. Πράγματι,

$$\begin{aligned} \vec{u}_{j+1} \cdot \vec{u}_\ell &= \vec{v}_{j+1} \cdot \vec{u}_\ell - \sum_{i=1}^j \frac{\vec{v}_{j+1} \cdot \vec{u}_i}{\|\vec{u}_i\|^2} (\vec{u}_i \cdot \vec{u}_\ell) \\ &= \vec{v}_{j+1} \cdot \vec{u}_\ell - \frac{\vec{v}_{j+1} \cdot \vec{u}_\ell}{\vec{v}_{j+1} \cdot \vec{u}_\ell} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Επομένως, τα $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_j, \vec{u}_{j+1}$ είναι ανά δύο κάθετα. Είναι επίσης

φανερό ότι $\text{Span}(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_{j+1}) = \text{Span}(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_{j+1})$ διότι έχουμε

$$\vec{u}_{j+1} = \vec{v}_{j+1} + \vec{w} \text{ με } \vec{w} \in \text{Span}(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_j) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{επαγωγική υπόθεση}}}{=} \text{Span}(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_j)$$

Ειδικότερα, από τη γραμμική ανεξαρτησία των $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_{j+1}$, προκύπτει

ότι $\vec{u}_{j+1} \neq \vec{0}$. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι τα μονοδιαία διανύσματα

$\left(\frac{\vec{u}_1}{\|\vec{u}_1\|}, \dots, \frac{\vec{u}_{j+1}}{\|\vec{u}_{j+1}\|} \right)$ αποτελούν μία ορθοκανονική βάση του γραμμικού χώρου

$\text{Span}(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_{j+1})$.

(ii) Έχουμε $\vec{u}_1 = \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ και $\|\vec{u}_1\|^2 = 2$, $\vec{u}_1 \cdot \vec{v}_2 = 1$, $\vec{u}_1 \cdot \vec{v}_3 = 1$

$$\vec{u}_2 = \vec{v}_2 - \frac{\vec{v}_2 \cdot \vec{u}_1}{\|\vec{u}_1\|^2} \vec{u}_1 = \vec{v}_2 - \frac{\vec{u}_1}{2} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ και } \|\vec{u}_2\|^2 = \frac{3}{2}, \quad \vec{u}_2 \cdot \vec{v}_3 = \frac{1}{2}$$

$$\vec{u}_3 = \vec{v}_3 - \frac{\vec{v}_3 \cdot \vec{u}_1}{\|\vec{u}_1\|^2} \vec{u}_1 - \frac{\vec{v}_3 \cdot \vec{u}_2}{\|\vec{u}_2\|^2} \vec{u}_2 = \vec{v}_3 - \frac{\vec{u}_1}{2} - \frac{\vec{u}_2}{3} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ -1/3 \\ -1/3 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ και } \|\vec{u}_3\|^2 = \frac{4}{3}$$

Άρα τα διανύσματα $\frac{\vec{u}_1}{\sqrt{2}} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\frac{\sqrt{2} \vec{u}_2}{\sqrt{3}} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{6} \\ \sqrt{2}/\sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix}$ και $\frac{\sqrt{3} \vec{u}_3}{2} = \begin{pmatrix} 1/2\sqrt{3} \\ -1/2\sqrt{3} \\ -1/2\sqrt{3} \\ \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}$

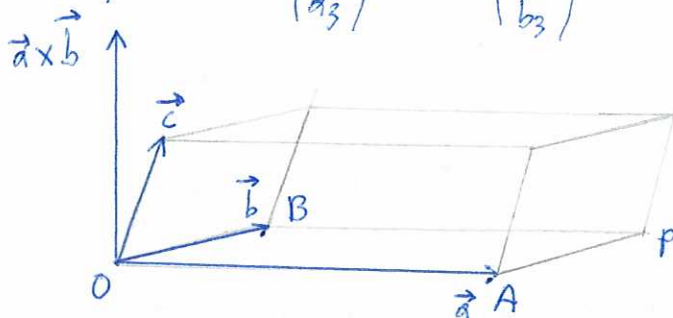
αποτελούν μία ορθοκανονική βάση του γρ υποχώρου $\text{Span}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$.

Άσκ 4: Να δείχθεί ότι η απόλυτη τιμή της ορίζουσας

$D = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$ είναι ο όγκος του παραλληλεπιπέδου με προκείμενες

η άκρες τα διανύσματα $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ και $\vec{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$

Λύση:



Αν τα $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ είναι γραμμικά εξαρτημένα, τότε $D = 0$.

Υποθέτουμε λοιπόν ότι τα $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα και

θεωρούμε την ορθογώνια προβολή $\vec{p}$ του $\vec{c}$ επί του $\vec{a} \times \vec{b} \neq \vec{0}$:

$$\vec{p} = \frac{(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}}{\|\vec{a} \times \vec{b}\|^2} \vec{a} \times \vec{b}. \text{ Επειδή ισχύει } \begin{cases} \vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{a} \\ \vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{b} \end{cases},$$

η νόρμα $\|\vec{p}\| = \frac{|(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}|}{\|\vec{a} \times \vec{b}\|}$ είναι ίση με το ύψος του παραλληλεπιπέδου.

Γνωρίζουμε όμως ότι $\|\vec{a} \times \vec{b}\| = \text{εμβαδόν του παραλληλογράμμου OAPB}$.

Άρα $\|\vec{p}\| \|\vec{a} \times \vec{b}\| = |(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}| = |D| = \text{όγκος του παραλληλεπιπέδου}$
 ύψος x βάση
 του παραλληλεπιπέδου

Αδκ 5: Να βρεθεί η εξίσωση του επιπέδου του $\mathbb{R}^3$ που

διέρχεται από τα σημεία $A = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ και $C = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Λύση: Έχουμε $\vec{AB} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ και $\vec{AC} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$. Επιπλέον το

$$\text{διάνυσμα } \vec{v} = \vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} \text{ είναι κάθετο}$$

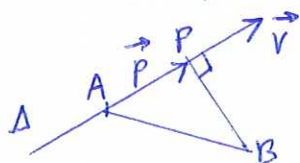
στο επίπεδο που διέρχεται από τα σημεία A, B και C . Άρα η εξίσωση του επιπέδου είναι $-x_1 + 4x_2 + 7x_3 = \vec{OA} \cdot \vec{v} = 9$.

Αδκ 6: Να βρεθεί η απόσταση του σημείου $B = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ από την ευθεία

$$\Delta \text{ του } \mathbb{R}^3 \text{ με εξίσωση } \begin{cases} x_1 = 2 - t \\ x_2 = -1 + 2t \\ x_3 = -2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Λύση: Η ευθεία Δ διέρχεται από το σημείο $A = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ και έχει τη διεύθυνση του διανύσματος $\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$. Έστω $\vec{p} = \frac{\vec{AB} \cdot \vec{v}}{\|\vec{v}\|^2} \vec{v}$ η ορθογώνια προβολή του $\vec{AB}$ επί του $\vec{v}$ και έστω P το σημείο τ.ω. $\vec{AP} = \vec{p}$. Έχουμε $\vec{BP} \perp \vec{v}$ και $\vec{AP} \parallel \vec{v}$, άρα $P \in \Delta$. Επιπλέον για κάθε $M \in \Delta$ ισχύει $\vec{BM} = \vec{BP} + \vec{PM}$ με $\vec{PM} \parallel \vec{v}$ και $\|\vec{BM}\|^2 = (\vec{BP} + \vec{PM}) \cdot (\vec{BP} + \vec{PM}) = \|\vec{BP}\|^2 + \underbrace{\|\vec{PM}\|^2}_{\geq 0} + 2 \underbrace{\vec{BP} \cdot \vec{PM}}_{=0} \geq \|\vec{BP}\|^2$.

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι $d(B, \Delta) = \|\vec{BP}\|$. Υπολογίζουμε τώρα $\|\vec{v}\| = 3$,



$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{AB} \cdot \vec{v} = -1, \quad \vec{p} = -\frac{1}{9} \vec{v} = \begin{pmatrix} 1/9 \\ -2/9 \\ 2/9 \end{pmatrix}, \quad \|\vec{p}\| = \frac{1}{9},$$

$$\|\vec{AB}\|^2 = 3 = \|\vec{AP}\|^2 + \|\vec{PB}\|^2 = \frac{1}{9} + \|\vec{PB}\|^2 \Rightarrow d(B, \Delta) = \|\vec{PB}\| = \frac{\sqrt{26}}{3}$$

Άσκ 7 : Έστω E και F δύο υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$. Να δείχσεις ότι

$$(i) \quad d(\vec{x}, F) \leq d(\vec{x}, \vec{y}) + d(\vec{y}, F) \quad , \quad \forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$$

$$(ii) \quad d(E, F) \leq d(\vec{y}, E) + d(\vec{y}, F) \quad , \quad \forall \vec{y} \in \mathbb{R}^n$$

Λύση (i) Από την τριγωνική ανισότητα, έχουμε

$$d(\vec{x}, \vec{z}) \leq d(\vec{x}, \vec{y}) + d(\vec{y}, \vec{z}) \quad , \quad \forall \vec{z} \in F \text{ με } \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n \text{ φιξαρπισμένα}$$

$$\begin{aligned} \text{Άρα } \inf_{\vec{z} \in F} d(\vec{x}, \vec{z}) &\leq \inf_{\vec{z} \in F} (d(\vec{x}, \vec{y}) + d(\vec{y}, \vec{z})) = d(\vec{x}, \vec{y}) + \inf_{\vec{z} \in F} d(\vec{y}, \vec{z}) \\ \parallel &\parallel \\ d(\vec{x}, F) &\leq d(\vec{x}, \vec{y}) + d(\vec{y}, F) \end{aligned}$$

(ii) Ομοίως για $\vec{y} \in \mathbb{R}^n$ ^{κράθε} φιξαρπισμένο, έχουμε

$$\begin{aligned} d(E, F) &\leq \inf_{\vec{x} \in E} d(\vec{x}, F) \leq \inf_{\vec{x} \in E} (d(\vec{x}, \vec{y}) + d(\vec{y}, F)) = \inf_{\vec{x} \in E} d(\vec{x}, \vec{y}) + d(\vec{y}, F) \\ &\parallel \\ &d(\vec{y}, E) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow d(E, F) \leq d(\vec{y}, E) + d(\vec{y}, F)$$

Παρατήρηση : Αν E, F και G είναι τρία υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$

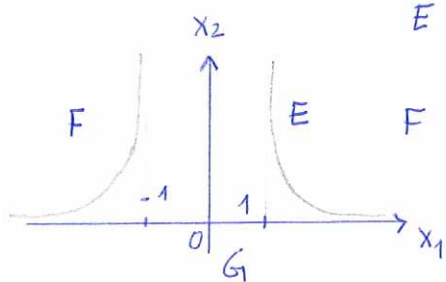
ΔΕΝ ΙΣΧΥΕΙ $d(E, F) \leq d(E, G) + d(G, F)$!

Αντιπαράδειγμα

$$G = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_2 < 0\}$$

$$E = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 > 1, x_2 > \frac{1}{x_1 - 1}\}$$

$$F = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 < -1, x_2 > -\frac{1}{x_1 + 1}\}$$



$$\begin{aligned} \text{Έχουμε } d(E, F) &> d(E, G) + d(G, F) \\ \parallel &\parallel \\ 2 &> 0 + 0 \end{aligned}$$

Άσκ 8 : Να δείχθεί ότι

$$(i) \quad | \|\vec{x}\| - \|\vec{y}\| | \leq \|\vec{x} - \vec{y}\|, \quad \forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$$

$$(ii) \quad \left\| \frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|} - \frac{\vec{y}}{\|\vec{y}\|} \right\| \leq 2 \min \left(\frac{1}{\|\vec{x}\|}, \frac{1}{\|\vec{y}\|} \right) \|\vec{x} - \vec{y}\| \quad \forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n \text{ τ.ω } \begin{cases} \vec{x} \neq \vec{0} \\ \vec{y} \neq \vec{0} \end{cases}$$

Λύση (i) Από την τριγωνική ανισότητα, έχουμε $\|\vec{x}\| \leq \|\vec{x} - \vec{y}\| + \|\vec{y}\|$
 $\|\vec{y}\| \leq \|\vec{y} - \vec{x}\| + \|\vec{x}\|$

$$\text{Άρα } \begin{cases} \|\vec{x}\| - \|\vec{y}\| \leq \|\vec{x} - \vec{y}\| \\ -\|\vec{x}\| + \|\vec{y}\| \leq \|\vec{x} - \vec{y}\| \end{cases} \Rightarrow | \|\vec{x}\| - \|\vec{y}\| | \leq \|\vec{x} - \vec{y}\|.$$

(ii) Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι $\|\vec{x}\| \geq \|\vec{y}\|$.

Τότε υπολογίζουμε :

$$\left\| \frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|} - \frac{\vec{y}}{\|\vec{y}\|} \right\| = \left\| \frac{\|\vec{y}\| \vec{x} - \|\vec{x}\| \vec{y}}{\|\vec{x}\| \|\vec{y}\|} \right\| = \frac{\| \|\vec{y}\| \vec{x} - \|\vec{x}\| \vec{y} \|}{\|\vec{x}\| \|\vec{y}\|}$$

$$\leq \frac{\|\vec{y}\| \|\vec{x} - \vec{y}\| + |\|\vec{y}\| - \|\vec{x}\|| \|\vec{y}\|}{\|\vec{x}\| \|\vec{y}\|}$$

τριγωνική ανισότητα

$$\leq \frac{\|\vec{x} - \vec{y}\|}{\|\vec{x}\|} + \frac{|\|\vec{y}\| - \|\vec{x}\||}{\|\vec{x}\|} \leq \frac{2}{\|\vec{x}\|} \|\vec{x} - \vec{y}\| = 2 \min \left(\frac{1}{\|\vec{x}\|}, \frac{1}{\|\vec{y}\|} \right) \|\vec{x} - \vec{y}\|$$

(i)

Άσκ 9 : Να υπολογιστεί

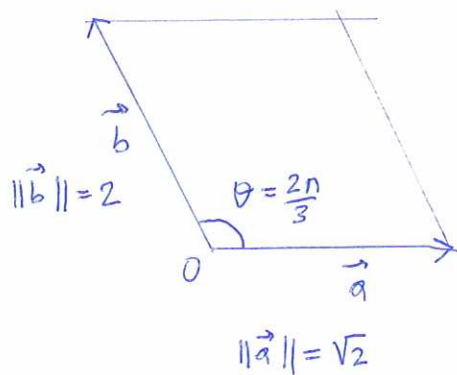
(i) η γωνία που σχηματίζουν τα διανύσματα $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$ και $\vec{b} = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

(ii) το εμβαδόν του παραλληλογράμμου με προεκείμενες πλευρές τα $\vec{a}$ και $\vec{b}$.

Λύση (i) Έστω θ η γωνία που σχηματίζουν τα $\vec{a}$ και $\vec{b}$. Έχουμε

$$\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\|\vec{a}\| \|\vec{b}\|} = \frac{-\sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot 2} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \theta = \frac{2\pi}{3}$$

(ii)



Το ύψος του παραλλήλογράμμου

$$\text{είναι } \|\vec{b}\| \sin \theta = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$

Άρα το εμβαδόν του παραλλήλογράμμου

$$\text{είναι } \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \sin \theta = \sqrt{6}$$

Παρατήρηση : Εναλλακτικά μπορούμε να υπολογίσουμε $\|\vec{a} \times \vec{b}\|$

που μας δίνει επίσης το εμβαδόν του παραλλήλογράμμου.

$$\text{Έχουμε } \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 1 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 1 & -1 \end{vmatrix} = -\sqrt{2} \vec{e}_1 + 2 \vec{e}_3 \Rightarrow \|\vec{a} \times \vec{b}\| = \sqrt{6}$$

