

ΚΕΦ 3 : ΔΙΑΦΟΡΙΣΙΜΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΜΕΤΑΞΥ ΕΥΚΛΕΙΔΕΙΩΝ ΧΩΡΩΝ

① Γράφημα - Σύνολα στάθμης

Ορ: Έστω $f: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ όπου $U =$ ανοιχτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$.

(i) Το γράφημα της f είναι το σύνολο :

$$\{ (x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : (x_1, \dots, x_n) \in U \text{ και } x_{n+1} = f(x_1, \dots, x_n) \}$$

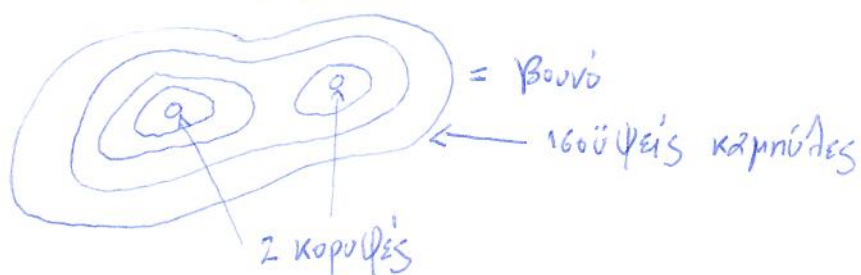
(ii) Το σύνολο στάθμης της f με τιμή $c \in \mathbb{R}$ είναι το σύνολο

$$\{ (x_1, \dots, x_n) \in U : f(x_1, \dots, x_n) = c \}$$

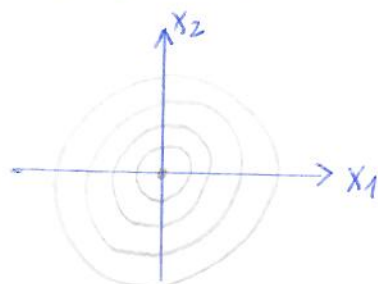
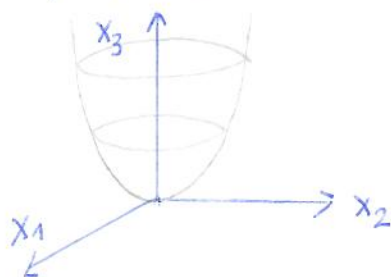
Τα σύνολα στάθμης μας βοηθούν να καταλάβουμε τη συμπεριφορά της f .

Παραδείγματα :

- 1) Αν η $f(x_1, x_2)$ δίνει το ύψος ενός βουνού στο σημείο (x_1, x_2) , τότε τα σύνολα στάθμης της f είναι οι 1600΄ές καμπύλες



- 2) Το γράφημα της $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$ είναι ένα παραβόλαιοδές εκ περιστροφής. Τα σύνολα στάθμης της f είναι ομόκεντροι κύκλοι.



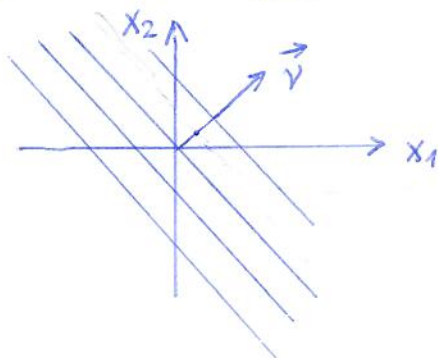
Η f έχει ολικό
ελάχιστο για $\vec{x} = \vec{0}$.

3) Έστω η γραμμική συνάρτηση $f(x_1, \dots, x_n) = v_1 x_1 + \dots + v_n x_n$ με $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \neq \vec{0}$. Το γράφημα της f είναι το υπερεπίπεδο του

$\mathbb{R}^{n+1}$ με εξίσωση $x_{n+1} = v_1 x_1 + \dots + v_n x_n$. Τα σύνολα στάθμης της f είναι τα υπερεπίπεδα του $\mathbb{R}^n$ που είναι κάθετα στο διάνυσμα $\vec{v}$.

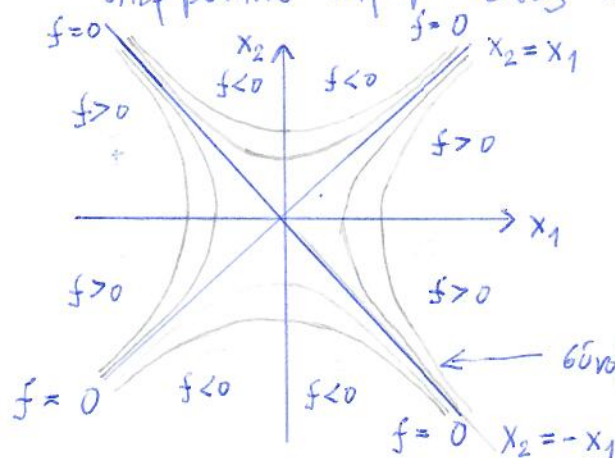
Σύνολα στάθμης

για $n=2$



4) Έστω $f(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^2$. Το γράφημα της f είναι ένα

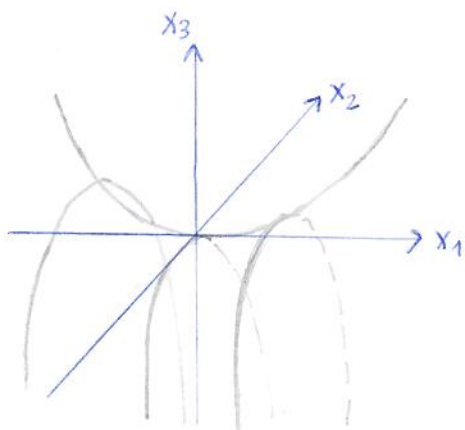
υπερβολικό παραβολοειδές που λέγεται επίσης σάγμα (= σελήνη)



Έχουμε $f(x_1, x_2) = 0 \Leftrightarrow x_2 = \pm x_1$

$f(x_1, x_2) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 > 0 \text{ και } |x_2| < x_1 \\ \text{ή } x_1 < 0 \text{ και } |x_2| < -x_1 \end{cases}$

← σύνολα στάθμης



Το γράφημα του σάγματος

② Μερικές παράγωγοι

Ορ: Έστω $f: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ όπου U ανοιχτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$

και έστω $\vec{a} \in U$. Το όριο

$$\lim_{x_i \rightarrow a_i} \frac{f(a_1, \dots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \dots, a_n) - f(a_1, \dots, a_{i-1}, a_i, a_{i+1}, \dots, a_n)}{x_i - a_i}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a_1, \dots, a_{i-1}, a_i + t, a_{i+1}, \dots, a_n) - f(a_1, \dots, a_{i-1}, a_i, a_{i+1}, \dots, a_n)}{t}, \text{ όταν υπάρχει,}$$

ονομάζεται μερική παράγωγος της f ως προς x_i ($1 \leq i \leq n$) στο $\vec{a}$ και

συμβολίζεται με $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{a})$ (ή $\partial_{x_i} f(\vec{a})$ ή $f_{x_i}(\vec{a})$).

Παρατήρηση: Το ∂ χρησιμοποιείται για τις μερικές παράγωγους συναρτήσεων πολλών μεταβλητών ενώ το d χρησιμοποιείται για την παράγωγο συναρτήσεων μιας μεταβλητής.

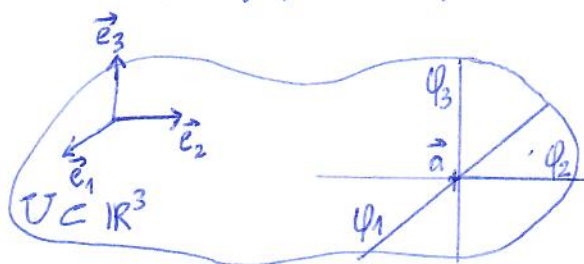
Γεωμετρική ερμηνεία: Ο περιορισμός της f στην ευθεία που διέρχεται από το $\vec{a}$ και έχει κατεύθυνση το $\vec{e}_i$ είναι η συνάρτηση

$$\varphi_i(x_i) = f(a_1, \dots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \dots, a_n). \text{ Παρατηρούμε ότι επειδή}$$

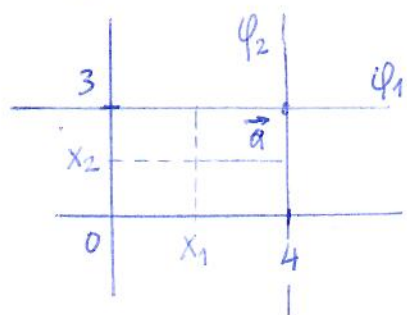
το U είναι ανοιχτό, $\exists r > 0$ τ.ω. $B(\vec{a}, r) \subset U$, άρα η φ_i

ορίζεται στο διάστημα $(a_i - r, a_i + r)$. Εξ' ορισμού έχουμε ότι

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{a}) = \varphi_i'(a_i) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f(\vec{a} + t\vec{e}_i)$$



Παραδείγματα 1) Έστω $f(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^2$ και $\vec{a} = (a_1, a_2) = (4, 3)$



Τότε, ο περιορισμός της f στην ευθεία $x_2 = a_2 = 3$ είναι η συνάρτηση $\varphi_1(x_1) = x_1^2 - a_2^2 = x_1^2 - 9$, ενώ ο περιορισμός της f στην ευθεία $x_1 = a_1 = 4$ είναι η συνάρτηση $\varphi_2(x_2) = a_1^2 - x_2^2 = 16 - x_2^2$

$$\text{Έτσι έχουμε} \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1, a_2) = \varphi_1'(a_1) = 2a_1 = 8, & \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, a_2) = \varphi_1'(x_1) = 2x_1 \\ \frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1, a_2) = \varphi_2'(a_2) = -2a_2 = -6, & \frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1, x_2) = \varphi_2'(x_2) = -2x_2 \end{cases}$$

Γενικότερα, για να υπολογίσουμε την $\frac{\partial f}{\partial x_1}$ σε ένα αυθαίρετο σημείο $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$

κρατάμε το x_2 σταθερό και παραγωγίζουμε ως προς x_1 :

$$\frac{\partial \overset{\text{σταθ.}}{x_1^2 - x_2^2}}{\partial x_1} = 2x_1 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2) = 2x_1$$

Ομοίως, για να υπολογίσουμε την $\frac{\partial f}{\partial x_2}$ στο σημείο $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, κρατάμε

το x_1 σταθερό και παραγωγίζουμε ως προς x_2 :

$$\frac{\partial \overset{\text{σταθ.}}{x_1^2 - x_2^2}}{\partial x_2} = -2x_2 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2) = -2x_2$$

2) Έστω $f(x_1, x_2, x_3) = x_3^2 \sin(x_1^2 - x_2 x_3)$. Για να βρούμε

την $\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2, x_3)$, κρατάμε τα x_2 και x_3 σταθερά και

$$\begin{aligned} \text{παραγωγίζουμε ως προς } x_1: \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2, x_3) &= \frac{\partial \overset{\text{σταθ.}}{x_3^2} \sin(\overset{\text{σταθ.}}{x_1^2} - \overset{\text{σταθ.}}{x_2 x_3})}{\partial x_1} \\ &= x_3^2 \cos(x_1^2 - x_2 x_3) \cdot 2x_1 \end{aligned}$$

Ομοίως, υπολογίζουμε $\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2, x_3) = \frac{\frac{\partial}{\partial x_3} x_3^2 \sin(x_1^2 - x_2 x_3)}{\partial x_2}$

και $\frac{\partial f}{\partial x_3}(x_1, x_2, x_3) = \frac{\frac{\partial}{\partial x_3} x_3^2 \sin(x_1^2 - x_2 x_3)}{\partial x_3} = 2x_3 \sin(x_1^2 - x_2 x_3) - x_2 x_3^2 \cos(x_1^2 - x_2 x_3)$

3) Έστω $f(x_1, x_2) = \begin{cases} x_1 x_2 \sin \frac{1}{x_2} & \text{όταν } x_2 \neq 0 \\ 0 & \text{όταν } x_2 = 0 \end{cases}$

Η f είναι συνεχής στα σημεία $\vec{x} = (x_1, x_2)$ με $x_2 \neq 0$ και είναι επίσης συνεχής στα σημεία $\vec{a} = (a, 0)$ διότι έχουμε

$$|f(x_1, x_2) - f(a, 0)| \leq |x_1| |x_2| \leq |x_1| \|\vec{x} - \vec{a}\| \xrightarrow{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} 0.$$

Άρα η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}^2$. Θα εξετάσουμε αν υπάρχουν οι μερικές παράγωγοι της f . Είναι φανερό ότι

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2) = \begin{cases} x_2 \sin \frac{1}{x_2} & \text{όταν } x_2 \neq 0 \\ 0 & \text{όταν } x_2 = 0, \text{ διότι } f(x_1, 0) = 0. \end{cases}$$

Επίσης βλέπουμε ότι $\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2) = x_1 \sin \frac{1}{x_2} - \frac{x_1}{x_2} \cos \frac{1}{x_2}$ όταν $x_2 \neq 0$.

Στα σημεία $\vec{a} = (a, 0)$, μελετούμε το όριο

$$\lim_{x_2 \rightarrow 0} \frac{f(a, x_2) - f(a, 0)}{x_2 - 0} = \lim_{x_2 \rightarrow 0} a \sin \frac{1}{x_2} \text{ και διαπιστώνουμε ότι υπάρχει}$$

αν $a = 0$. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι η μερική παράγωγος $\frac{\partial f}{\partial x_2}$ δεν

υπάρχει στα σημεία $(a, 0)$ με $a \neq 0$, ενώ στο $\vec{0}$ έχουμε $\frac{\partial f}{\partial x_2}(0, 0) = 0$.

Ορ: Έστω $f: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ όπου U ανοιχτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$.

Λέμε ότι η f είναι $\begin{cases} \text{συνεχώς παραγωγίσιμη} \\ \text{ή κλάσως } C^1 \end{cases}$ στο U και γράφουμε $f \in C^1(U)$ όταν οι μερικές παραγώγοι $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}$ υπάρχουν σε κάθε σημείο του U και είναι συνεχείς στο U .

Παραδείγματα: Η συνάρτηση $f(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^2$ είναι κλάσως C^1 στο $\mathbb{R}^2$.

• Η συνάρτηση $f(x_1, x_2, x_3) = x_3^2 \sin(x_1^2 - x_2 x_3)$ είναι κλάσως C^1 στο $\mathbb{R}^3$.

• Η συνάρτηση $f(x_1, x_2) = \begin{cases} x_1 x_2 \sin \frac{1}{x_2} & \text{όταν } x_2 \neq 0 \\ 0 & \text{όταν } x_2 = 0 \end{cases}$ είναι κλάσως C^1 στα

ανοιχτά σύνολα $\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^2 : x_2 > 0 \}$ και $\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^2 : x_2 < 0 \}$

③ Διαφορισιμότητα

Μία συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο $a \in \mathbb{R}$ αν

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a) \iff \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a) - f'(a)(x - a)}{x - a} = 0.$$

Αυτό σημαίνει ότι

1) Η αλφινική συνάρτηση $x \mapsto f(a) + f'(a)(x - a)$ δίνει μία προσέγγιση της f κοντά στο a , με σφάλμα $|x - a| \varepsilon(x)$, όπου $\varepsilon(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} 0$.

[αλφινική συνάρτηση = γραμμική συνάρτηση + σταθερά]

2) Το γράφημα της f έχει στο σημείο $(a, f(a))$ μία εφαπτομένη με εξίσωση $y = f(a) + f'(a)(x - a)$

Για συνάρτησεις $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, είδαμε στην Ασκ 10, Κεφ 2, ότι

η ύπαρξη των μερικών παραγώγων $\frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{a}), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{a})$ ΔΕΝ εξασφαλίζει

ούτε καν τη συνέχεια της f στο σημείο $\vec{a} = (a_1, \dots, a_n)$. Ο ορισμός που θα δώσουμε για τη διαφορισιμότητα της f έχει σκοπό να εξασφαλίσει ότι

- 1) Η f προσεγγίζεται καλά κοντά στο $\vec{a}$ από μία αλγεβρική συνάρτηση
- 2) Το γράφημα της f έχει εφαπτόμενο επίπεδο στο σημείο $(a_1, \dots, a_n, f(\vec{a}))$

Op: Έστω $f: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ και $\vec{a} \in U$. Λέμε ότι η f είναι διαφορίσιμη στο $\vec{a}$, αν οι $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}$ υπάρχουν στο $\vec{a}$ και επιπλέον ισχύει

$$\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} \frac{f(\vec{x}) - f(\vec{a}) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{a})(x_1 - a_1) - \dots - \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{a})(x_n - a_n)}{\|\vec{x} - \vec{a}\|} = 0$$

ΣΧΟΛΙΑ: Αν η f είναι διαφορίσιμη στο $\vec{a}$, τότε

- η αλγεβρική συνάρτηση $\vec{x} \mapsto f(\vec{a}) + \frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{a})(x_1 - a_1) + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{a})(x_n - a_n)$ δίνει μία προσέγγιση της f κοντά στο $\vec{a}$, με σφάλμα $\|\vec{x} - \vec{a}\| \varepsilon(\vec{x})$, όπου $\varepsilon(\vec{x}) \xrightarrow{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} 0$.
- το εφαπτόμενο επίπεδο στο γράφημα της f στο σημείο $(a_1, \dots, a_n, f(\vec{a}))$ ορίζεται από την εξίσωση $x_{n+1} = f(\vec{a}) + \frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{a})(x_1 - a_1) + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{a})(x_n - a_n)$.

Παραδείγματα 1) Η συνάρτηση $f(x_1, x_2) = \frac{x_1 x_2^2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}$ για $(x_1, x_2) \neq (0, 0)$
 $f(0, 0) = 0$ για $(x_1, x_2) = (0, 0)$

είναι διαφορίσιμη στο $(0, 0)$. Πράγματι, έχουμε $\frac{\partial f}{\partial x_1}(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial x_2}(0, 0) = 0$
 και $\frac{|f(\vec{x}) - f(\vec{0}) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{0})x_1 - \frac{\partial f}{\partial x_2}(\vec{0})x_2|}{\|\vec{x}\|} = \frac{|x_1| |x_2|^2}{\|\vec{x}\|^2} \leq \|\vec{x}\| \xrightarrow{\vec{x} \rightarrow \vec{0}} 0$.

2) Η συνάρτηση $f(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{x_1^3}{x_1^2 + x_2^2} & \text{για } (x_1, x_2) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{για } (x_1, x_2) = (0, 0) \end{cases}$ δεν είναι

διαφορίσιμη στο $(0, 0)$. Πράγματι, έχουμε

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} \Big|_{(0,0)} = \lim_{x_1 \rightarrow 0} \frac{f(x_1, 0) - f(0, 0)}{x_1} = \lim_{x_1 \rightarrow 0} \frac{x_1^3}{x_1^3} = 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} \Big|_{(0,0)} = 0 \quad \text{επειδή} \quad f(0, x_2) = 0$$

Όμως το $\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{0}} \frac{f(\vec{x}) - f(\vec{0}) - 1 \cdot x_1 - 0 \cdot x_2}{\|\vec{x}\|} = \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{0}} \frac{-x_1 x_2^2}{(x_1^2 + x_2^2)^{3/2}}$ δεν υπάρχει

Γιότι για τη συνάρτηση $\varphi(x_1, x_2) = \frac{x_1 x_2^2}{(x_1^2 + x_2^2)^{3/2}}$ ισχύουν $\varphi(x_1, 0) \xrightarrow{x_1 \rightarrow 0} 0$

ενώ $\varphi(x_1, x_1) = \frac{1}{2\sqrt{2}}$ για $x_1 > 0$, άρα $\varphi(x_1, x_1) \xrightarrow{x_1 \rightarrow 0^+} \frac{1}{2\sqrt{2}}$

Θεώρημα: Έστω $f = U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Υποθέτουμε ότι $f \in C^1(U)$.

Τότε η f είναι διαφορίσιμη σε κάθε σημείο του U .

Απ: Για λόγους απλότητας, παρουσιάζουμε την απόδειξη στη διάσταση

$n=2$. Έστω $\vec{a} \in U$, θα δείξουμε ότι η f είναι διαφορίσιμη στο $\vec{a} = (a_1, a_2)$.

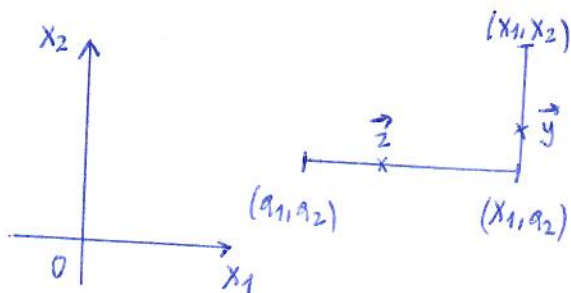
Επειδή το U είναι ανοιχτό, υπάρχει $r > 0$ τ.ω.

$$R = (a_1 - r, a_1 + r) \times (a_2 - r, a_2 + r) \subset U \text{ και για } \vec{x} \in R \text{ έχουμε}$$

$$f(x_1, x_2) - f(a_1, a_2) = f(x_1, x_2) - f(x_1, a_2) + f(x_1, a_2) - f(a_1, a_2)$$

$$\stackrel{\uparrow}{\text{ΘΜΤ}} \frac{\partial f}{\partial x_2}(\vec{y})(x_2 - a_2) + \frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{z})(x_1 - a_1)$$

όπου το $\vec{y}$ είναι κάποιο σημείο του ευθύγραμμου τμήματος $((x_1, x_2), \vec{x})$
 και το $\vec{z}$ " " " " " "
 $(\vec{a}, (x_1, x_2))$



(Το $\vec{y}$ και το $\vec{z}$ εξαρτώνται
από το $\vec{x}$)

'Αρδ ισχυει

$$|f(\vec{x}) - f(\vec{a}) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{a})(x_1 - a_1) - \frac{\partial f}{\partial x_2}(\vec{a})(x_2 - a_2)| = \left| \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{z}) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{a}) \right)(x_1 - a_1) + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}(\vec{y}) - \frac{\partial f}{\partial x_2}(\vec{a}) \right)(x_2 - a_2) \right|$$

$$|x_1 - a_1|, |x_2 - a_2| \leq \|\vec{x} - \vec{a}\| \leq \|\vec{x} - \vec{a}\| \left(\left| \frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{z}) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{a}) \right| + \left| \frac{\partial f}{\partial x_2}(\vec{y}) - \frac{\partial f}{\partial x_2}(\vec{a}) \right| \right)$$

$$\vec{x} \rightarrow \vec{z}$$

ΕΛΤΟΙ ΕΧΟΥΜΕ $\vec{z} \xrightarrow{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} \vec{a}$, $\vec{y} \xrightarrow{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} \vec{a}$ ΚΑΙ

ΕΝΔΕΙΧΝΕΙ $\|\vec{z}-\vec{a}\|, \|\vec{y}-\vec{a}\| \leq \|\vec{x}-\vec{a}\|$

ΤΗΣ ΒΥΒΕΧΕΙΔΟΣ ΤΩΝ $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}$. $\square$

Παράδειγμα: Οι μερικές παράγωγοι της $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^4 + e^{x_1 x_2}$

Ex: (v) $\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2) = 2x_1 + x_2 e^{x_1 x_2}$ $\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2) = 4x_2^3 + x_1 e^{x_1 x_2}$

01 $\frac{\partial f}{\partial x_1}$ και $\frac{\partial f}{\partial x_2}$ είναι συνεχείς στο $\mathbb{R}^2$, άρα έχουμε $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$ και

η f είναι διαφορίσιμη σε κάθε σημείο $\vec{a} \in \mathbb{R}^2$. Ειδικότερα για $\vec{a} = (1, 0)$

Βρίσκουμε $f(1,0) = 2$, $\frac{\partial f}{\partial x_1}(1,0) = 2$, $\frac{\partial f}{\partial x_2}(1,0) = 1$ και συμπληρώνουμε

την εξίσωση του επιπέδου που εφαπτεται στο γράφημα της f στο σημείο $(1, 0, 2)$:

$$x_3 = 2 + 2(x_1 - 1) + 1(x_2 - 0) = 2x_1 + x_2$$

Πρόταση: Έστω $f: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, διαφορίσιμη στο $\vec{a} \in U$. Τότε η f είναι συνεχής στο $\vec{a}$.

Απ: Έχουμε $f(\vec{x}) = f(\vec{a}) + \frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{a})(x_1 - a_1) + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{a})(x_n - a_n) + \|\vec{x} - \vec{a}\| \varepsilon(\vec{x})$, όπου $\varepsilon(\vec{x}) \xrightarrow{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} 0$, λόγω της διαφορίσιμότητας της f στο $\vec{a}$ και βλέπουμε ότι $\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{a})(x_1 - a_1) + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{a})(x_n - a_n) + \|\vec{x} - \vec{a}\| \varepsilon(\vec{x}) \right) = 0$. Άρα $\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} f(\vec{x}) = f(\vec{a})$ $\square$

Συνοψίζοντας, έχουμε τα παρακάτω αποτελέσματα:

$$\boxed{f \in C^1 \text{ σε μια περιοχή } B(\vec{a}, r) \text{ του } \vec{a} \Rightarrow f \text{ διαφορίσιμη στο } \vec{a} \Rightarrow \exists \frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{a}), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{a}) \Rightarrow f \text{ συνεχής στο } \vec{a}}$$

④ Διαφορικό - κλίση - κατευθυνόμενη παράγωγος

Ορ: Έστω $f: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, διαφορίσιμη στο $\vec{a} \in U$.

- Η γραμμική συνάρτηση $Df(\vec{a}): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$
 $\vec{h} = (h_1, \dots, h_n) \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{a})h_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{a})h_n$

που συμβολίζεται με $Df(\vec{a})$, ονομάζεται διαφορικό της f στο $\vec{a}$. Στην κανονική βάση $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ ο πίνακας του $Df(\vec{a})$ είναι $\left[\frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{a}) \quad \dots \quad \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{a}) \right]$.

- Το αντίστοιχο διάνυσμα (= πίνακας στήλη):

$\nabla f(\vec{a}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{a}) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{a}) \end{bmatrix}$ που συμβολίζεται με $\nabla f(\vec{a})$ ή $\text{grad } f(\vec{a})$ ονομάζεται κλίση ή ανάδελα του f στο $\vec{a}$ (gradient).

- Το $Df(\vec{a})$ είναι η ΜΟΝΗ γραμμική συνάρτηση $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία

$$\text{ισχύει } \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} \frac{f(\vec{x}) - f(\vec{a}) - T(\vec{x} - \vec{a})}{\|\vec{x} - \vec{a}\|} = 0 \quad (\text{βλ. Ασκ 1}).$$

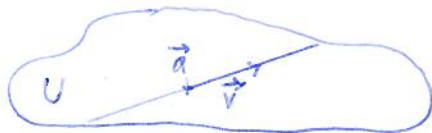
Παράδειγματα: 1) Το διαφορικό της $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^4 + e^{x_1 x_2}$ στο σημείο $(1, 0)$ είναι $df(1, 0) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, δηλαδή ο πίνακας-γραμμική $[2 \ 1]$. Η κλίση της f στο $(1, 0)$ είναι το διάνυσμα $\nabla f(1, 0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

2) Αν η $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο $a \in \mathbb{R}$, τότε το διαφορικό της f στο a είναι η γραμμική συνάρτηση $df(a) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $h \mapsto f'(a)h$

3) Αν η $f(x_1, \dots, x_n) = \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n$ (με $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ σταθερές) είναι γραμμική τότε σε κάθε σημείο $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ έχουμε ότι $df(\vec{x}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$
 $\vec{h} = (h_1, \dots, h_n) \mapsto \alpha_1 h_1 + \dots + \alpha_n h_n$

Ορ: Έστω $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ και έστω $\vec{a} \in U, \vec{v} \in \mathbb{R}^n, \vec{v} \neq \vec{0}$.

- Η παράγωγος $\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} f(\vec{a} + t\vec{v})$, όταν υπάρχει, ονομάζεται η κατευθυνόμενη παράγωγος της f στο σημείο $\vec{a}$ ως προς την κατεύθυνση $\vec{v}$ και συμβολίζεται με $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(\vec{a})$.
- Ερμηνεύεται ως ο ρυθμός μεταβολής της f στο $\vec{a}$ κατά την κατεύθυνση $\vec{v}$ κατά μήκος της ευθείας $\vec{x} = \vec{a} + t\vec{v}, t \in \mathbb{R}$ που διέρχεται από το $\vec{a}$ και είναι παράλληλη με το $\vec{v}$.



Παράδειγματα 1) $\frac{\partial f}{\partial \vec{e}_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i}$

2) Έστω $f(x_1, x_2) = x_1 x_2$, $\vec{a} = (2, 1)$ και $\vec{v} = (3, 2)$. Τότε υπολογίζουμε $f(\vec{a} + t\vec{v}) = (2+3t) \cdot (1+2t) = 2 + 7t + 6t^2$ και συμπεραίνουμε

ότι $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(2, 1) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (2 + 7t + 6t^2) = 7$.

Πρόταση: Έστω $f: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ διαφορίσιμη στο $\vec{a} \in U$

και έστω $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$, $\vec{v} \neq \vec{0}$. Τότε η κατευθυνόμενη παράγωγος

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(\vec{a}) \text{ υπάρχει και ισχύει } \frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(\vec{a}) = Df(\vec{a}) \cdot \vec{v} = \nabla f(\vec{a}) \cdot \vec{v}$$

↑
εξ. γινόμενο

Απ: Ισχύει $f(\vec{x}) = f(\vec{a}) + \nabla f(\vec{a}) \cdot (\vec{x} - \vec{a}) + \|\vec{x} - \vec{a}\| \varepsilon(\vec{x})$ με $\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} \varepsilon(\vec{x}) = 0$

επειδή η f είναι διαφορίσιμη στο $\vec{a}$. Ειδικότερα, για $\vec{x} = \vec{a} + t\vec{v}$

έχουμε $f(\vec{a} + t\vec{v}) = f(\vec{a}) + \nabla f(\vec{a}) \cdot (t\vec{v}) + |t| \|\vec{v}\| \tilde{\varepsilon}(t)$ με $\tilde{\varepsilon}(t) = \varepsilon(\vec{a} + t\vec{v}) \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0$.

$$\text{Άρα } \frac{f(\vec{a} + t\vec{v}) - f(\vec{a})}{t} = \nabla f(\vec{a}) \cdot \vec{v} + \frac{|t|}{t} \|\vec{v}\| \tilde{\varepsilon}(t)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(\vec{a}) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\vec{a} + t\vec{v}) - f(\vec{a})}{t} = \nabla f(\vec{a}) \cdot \vec{v} \quad \square$$

Παράδειγμα: Εφαρμόζοντας την πρόταση υπολογίζουμε ξανά την $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(2,1)$

για την $f(x_1, x_2) = x_1 x_2$ και για $\vec{v} = (3, 2)$. Βρίσκουμε πρώτα ότι

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2) = x_2, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2) = x_1, \quad \frac{\partial f}{\partial x_1}(2, 1) = 1, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2}(2, 1) = 2. \text{ Άρα}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(2, 1) = \nabla f(2, 1) \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = 7$$

⑤ Διαφορίσιμες διανυσματικές συναρτήσεις

• Θεωρούμε τώρα διανυσματικές συναρτήσεις $\vec{f}: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$
ανοιχτό

$$\vec{f}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} f_1(\vec{x}) \\ \vdots \\ f_m(\vec{x}) \end{pmatrix} \text{ με } f_i: U \rightarrow \mathbb{R}, \forall i = 1, \dots, m.$$

• Υποθέτουμε ότι για j φεξαρικόμένο ($1 \leq j \leq n$), υπάρχουν για κάθε $i = 1, \dots, m$ οι μερικές παράγωγοι $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\vec{a})$ στο σημείο $\vec{a} \in U$.

$$\Rightarrow \text{Τότε ορίζεται η μερική παράγωγος } \frac{\partial \vec{f}}{\partial x_j}(\vec{a}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_j}(\vec{a}) \\ \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_j}(\vec{a}) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m.$$

- Λέμε ότι η f είναι διαφορίσιμη στο $\vec{a} \in U$ αν οι $\frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{a}), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{a})$ υπάρχουν και ΕΠΙΠΛΕΟΝ ισχύει $\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} \frac{\|f(\vec{x}) - f(\vec{a}) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{a})(x_1 - a_1) - \dots - \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{a})(x_n - a_n)\|}{\|\vec{x} - \vec{a}\|} = 0$

Το διαφορικό της f στο $\vec{a}$ είναι η γραμμική συνάρτηση:

$$Df(\vec{a}) : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

$$\vec{h} = (h_1, \dots, h_n) \longmapsto \frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{a})h_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{a})h_n$$

Στην κανονική βάση το $Df(\vec{a})$ είναι ο $m \times n$ πίνακας που δίνεται από την

$$Df(\vec{a}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\vec{a}) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\vec{a}) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\vec{a}) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(\vec{a}) \end{bmatrix}.$$

Ο $Df(\vec{a})$ ονομάζεται Ιακωβιανός πίνακας της f στο $\vec{a}$.

Επιπλέον, το $Df(\vec{a})$ είναι η ΜΟΝΗ γραμμική συνάρτηση $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$

για την οποία ισχύει $\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} \frac{\|f(\vec{x}) - f(\vec{a}) - T(\vec{x} - \vec{a})\|}{\|\vec{x} - \vec{a}\|} = 0$.

- Λέμε ότι η f είναι κλάσεως C^1 στο U και γράφουμε $f \in C^1(U; \mathbb{R}^m)$ όταν ισχύει $f_i \in C^1(U)$ για κάθε $i = 1, \dots, m$. Αν η $f \in C^1(U; \mathbb{R}^m)$ τότε είναι διαφορίσιμη σε κάθε σημείο του U .
- Αν η $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ είναι διαφορίσιμη στο $\vec{a} \in U$, τότε είναι συνεχής στο $\vec{a}$.

6) Κανόνες Διαφορίσιμης

Πρόταση: Έστω $f, g: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, διαφορίσιμες στο $\vec{a} \in U$,
ανοιχτό

έστω $\lambda \in \mathbb{R}$ και έστω $h: V \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^p$. Υποθέτουμε επίσης ότι
ανοιχτό

$f(U) \subset V$ και η h είναι διαφορίσιμη στο $f(\vec{a})$. Τότε

(i) Η $f+g$ είναι διαφορίσιμη στο $\vec{a}$ και ισχύει $D(f+g)(\vec{a}) = Df(\vec{a}) + Dg(\vec{a})$

(ii) Η λf " " " " " " $D(\lambda f)(\vec{a}) = \lambda Df(\vec{a})$

(iii) Αν $m=1$, η $f \cdot g$ είναι διαφορίσιμη στο $\vec{a}$ και ισχύει

$$D(fg)(\vec{a}) = g(\vec{a}) Df(\vec{a}) + f(\vec{a}) Dg(\vec{a})$$

(iv) Αν $m=1$ και $g(\vec{a}) \neq 0$, η $\frac{f}{g}$ είναι διαφορίσιμη στο $\vec{a}$ και ισχύει

$$D\left(\frac{f}{g}\right)(\vec{a}) = \frac{g(\vec{a}) Df(\vec{a}) - f(\vec{a}) Dg(\vec{a})}{(g(\vec{a}))^2}$$

(v) Η $h \circ f$ είναι διαφορίσιμη στο $\vec{a}$ και ισχύει $D(h \circ f)(\vec{a}) = Dh(f(\vec{a})) \circ Df(\vec{a})$

$$\left[\begin{array}{ccc} h \circ f: U & \xrightarrow{f} & V \xrightarrow{h} \mathbb{R}^p \\ \cap & & \cap \\ \mathbb{R}^n & & \mathbb{R}^m \end{array} \quad D(h \circ f)(\vec{a}) : \mathbb{R}^n \xrightarrow{Df(\vec{a})} \mathbb{R}^m \xrightarrow{Dh(f(\vec{a}))} \mathbb{R}^p \right]$$

Απ: (i) και (ii) = Άμεσο

(iii) Λόγω της διαφορίσιμότητας των f και g στο $\vec{a}$, έχουμε

$$f(\vec{x}) = f(\vec{a}) + Df(\vec{a})(\vec{x} - \vec{a}) + \|\vec{x} - \vec{a}\| \varepsilon(\vec{x}) \quad \text{όπου} \quad \varepsilon(\vec{x}) \xrightarrow{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} 0$$

$$g(\vec{x}) = g(\vec{a}) + Dg(\vec{a})(\vec{x} - \vec{a}) + \|\vec{x} - \vec{a}\| \tilde{\varepsilon}(\vec{x}) \quad \text{"} \quad \tilde{\varepsilon}(\vec{x}) \xrightarrow{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} 0$$

$$f(\vec{x}) \cdot g(\vec{x}) = f(\vec{a})g(\vec{a}) + (g(\vec{a}) Df(\vec{a}) + f(\vec{a}) Dg(\vec{a}))(\vec{x} - \vec{a}) + R(\vec{x})$$

$$\text{όπου} \quad R(\vec{x}) = (Df(\vec{a})(\vec{x} - \vec{a}))(Dg(\vec{a})(\vec{x} - \vec{a})) + \|\vec{x} - \vec{a}\| \varepsilon(\vec{x}) (g(\vec{a}) + Dg(\vec{a})(\vec{x} - \vec{a})) + \|\vec{x} - \vec{a}\| \tilde{\varepsilon}(\vec{x}) (f(\vec{a}) + Df(\vec{a})(\vec{x} - \vec{a}))$$

↑
υποχθέντα

Παρατηρούμε ότι οι όροι $(g(\vec{a}) + Dg(\vec{a})(\vec{x} - \vec{a}))$ και $(f(\vec{a}) + Df(\vec{a})(\vec{x} - \vec{a}))$ είναι φραγμένοι καθώς το $\vec{x} \rightarrow \vec{a}$, ενώ έχουμε επίσης ότι

$$|Df(\vec{a})(\vec{x} - \vec{a})| = |\nabla f(\vec{a}) \cdot (\vec{x} - \vec{a})| \underset{\substack{\uparrow \\ \text{εξ γινόμενο}}}{\leq} \|\nabla f(\vec{a})\| \|\vec{x} - \vec{a}\|, \quad |Dg(\vec{a})(\vec{x} - \vec{a})| \underset{\substack{\uparrow \\ \text{(C.S)}}}{\leq} \|\nabla g(\vec{a})\| \|\vec{x} - \vec{a}\|$$

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι $\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} \frac{R(\vec{x})}{\|\vec{x} - \vec{a}\|} = 0$. Άρα η γραμμική συνάρτηση

$$T = g(\vec{a}) Df(\vec{a}) + f(\vec{a}) Dg(\vec{a}), \quad T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \text{ ικανοποιεί την}$$

$$\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} \frac{(f \cdot g)(\vec{x}) - (f \cdot g)(\vec{a}) - T(\vec{x} - \vec{a})}{\|\vec{x} - \vec{a}\|} = 0 \quad \text{και έπεται από την Ασκήτ ότι η } fg \text{ είναι}$$

$$\text{διαφορίσιμη στο } \vec{a} \text{ με } D(fg)(\vec{a}) = T = g(\vec{a}) Df(\vec{a}) + f(\vec{a}) Dg(\vec{a})$$

Για το (iv) και το (v), εργαζόμαστε όπως στο (iii) $\square$

Σχόλια: 1) Οι μερικές παράγωγοι ενός αθροίσματος $\left(\frac{\partial f+g}{\partial x_j} = \frac{\partial f}{\partial x_j} + \frac{\partial g}{\partial x_j} \right)$, ενός γινομένου $\left(\frac{\partial (fg)}{\partial x_j} = \frac{\partial f}{\partial x_j} \cdot g + f \frac{\partial g}{\partial x_j} \right)$ ή ενός πηλίκου υπολογίζονται όπως και στην περίπτωση συναρτήσεων μιας μεταβλητής (διότι παραγωγίζουμε ως προς τη μεταβλητή x_j έχοντας τις υπόλοιπες μεταβλητές σταθεροποιημένες).

2) Οι μερικές παράγωγοι της σύνθετης συνάρτησης $h \circ f$ στο (v) της πρότασης βρίσκονται υπολογίζοντας το γινόμενο πινάκων:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial (h \circ f)}{\partial x_1}(\vec{a}) & \dots & \frac{\partial (h \circ f)}{\partial x_n}(\vec{a}) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial (h \circ f)}{\partial x_1}(\vec{a}) & \dots & \frac{\partial (h \circ f)}{\partial x_n}(\vec{a}) \end{bmatrix}_{p \times n} = \begin{bmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial y_1}(f(\vec{a})) & \dots & \frac{\partial h_1}{\partial y_m}(f(\vec{a})) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial h_p}{\partial y_1}(f(\vec{a})) & \dots & \frac{\partial h_p}{\partial y_m}(f(\vec{a})) \end{bmatrix}_{p \times m} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\vec{a}) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\vec{a}) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\vec{a}) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(\vec{a}) \end{bmatrix}_{m \times n}$$

όπου $f = \underset{\vec{x} \mapsto f(\vec{x})}{U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m}$, $h = \underset{\vec{y} \mapsto h(\vec{y})}{V \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^p}$, $h \circ f = \underset{\vec{x} \mapsto h(f(\vec{x}))}{U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p}$

3) Αν έχουμε $f, g \in C^1(U; \mathbb{R}^m)$ και $h \in C^1(V; \mathbb{R}^p)$ τότε ισχύει επίσης ότι
 $f+g \in C^1(U; \mathbb{R}^m)$, $\lambda f \in C^1(U; \mathbb{R}^m)$, $f \cdot g \in C^1(U)$ όταν $m=1$,
 $\frac{f}{g} \in C^1(\underbrace{\{\vec{x} \in U : g(\vec{x}) \neq 0\}}_{\text{ανοιχτό}})$ όταν $m=1$, $h \circ f \in C^1(U; \mathbb{R}^p)$

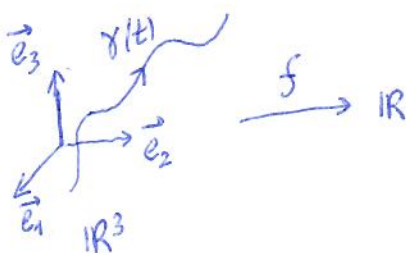
Παραδείγματα:

1) Έστω $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ και $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$
 $t \mapsto \gamma(t) = (\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t))$ $\vec{x} \mapsto f(\vec{x})$

Υποθέτουμε ότι γ είναι διαφορίσιμη σε κάθε σημείο του $\mathbb{R}$,
 γ " " " " " " " $\mathbb{R}^n$

Τότε η συνάρτηση $\varphi(t) = f(\gamma(t))$ " " " " " $\mathbb{R}$ και ισχύει

$$\underset{\text{πίνακας } 1 \times 1}{[\varphi'(t)]} = \underset{1 \times n}{\left[\frac{\partial f}{\partial x_1}(\gamma(t)) \dots \frac{\partial f}{\partial x_n}(\gamma(t)) \right]} \cdot \underset{n \times 1}{\begin{bmatrix} \gamma'_1(t) \\ \vdots \\ \gamma'_n(t) \end{bmatrix}} \Leftrightarrow \varphi'(t) = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{εσωτερικό γινόμενο} \\ \text{στο } \mathbb{R}^n}}{\gamma'_f(\gamma(t))} \cdot \gamma'(t)$$



Γεωμετρική ερμηνεία: η παράγωγος $\varphi'(t)$

ερμηνεύεται ως ο ρυθμός μεταβολής της f κατά μήκος της καμπύλης $\mathbb{R} \ni t \mapsto \gamma(t) \in \mathbb{R}^n$.

2) Έστω $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_1^2 + 1 \\ x_2^2 \end{pmatrix}$ και $h: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$,

$h(y_1, y_2) = \begin{pmatrix} y_1 + y_2 \\ y_1 \\ y_2^2 \end{pmatrix}$. Θα υπολογίσουμε το $D(h \circ f)(x_1, x_2)$.

Έχουμε $f \in C^1(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}^2)$ και $h \in C^1(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}^3)$, άρα $h \circ f \in C^1(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}^3)$

Βρίσκουμε πρώτα $Dh(y_1, y_2) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 2y_2 \end{bmatrix}$ και $Df(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} 2x_1 & 0 \\ 0 & 2x_2 \end{bmatrix}$

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι $D(h \circ f)(x_1, x_2) = Dh(f(\vec{x})) \circ Df(\vec{x})$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 2x_2^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2x_1 & 0 \\ 0 & 2x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_1 & 2x_2 \\ 2x_1 & 0 \\ 0 & 4x_2^3 \end{bmatrix}$$

3) Έστω $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} e^{x_1^2} \\ x_1 - \sin x_2 \end{pmatrix}$ και $h: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

$h(y_1, y_2) = \begin{pmatrix} \cos y_2 + y_1^2 \\ e^{y_1 + y_2} \end{pmatrix}$. Θα υπολογίσουμε το $D(h \circ f)(0, 0)$.

Έχουμε $f \in C^1(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}^2)$ και $h \in C^1(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}^2)$ άρα $h \circ f \in C^1(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}^2)$.

Βρίσκουμε πρώτα $Dh(y_1, y_2) = \begin{bmatrix} 2y_1 & -\sin y_2 \\ e^{y_1 + y_2} & e^{y_1 + y_2} \end{bmatrix}$ και $Df(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} 2x_1 e^{x_1^2} & 0 \\ 1 & -\cos x_2 \end{bmatrix}$

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι

$$\begin{aligned} D(h \circ f)(0, 0) &= Dh(f(0, 0)) \circ Df(0, 0) = Dh(1, 0) \circ Df(0, 0) \\ &= \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ e & e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ e & -e \end{bmatrix} \end{aligned}$$

7) Μερικές παράγωγοι ανώτερης τάξης

Έστω $f: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ και έστω $\vec{a} \in U$. Αν οι μερικές παράγωγοι

της $f = \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}$ υπάρχουν στο U , μπορούμε να εξετάσουμε αν αυτές

οι συναρτήσεις με τη σειρά τους παραγωγίζονται.

Ορ: Έστω $1 \leq i, j \leq n$, το όριο

$$\lim_{x_i \rightarrow a_i} \frac{\frac{\partial f}{\partial x_j}(a_1, \dots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \dots, a_n) - \frac{\partial f}{\partial x_j}(a_1, \dots, a_n)}{x_i - a_i}, \text{ όταν υπάρχει,}$$

είναι η μερική παράγωγος δεύτερης τάξης της f ως προς x_j και x_i στο $\vec{a}$:

$\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} \right) (\vec{a})$ που συμβολίζεται με $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} (\vec{a})$ όταν $i \neq j$ και με $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} (\vec{a})$

όταν $i = j$.

Με ανάλογο τρόπο ορίζονται οι μερικές παράγωγοι 3ης, 4ης τάξης...

Παράδειγμα 1) Έστω $f(x_1, x_2) = x_1 e^{x_2} + \sin(x_1 + 2x_2)$

• Υπολογίσουμε πρώτα τις μερικές παράγωγους 1ης τάξης:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2) = e^{x_2} + \cos(x_1 + 2x_2), \quad \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2) = x_1 e^{x_2} + 2 \cos(x_1 + 2x_2)$$

• Έπειτα τις μερικές παράγωγους 2ης τάξης:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x_1, x_2) = \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \right) (x_1, x_2) = \frac{\partial (e^{x_2} + \cos(x_1 + 2x_2))}{\partial x_1} = -\sin(x_1 + 2x_2)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(x_1, x_2) = \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \right) (x_1, x_2) = \frac{\partial (e^{x_2} + \cos(x_1 + 2x_2))}{\partial x_2} = e^{x_2} - 2 \sin(x_1 + 2x_2)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x_1, x_2) = \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial f}{\partial x_2} \right) (x_1, x_2) = \frac{\partial (x_1 e^{x_2} + 2 \cos(x_1 + 2x_2))}{\partial x_1} = e^{x_2} - 2 \sin(x_1 + 2x_2)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(x_1, x_2) = \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial x_2} \right) (x_1, x_2) = \frac{\partial (x_1 e^{x_2} + 2 \cos(x_1 + 2x_2))}{\partial x_2} = x_1 e^{x_2} - 4 \sin(x_1 + 2x_2)$$

• Ομοίως, βρίσκουμε τις μερικές παράγωγους 3ης τάξης:

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x_1^3}(x_1, x_2) = \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} \right) (x_1, x_2) = \frac{\partial (-\sin(x_1 + 2x_2))}{\partial x_1} = -\cos(x_1 + 2x_2)$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x_2 \partial x_1^2}(x_1, x_2) = \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} \right) (x_1, x_2) = \frac{\partial (-\sin(x_1 + 2x_2))}{\partial x_2} = -2 \cos(x_1 + 2x_2)$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x_1 \partial x_2 \partial x_1}(x_1, x_2) = \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} \right)(x_1, x_2) = \frac{\partial (e^{x_2} - 2 \sin(x_1 + 2x_2))}{\partial x_1} = -2 \cos(x_1 + 2x_2)$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x_2^2 \partial x_1}(x_1, x_2) = \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} \right)(x_1, x_2) = \frac{\partial (e^{x_2} - 2 \sin(x_1 + 2x_2))}{\partial x_2} = e^{x_2} - 4 \cos(x_1 + 2x_2)$$

κλπ ...

2) Έστω $g(x_1, x_2, x_3) = e^{x_1 x_2} + x_3 \cos x_1$. Τότε $\frac{\partial g}{\partial x_1}(x_1, x_2, x_3) = x_2 e^{x_1 x_2} - x_3 \sin x_1$,

$$\frac{\partial g}{\partial x_2}(x_1, x_2, x_3) = x_1 e^{x_1 x_2}, \quad \frac{\partial g}{\partial x_3}(x_1, x_2, x_3) = \cos x_1, \quad \frac{\partial^2 g}{\partial x_1 \partial x_3}(x_1, x_2, x_3) = \frac{\partial \cos x_1}{\partial x_1} = -\sin x_1$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x_3 \partial x_1}(x_1, x_2, x_3) = \frac{\partial (x_2 e^{x_1 x_2} - x_3 \sin x_1)}{\partial x_3} = -\sin x_1, \quad \text{κλπ} \dots$$

Παρατηρήσεις 1) Διαπιστώνουμε ότι στα προηγούμενα παραδείγματα

ισχύει $\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}$, $\frac{\partial^3 f}{\partial x_2 \partial x_1^2} = \frac{\partial^3 f}{\partial x_1 \partial x_2 \partial x_1}$, $\frac{\partial^2 g}{\partial x_1 \partial x_3} = \frac{\partial^2 g}{\partial x_3 \partial x_1}$

Θα δούμε παρακάτω ότι για συναρτήσεις κλάσεως C^K , η εναλλαγή της σειράς των μεταβλητών κατά τον υπολογισμό μερικών παράγωγων τάξης $\leq K$, οδηγεί πάντοτε στην ίδια παράγωγο.

2) Αν όμως μία συνάρτηση f δεν είναι κλάσεως C^2 , μπορεί οι $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}$ και

$\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}$ να είναι διαφορετικές (βλ. Ασκ 10)

Ορ: Μία συνάρτηση $f: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ λέγεται κλάσεως C^K στο U

($K \geq 1$) και γράφουμε $f \in C^K(U; \mathbb{R}^m)$ όταν υπάρχουν οι μερικές παράγωγοί της μέχρι τάξης K στο U και είναι συνεχείς στο U .

Η f λέγεται κλάσως C^∞ στο U (και γράφουμε $f \in C^\infty(U; \mathbb{R}^m)$)
 όταν $f \in C^k(U; \mathbb{R}^m)$, $\forall k \geq 1$.

Πρόταση: Έστω $f, g \in C^k(U; \mathbb{R}^m)$ με $U \subset \mathbb{R}^n$, έστω $\lambda \in \mathbb{R}$ και
 έστω $h \in C^k(V; \mathbb{R}^p)$ με $V \subset \mathbb{R}^m$ και $f(U) \subset V$. Τότε ισχύει ότι

- (i) $f+g \in C^k(U; \mathbb{R}^m)$ (ii) $\lambda f \in C^k(U; \mathbb{R}^m)$
 (iii) $\forall m=1, fg \in C^k(U)$ (iv) $\forall m=1, \frac{f}{g} \in C^k(\underbrace{\{x \in U : g(x) \neq 0\}}_{\text{ανοιχτό}})$
 (v) $h \circ f \in C^k(U; \mathbb{R}^p)$.

Απ: Ενδεικτικά αποδεικνύουμε το (v). Με επαγωγή. Όταν $k=1$, είδαμε ότι
 το αποτέλεσμα ισχύει. Υποθέτουμε ότι ισχύει για $k_0 \geq 1$ και θεωρούμε συναρτήσεις
 $f \in C^{k_0+1}$, $h \in C^{k_0+1}$. Τότε έχουμε

$$\left[\frac{\partial (h_i \circ f)}{\partial x_j}(\vec{x}) \right]_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq n}} = \left[\frac{\partial h_i}{\partial y_l}(f(\vec{x})) \right]_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq l \leq m}} \downarrow \left[\frac{\partial f_l}{\partial x_j}(\vec{x}) \right]_{\substack{1 \leq l \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$$

Προφανώς $\frac{\partial f_l}{\partial x_j} \in C^{k_0}(U)$ και επίσης $\frac{\partial h_i}{\partial y_l} \circ f \in C^{k_0}(U)$ λόγω της

επαγωγικής υπόθεσης (επειδή $f \in C^{k_0}(U; \mathbb{R}^m)$ και $\frac{\partial h_i}{\partial y_l} \in C^{k_0}(V)$).
 (Λόγω του (i) και του (iii))

Άρα ισχύει $\frac{\partial (h_i \circ f)}{\partial x_j} \in C^{k_0}(U)$, $\forall i, 1 \leq i \leq p$ και επομένως $h \circ f \in C^{k_0+1}(U; \mathbb{R}^p)$
 $\forall j, 1 \leq j \leq n$

□

Παραδείγματα: Οι συναρτήσεις $f(x_1, x_2) = x_1 e^{x_2} + \sin(x_1 + 2x_2)$ και

$g(x_1, x_2, x_3) = e^{x_1 x_2} + x_3 \cos x_1$ είναι κλάσως C^∞ σε όλο το χώρο.

Θεώρημα: Έστω $f \in C^2(U; \mathbb{R}^m)$ με $U \subset \mathbb{R}^n$ ανοιχτό.

Τότε ισχύει $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_1, \dots, x_n) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x_1, \dots, x_n) \quad \forall i \neq j, 1 \leq i, j \leq n$
 $\forall \vec{x} \in U$.

Γενικότερα, αν $f \in C^k(U; \mathbb{R}^m)$ με $k \geq 2$, για κάθε επιλογή

$\{i_1, \dots, i_k\} \subset \{1, 2, \dots, n\}$ ισχύει ότι $\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_k}} = \frac{\partial^k f}{\partial x_{j_1} \dots \partial x_{j_k}}$ όπου
 $\{j_1, \dots, j_k\}$ είναι μία οποιαδήποτε μετάθεση των $\{i_1, \dots, i_k\}$.

Απ: παραλείπεται.

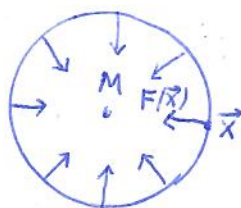
⑧ Διαφορικοί τελεστές

Ορ: Μία συνάρτηση $F: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $F(\vec{x}) = \begin{pmatrix} F_1(\vec{x}) \\ \vdots \\ F_n(\vec{x}) \end{pmatrix}$ ονομάζεται διανυσματικό πεδίο [πρέπει η διάταξη του πεδίου ορισμού να ισούται τη διάταξη του πεδίου τιμών]

Παράδειγμα 1) Αν $f \in C^1(U)$, $f: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, τότε το πεδίο κλίσεων της f :
 $\nabla f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ ορίζει ένα διανυσματικό πεδίο.
 $x \mapsto \nabla f(\vec{x})$

2) Η δύναμη έλξης που ασκεί μία μάζα M τοποθετημένη στην αρχή των αξόνων
 σε μία μάζα m τοποθετημένη στο σημείο $\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ περιγράφεται από
 ένα διανυσματικό πεδίο στο $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$, το βαρυτικό πεδίο:

$$F(\vec{x}) = - \frac{GMm}{\|\vec{x}\|^3} \vec{x}$$



- Ο τελεστής div της απόκλισης (= divergence) ορίζεται για διανυσματικά πεδία $F \in C^1(U; \mathbb{R}^n)$, $F(\vec{x}) = \begin{pmatrix} F_1(\vec{x}) \\ \vdots \\ F_n(\vec{x}) \end{pmatrix}$, με $U \subset \mathbb{R}^n$ ανοιχτό.

Εξ' ορισμού $\text{div } F(\vec{x}) = \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(\vec{x}) + \dots + \frac{\partial F_n}{\partial x_n}(\vec{x}) \in \mathbb{R}$

Π.χ. για $F(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} x_1^2 x_2 \\ x_3 \\ x_1 x_2 x_3 \end{pmatrix}$, έχουμε

$$\text{div } F(x_1, x_2, x_3) = \frac{\partial x_1^2 x_2}{\partial x_1} + \frac{\partial x_3}{\partial x_2} + \frac{\partial x_1 x_2 x_3}{\partial x_3} = 2x_1 x_2 + 0 + x_1 x_2 = 3x_1 x_2$$

- Ο τελεστής curl του στροβιλισμού ορίζεται για διανυσματικά πεδία $F \in C^1(U; \mathbb{R}^3)$, $F(\vec{x}) = \begin{pmatrix} F_1(\vec{x}) \\ F_2(\vec{x}) \\ F_3(\vec{x}) \end{pmatrix}$, με $U \subset \mathbb{R}^3$ ανοιχτό

$$\begin{aligned} \text{Εξ' ορισμού } \text{curl } F(\vec{x}) &= \left(\frac{\partial F_3}{\partial x_2}(\vec{x}) - \frac{\partial F_2}{\partial x_3}(\vec{x}) \right) \vec{e}_1 + \left(\frac{\partial F_1}{\partial x_3}(\vec{x}) - \frac{\partial F_3}{\partial x_1}(\vec{x}) \right) \vec{e}_2 + \left(\frac{\partial F_2}{\partial x_1}(\vec{x}) - \frac{\partial F_1}{\partial x_2}(\vec{x}) \right) \vec{e}_3 \\ &= \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} \in \mathbb{R}^3 \end{aligned}$$

Π.χ. για $F(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1 x_2 \\ 1 \end{pmatrix}$, έχουμε

$$\text{curl } F(\vec{x}) = \left(\frac{\partial 1}{\partial x_2} - \frac{\partial x_1 x_2}{\partial x_3} \right) \vec{e}_1 + \left(\frac{\partial x_1}{\partial x_3} - \frac{\partial 1}{\partial x_1} \right) \vec{e}_2 + \left(\frac{\partial x_1 x_2}{\partial x_1} - \frac{\partial x_1}{\partial x_2} \right) \vec{e}_3 = x_2 \vec{e}_3$$

- Ο Λαπλάσιανός τελεστής Δ ορίζεται για συναρτήσεις $f: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, ανοιχτό
κάθεως C^2 . Εξ' ορισμού $\Delta f(\vec{x}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(\vec{x}) + \dots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(\vec{x}) \in \mathbb{R}$

Παρατηρούμε ότι $\Delta f(\vec{x}) = \text{div}(\nabla f)(\vec{x})$

Π.χ. για $f(\vec{x}) = \|\vec{x}\|^2$, έχουμε $\nabla f(\vec{x}) = 2\vec{x}$ και $\Delta f(\vec{x}) = 2 \text{div } \vec{x} = 2n$

Ορ (i) Ένα διανυσματικό πεδίο $F: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ λέγεται συντηρητικό αν ισχύει $F(\vec{x}) = \nabla f(\vec{x})$ στο U , για κάποια συνάρτηση $f \in C^1(U)$ ($f: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$) που ονομάζεται δυναμικό.

(ii) Ένα διανυσματικό πεδίο $F: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ κλάσεως C^1 λέγεται αεμπέστο αν ισχύει $\operatorname{div} F(\vec{x}) = 0$ στο U .

(iii) Ένα διανυσματικό πεδίο $F: U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ κλάσεως C^1 λέγεται αετρόβιλο αν ισχύει $\operatorname{curl} F(\vec{x}) = \vec{0}$ στο U .

(iv) Μία συνάρτηση $f: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ κλάσεως C^2 λέγεται αρμονική όταν ικανοποιεί την εξίσωση Laplace $\Delta f(\vec{x}) = 0$ στο U .

Παράδειγμα: 1) Το βαρυτικό πεδίο $F(\vec{x}) = -\frac{GMm}{\|\vec{x}\|^3} \vec{x}$ είναι συντηρητικό διότι ισχύει $F(\vec{x}) = \nabla f(\vec{x})$ με $f(\vec{x}) = \frac{GMm}{\|\vec{x}\|}$ (βλ. Ασκ7)

2) Η συνάρτηση $f(\vec{x}) = \frac{GMm}{\|\vec{x}\|}$ είναι αρμονική στο $\mathbb{R}^3 \setminus \{\vec{0}\}$ ενώ η συνάρτηση $f(x_1, x_2) = x_1 x_2$ είναι αρμονική στο $\mathbb{R}^2$.

3) Για κάθε συνάρτηση $f \in C^2(\mathbb{R}^3)$ ($f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$), το διανυσματικό πεδίο

$F(\vec{x}) = \nabla f(\vec{x})$ είναι αετρόβιλο. Πράγματι

$$\operatorname{curl} F(\vec{x}) = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f}{\partial x_1} & \frac{\partial f}{\partial x_2} & \frac{\partial f}{\partial x_3} \end{vmatrix} = \underbrace{\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3} - \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_2} \right) \vec{e}_1 + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_1} - \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3} \right) \vec{e}_2 + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} \right) \vec{e}_3}_{\vec{0}}$$

Σχόλιο: Η αιτιολόγηση της χρήσης των λέξεων "αεμπέστο" και "αετρόβιλο" βασίζεται στο θεώρημα της απόκλισης και στο θεώρημα του Stokes που θα μελετήσουμε αργότερα.

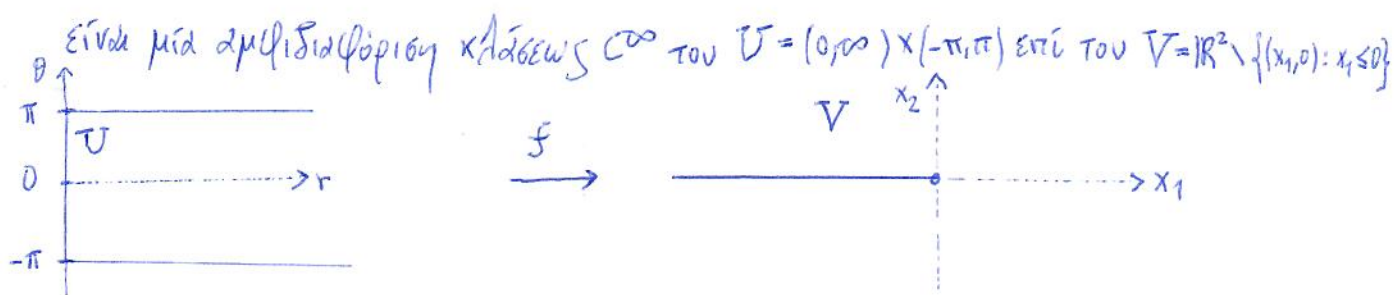
9) Το Θέωρημα αντίστροφης συνάρτησης

Ορ: Έστω U και V δύο ανοιχτά υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$. Μία αμφιδιαφύλιση κλάσεως C^k ($k \geq 1$) του U επί του V είναι μία συνάρτηση $f: U \rightarrow V$ κλάσεως C^k , 1-1 και επί τ.ω. η αντίστροφη συνάρτηση $g = f^{-1}: V \rightarrow U$ να είναι επίσης κλάσεως C^k .

Παραδείγματα 1) Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f \in C^1(\mathbb{R})$ τ.ω. $f'(a) \neq 0$ στο

σημείο $a \in \mathbb{R}$. Τότε ισχύει $f'(x) \neq 0$ σε ένα ανοιχτό διάστημα $U = (a-r, a+r)$ (επειδή η f' είναι συνεχής). Άρα ο περιορισμός της f στο U είναι μία συνάρτηση 1-1 και επί του ανοιχτού διαστήματος $V = f((a-r, a+r)) = (f(a-r), f(a+r))$ αν η f είναι αύξουσα. Επιπλέον η αντίστροφη συνάρτηση $g = f^{-1}: V \rightarrow U$ είναι επίσης C^1 με $g'(y) = \frac{1}{f'(g(y))}$. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι η f είναι μία αμφιδιαφύλιση κλάσεως C^1 του U επί του V .

2) Ο πολικός μετασχηματισμός $f: (0, \infty) \times (-\pi, \pi) \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{(x_1, 0) : x_1 \leq 0\}$
 $(r, \theta) \mapsto (x_1 = r \cos \theta, x_2 = r \sin \theta)$



με αντίστροφη συνάρτηση τη $g = f^{-1}: V \rightarrow U$

$$(x_1, x_2) \mapsto \begin{cases} r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}, \theta = \text{Arccos} \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} & \text{όταν } x_2 > 0 \\ r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}, \theta = \text{Arcsin} \frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} & \text{όταν } x_1 > 0 \\ r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}, \theta = -\text{Arccos} \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} & \text{όταν } x_2 < 0 \end{cases}$$

Θέωρημα: Έστω $f: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ κλάσεως C^k ($k \geq 1$). Υποθέτουμε ότι ανοιχτό

ο $n \times n$ πίνακας $Df(\vec{x})$ είναι αντιστρέψιμος στο σημείο $\vec{x} \in U$. Τότε υπάρχουν ανοιχτά σύνολα $U_0, V_0 \subset \mathbb{R}^n$ τ.ω. (i) $\vec{x} \in U_0 \subset U$, (ii) $f(\vec{x}) \in V_0 \subset \mathbb{R}^n$ και (iii) ο περιορισμός της f στο U_0 είναι μια αμφιδιαφορίση κλάσεως C^k επί του V_0 .

Επιπλέον, θέτοντας $g = f^{-1}: V_0 \rightarrow U_0$, ισχύει:

(iv) $\forall x \in U_0: Dg(f(\vec{x})) \circ Df(\vec{x}) = I_n$ όπου I_n είναι η ταυτοτική συνάρτηση του $\mathbb{R}^n$

[Άρα ο πίνακας $Df(\vec{x})$ είναι αντιστρέψιμος για κάθε $x \in U_0$ και έχουμε $Dg(f(\vec{x})) = (Df(\vec{x}))^{-1}$]

Απ (iv): Ισχύει $g(f(\vec{x})) = \vec{x}$, $\forall \vec{x} \in U_0$, άρα διαφορίζοντας τα δύο μέλη βρίσκουμε ότι $Dg(f(\vec{x})) \circ Df(\vec{x}) = I_n$ εναдь το διαφορικό της ταυτοτικής συνάρτησης $\vec{x} \mapsto \vec{x}$ είναι η ταυτοτική συνάρτηση I_n .

Παρατήρηση: Αμφιδιαφορίσεις υπάρχουν ΜΟΝΟ μεταξύ Ευκλείδειων χώρων της ΙΔΙΑΣ διάστασης. Πράγματι, αν ισχύει $U \xrightarrow{f} V \xrightarrow{g} U$ και $\vec{x} \mapsto f(\vec{x}) \mapsto g(f(\vec{x})) = \vec{x}$

$V \xrightarrow{g} U \xrightarrow{f} V$ με $U \subset \mathbb{R}^n$ ανοιχτό και f, g κλάσεως C^1 , συμπεραίνουμε $\vec{y} \mapsto g(\vec{y}) \mapsto f(g(\vec{y})) = \vec{y}$ $V \subset \mathbb{R}^m$ ανοιχτό

ότι $\begin{cases} Dg(f(\vec{x})) \circ Df(\vec{x}) = I_n, \forall \vec{x} \in U \\ Df(g(\vec{y})) \circ Dg(\vec{y}) = I_m, \forall \vec{y} \in V \end{cases}$ άρα η γραμμική συνάρτηση $Df(\vec{x}): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ είναι ισομορφισμός και $n=m$.

Παράδειγμα: Έστω $f(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} x_1 + x_1 x_2 x_3 \\ x_2 + x_1 x_2 \\ 2x_1 + x_3 + 3x_3^2 \end{pmatrix}$. Έχουμε $f \in C^\infty(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3)$, $f(\vec{0}) = \vec{0}$, $Df(\vec{x}) = \begin{bmatrix} 1+x_2x_3 & x_1x_3 & x_1x_2 \\ x_2 & 1+x_1 & 0 \\ 2 & 0 & 1+6x_3 \end{bmatrix}$ και ο $Df(\vec{0}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ είναι αντιστρέψιμος πίνακας

Άρα, υπάρχουν ανοιχτά σύνολα $U_0, V_0 \subset \mathbb{R}^3$ με $\vec{0} \in U_0$, $\vec{0} \in V_0$ τ.ω η $f: U_0 \rightarrow V_0$ να είναι μια αμφιδιαφορίση κλάσεως C^∞ . Επιπλέον για τιμές των (y_1, y_2, y_3) στο V_0 , το σύστημα με αγνώστους τους x_1, x_2, x_3 : $\begin{cases} x_1 + x_1 x_2 x_3 = y_1 \\ x_2 + x_1 x_2 = y_2 \\ 2x_1 + x_3 + 3x_3^2 = y_3 \end{cases} \Leftrightarrow f(\vec{x}) = \vec{y}$ έχει μια μοναδική λύση $\vec{x} = f^{-1}(\vec{y})$ στο U_0 .

10) Το Θέωρημα πεπλεγμένης συνάρτησης

Παραδείγματα 1) Έστω $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$, $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$. Θεωρούμε το σύνολο στάθμης της f για την τιμή $c > 0$:

$$E_c = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 = c\} \text{ και ένα σημείο } \vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \in E_c.$$

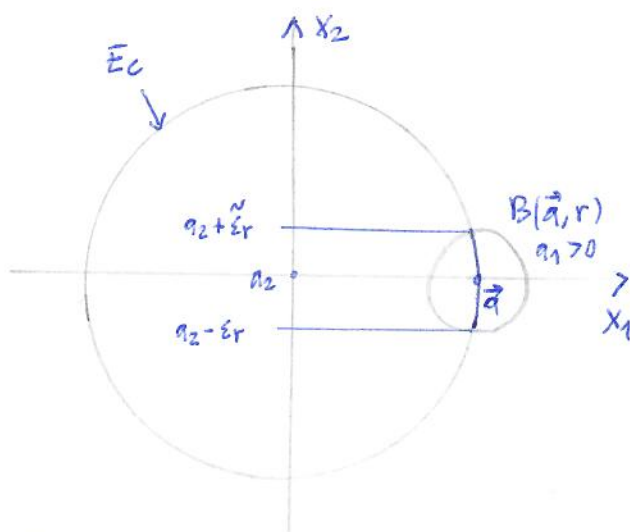
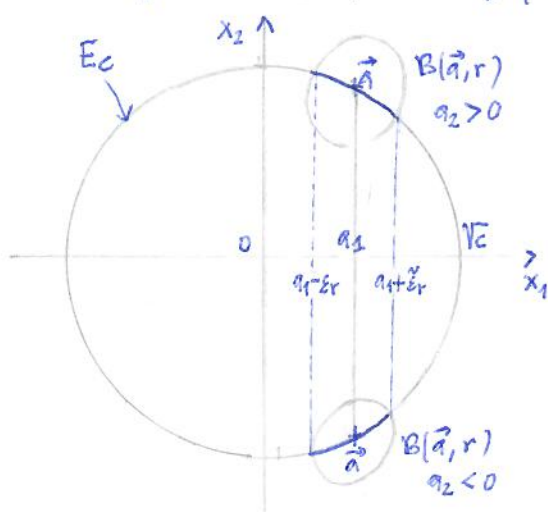
$$\text{Έχουμε } \nabla f(\vec{a}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{a}) \\ \frac{\partial f}{\partial x_2}(\vec{a}) \end{pmatrix} = 2\vec{a} \neq \vec{0}. \text{ Παρατηρούμε ότι}$$

α) Στα σημεία $\vec{a} \in E_c$ όπου $\frac{\partial f}{\partial x_2}(\vec{a}) = 2a_2 \neq 0$, το E_c είναι σε μία γειτονιά του $\vec{a}$,

το γράφημα μιας συνάρτησης της μεταβλητής x_1 . Πράγματι, για $r < \sqrt{c} - |a_1|$, ισχύει

$$E_c \cap B(\vec{a}, r) = \left\{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 \in (a_1 - \varepsilon_r, a_1 + \tilde{\varepsilon}_r) \text{ και } \begin{matrix} x_2 = \sqrt{c - x_1^2} & \text{αν } a_2 > 0 \\ x_2 = -\sqrt{c - x_1^2} & \text{αν } a_2 < 0 \end{matrix} \right\}$$

όπου το $\varepsilon_r > 0$ και το $\tilde{\varepsilon}_r > 0$ εξαρτώνται από το r και το $\vec{a}$.



β) Ομοίως, στα σημεία $\vec{a} \in E_c$ όπου $\frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{a}) = 2a_1 \neq 0$, το E_c είναι σε μία γειτονιά του $\vec{a}$, το γράφημα μιας συνάρτησης της μεταβλητής x_2 . Πράγματι, για $r < \sqrt{c} - |a_2|$, ισχύει

$$E_c \cap B(\vec{a}, r) = \left\{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_2 \in (a_2 - \varepsilon_r, a_2 + \tilde{\varepsilon}_r) \text{ και } \begin{matrix} x_1 = \sqrt{c - x_2^2} & \text{αν } a_1 > 0 \\ x_1 = -\sqrt{c - x_2^2} & \text{αν } a_1 < 0 \end{matrix} \right\}$$

όπου το $\varepsilon_r > 0$ και το $\tilde{\varepsilon}_r > 0$ εξαρτώνται από το r και το $\vec{a}$.

2) Έστω $f(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^2$, $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$. Βεβαιώστε το σύνολο στάθμης

της f για την τιμή $c=0$: $E_0 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : f(x_1, x_2) = 0\} = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_2 = \pm x_1\}$

Και ένα σημείο $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \in E_C$ ($|a_1| = |a_2|$). Έχουμε $f(\vec{a}) = \begin{pmatrix} 2a_1 \\ -2a_2 \end{pmatrix} \neq \vec{0} \Leftrightarrow \vec{a} \neq \vec{0}$.

α) Είναι φανερό ότι σε μία γειτονιά του $\vec{a} = \vec{0}$ (όπου $f(\vec{a}) = \vec{0}$), το $E_0 \cap B(\vec{a}, r)$

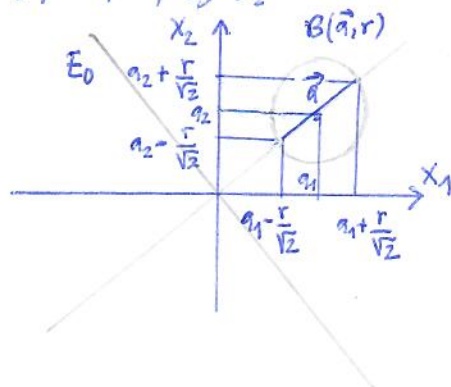
[illegible]

B) Αντίθετα, σε μια γειτονιά ενός σημείου $\vec{a} \neq \vec{0}$ (όπου $\frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{a}) \neq 0$ ΚΑΙ $\frac{\partial f}{\partial x_2}(\vec{a}) \neq 0$),

το σύνολο $E_0 \cap B(\bar{a}, r)$ είναι για $r > 0$ αρκετά μικρό, το γράφημα μιας συνάρτησης της μεταβλητής x_1 και το γράφημα μιας συνάρτησης της μεταβλητής x_2 .

Π.χ. αν $a_1 = a_2 > 0$ και $r \geq a_1$, έχουμε

$$E_0 \cap B(\vec{a}, r) = \left\{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \begin{array}{l} x_1 \in (a_1 - \frac{r}{\sqrt{2}}, a_1 + \frac{r}{\sqrt{2}}) \\ x_2 = x_1 \end{array} \right\}$$



Θεώρημα: Έστω $f: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, κλάσης C^k ($k \geq 1$), έστω $\vec{a} = (a_1, \dots, a_n) \in U$

και έστω $c = f(\vec{a}) \in \mathbb{R}$. Υποθέτουμε ότι ισχύει $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{a}) \neq 0$ για κάποιο i , $1 \leq i \leq n$.

$T_{\text{crt}}, (i)$ υπάρχει ένα ανοικτό σύνολο $U_0 \subset U$ π.ω. $\bar{x} \in U_0$
 (ii) υπάρχει ένα ανοικτό σύνολο $(U_0 \subset \mathbb{R}^n)$

iii) και υπάρχει μία συνάρτηση $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ τέτοια ώστε $\gamma(0) = x_0$ και $\gamma'(t) \in T_{\gamma(t)} V_0$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$.

(iii) και υπάρχει μία συνάρτηση $\varphi: V_0 \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε C^k τ.ω $\varphi(a_1, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_n) = a_i$ που ικανοποιούν την

(iv) $\vec{x} \in U_0$ and $f(\vec{x}) = c \Leftrightarrow (x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n) \in V_0$ and $x_i = \varphi(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n)$

(Η Απ. παραλείπεται)

Πορίσματα: Έστω $f: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ κλάσης C^k , έστω $\vec{a} \in U$ και $f(\vec{a}) = c \in \mathbb{R}$.
ανοιχτό

Υπό την προϋπόθεση ότι $\nabla f(\vec{a}) \neq \vec{0}$:

(i) Το σύνολο στάθμης $E_c = \{ \vec{x} \in U : f(\vec{x}) = c \}$ είναι τοπικά ^{σε μια γειτονιά του $\vec{a}$} μία επιφάνεια που είναι το γράφημα μιας συνάρτησης $n-1$ μεταβλητών.

(ii) Στο σημείο $\vec{a}$, η επιφάνεια στάθμης E_c έχει ένα εφαπτόμενο επίπεδο, κάθετο στο διάνυσμα $\nabla f(\vec{a})$

(iii) Ο μέγιστος ρυθμός αύξησης της f ^{στο $\vec{a}$} επιτυγχάνεται στην κατεύθυνση του $\nabla f(\vec{a})$.

Απ (i) Αφού $\nabla f(\vec{a}) \neq \vec{0}$, υπάρχει ένα i ($1 \leq i \leq n$) τ.ω $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{a}) \neq 0$ και έπεται από την (iv) του προηγούμενου θεωρήματος ότι

$$E_c \cap U_0 = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^n : \begin{matrix} (x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n) \in V_0 \\ x_i = \varphi(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n) \end{matrix} \right\}$$

(ii) Χωρίς βλάβη της γενικότητας, υποθέτουμε ότι $\frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{a}) \neq 0$ ($i=n$)

και θέτουμε $g(x_1, \dots, x_{n-1}) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ \varphi(x_1, \dots, x_{n-1}) \end{pmatrix}$, $g: V_0 \subset \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Από την (iv) του προηγούμενου θεωρήματος έπεται ότι $f(g(x_1, \dots, x_{n-1})) = c$,

$\forall (x_1, \dots, x_{n-1}) \in V_0$ και διαφορίζοντας την εξίσωση βρίσκουμε ότι

$$Df(g(x_1, \dots, x_{n-1})) \circ Dg(x_1, \dots, x_{n-1}) = 0, \quad \forall (x_1, \dots, x_{n-1}) \in V_0$$

με $Dg(x_1, \dots, x_{n-1}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(x_1, \dots, x_{n-1}) & \dots & \frac{\partial \varphi}{\partial x_{n-1}}(x_1, \dots, x_{n-1}) \end{bmatrix}$ $n \times (n-1)$ πίνακας

Ειδικότερα για $(x_1, \dots, x_{n-1}) = (a_1, \dots, a_{n-1})$ έχουμε $g(a_1, \dots, a_{n-1}) = \vec{a}$ και

$$Df(\vec{a}) \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(a_1, \dots, a_{n-1}) & \dots & \frac{\partial \varphi}{\partial x_{n-1}}(a_1, \dots, a_{n-1}) \end{bmatrix} = 0 \quad \text{ή ισοδύναμα}$$

πίνακας $1 \times n$

πίνακας $n \times (n-1)$

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{a}) + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{a}) \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(a_1, \dots, a_{n-1}) = 0 \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_{n-1}}(\vec{a}) + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{a}) \frac{\partial \varphi}{\partial x_{n-1}}(a_1, \dots, a_{n-1}) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(a_1, \dots, a_{n-1}) = - \frac{\frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{a})}{\frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{a})} \\ \vdots \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x_{n-1}}(a_1, \dots, a_{n-1}) = - \frac{\frac{\partial f}{\partial x_{n-1}}(\vec{a})}{\frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{a})} \end{cases}$$

Η εξίσωση του εφαιπόμενου επιπέδου στο γράφημα της φ στο σημείο

$$(a_1, \dots, a_{n-1}, \varphi(a_1, \dots, a_{n-1})) = \vec{a} \quad \text{είναι δοστών}$$

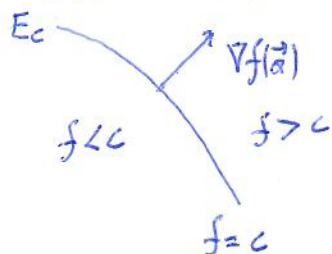
$$x_n = \varphi(a_1, \dots, a_{n-1}) + \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(a_1, \dots, a_{n-1})(x_1 - a_1) + \dots + \frac{\partial \varphi}{\partial x_{n-1}}(a_1, \dots, a_{n-1})(x_{n-1} - a_{n-1})$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{a})(x_1 - a_1) + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{a})(x_n - a_n) = 0 \Leftrightarrow \nabla f(\vec{a}) \cdot (\vec{x} - \vec{a}) = 0$$

(iii) Έστω $\vec{v}_0 = \frac{\nabla f(\vec{a})}{\|\nabla f(\vec{a})\|} \in \mathbb{R}^n$. Θα δείξουμε ότι αν $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ είναι

ένα άλλο μοναδιαίο διάνυσμα ($\|\vec{v}\|=1$), τότε ισχύει $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(\vec{a}) \leq \frac{\partial f}{\partial \vec{v}_0}(\vec{a})$.

$$\text{Πράγματι, έχουμε } \frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(\vec{a}) = \nabla f(\vec{a}) \cdot \vec{v} \stackrel{\text{C.S}}{\leq} \underbrace{\|\nabla f(\vec{a})\|}_{=1} \underbrace{\|\vec{v}\|}_{=1} = \|\nabla f(\vec{a})\| = \frac{\partial f}{\partial \vec{v}_0}(\vec{a})$$



$$\|\nabla f(\vec{a})\| \cdot \frac{\nabla f(\vec{a})}{\|\nabla f(\vec{a})\|}$$

□

Παράδειγμα: 1) Θα δείξουμε ότι υπάρχει C^∞ συνάρτηση $\phi(x_1, x_2)$

ορισμένη σε μία γειτονιά V_0 του σημείου $(3, -2)$ τ.ω. $\phi(3, -2) = 1$

και $\phi^6(x_1, x_2) + x_1 \phi^2(x_1, x_2) + 5x_2 \phi(x_1, x_2) + x_2^2 + 2 = 0$, $\forall (x_1, x_2) \in V_0$.

Πράγματι, θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x_1, x_2, x_3) = x_3^6 + x_1 x_3^2 + 5x_2 x_3 + x_2^2 + 2$,

$f \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$. Έχουμε $\frac{\partial f}{\partial x_3}(x_1, x_2, x_3) = 6x_3^5 + 2x_1 x_3 + 5x_2$ και

$\frac{\partial f}{\partial x_3}(3, -2, 1) = 2 \neq 0$. Άρα η ύπαρξη μιας συνάρτησης $\phi: V_0 \xrightarrow{C^\infty} \mathbb{R}$

Τ.ω $\phi(3, -2) = 1$ και $f(x_1, x_2, \phi(x_1, x_2)) = f(3, -2, 1) = 0$, $\forall (x_1, x_2) \in V_0$
 προκύπτει από το θεώρημα πεπεσμένης συνάρτησης.

2) Το ελλειψοειδές $\frac{x_1^2}{\alpha_1^2} + \frac{x_2^2}{\alpha_2^2} + \frac{x_3^2}{\alpha_3^2} = 1$ (με $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 > 0$ σταθερές)

είναι το σύνολο στάθμης της συνάρτησης $f(x_1, x_2, x_3) = \frac{x_1^2}{\alpha_1^2} + \frac{x_2^2}{\alpha_2^2} + \frac{x_3^2}{\alpha_3^2}$

για την τιμή $c = 1$. Έχουμε $f \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$ και

$$\nabla f(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} \frac{2x_1}{\alpha_1^2} \\ \frac{2x_2}{\alpha_2^2} \\ \frac{2x_3}{\alpha_3^2} \end{pmatrix} \neq \vec{0}, \forall \vec{x} \neq \vec{0}.$$

Άρα το ελκυστήριο επίπεδο σε ένα σημείο $\vec{a} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}$ του ελλειψοειδούς

$$\text{έχει εξίσωση } \nabla f(\vec{a}) \cdot (\vec{x} - \vec{a}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2\alpha_1}{\alpha_1^2} (x_1 - \alpha_1) + \frac{2\alpha_2}{\alpha_2^2} (x_2 - \alpha_2) + \frac{2\alpha_3}{\alpha_3^2} (x_3 - \alpha_3) = 0$$

$$\Leftrightarrow \alpha_1 \frac{x_1}{\alpha_1^2} + \alpha_2 \frac{x_2}{\alpha_2^2} + \alpha_3 \frac{x_3}{\alpha_3^2} = \frac{\alpha_1^2}{\alpha_1^2} + \frac{\alpha_2^2}{\alpha_2^2} + \frac{\alpha_3^2}{\alpha_3^2} = 1$$