ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΘΕΜΑΤΑ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ ΤΗΣ 3/4/2024
του
ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΥ ΛΟΓΙΣΜΟΥ ΙΙΙ

Θέμα 1ον

1A. Για ποιούς αριθμούς $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \Gamma$, έχουμε $\lim\limits_{(x,y)\to(2,1)} \dfrac{x^{xy} + \mathrm{A}x + \mathrm{B}y + \Gamma}{\sqrt{(x-2)^2+(y-1)^2}} = 0$;

Απάντηση Η συνάρτηση $f(x,y) = x^{xy} = e^{xy\log x}$ ορίζεται και είναι C^∞ για $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ με $x>0$. Ιδιαιτέρως

$$\lim_{(x,y)\to(2,1)} \frac{f(x,y) - f(2,1) - f_x(2,1)(x-2) - f_y(2,1)(y-1)}{\sqrt{(x-2)^2+(y-1)^2}} = 0 .$$

Υπολογίζοντας, βρίσκουμε

$$f_x(x,y) = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = yx^{xy}(1+\log x) \text{ και } f_y(x,y) = \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = x^{xy+1}\log x .$$

Άρα $f_x(2,1) = 4(1+\log 2)$, $f_y(2,1) = 8\log 2$, και, αφού $f(2,1)=4$, έχουμε

$$\lim_{(x,y)\to(2,1)} \frac{f(x,y) - 4 - 4(1+\log 2)(x-2) - 8(\log 2)(y-1)}{\sqrt{(x-2)^2+(y-1)^2}} = 0 ,$$

δηλαδή

$$\lim_{(x,y)\to(2,1)} \frac{f(x,y) - 4(1+\log 2)x - 8(\log 2)y + (4+16\log 2)}{\sqrt{(x-2)^2+(y-1)^2}} = 0 ,$$

απ' όπου διαβάζουμε: $\mathrm{A} = -4(1+\log 2)$, $\mathrm{B} = -8\log 2$ και $\Gamma = 4 + 16\log 2$.
Σημειωτέον ότι αυτά τα $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \Gamma$ είναι μοναδικά, από την μοναδικότητα του διαφορικού της f στο σημείο $(2,1)$.

1B. Υπολογίστε το εμβαδόν του χωρίου στο xy – επίπεδο που περικλείεται από την καμπύλη

$$x^2 + y^2 = x + \sqrt{x^2+y^2} .$$

Απάντηση Γράφοντας την εξίσωση της καμπύλης σε πολικές συντεταγμένες, δηλαδή θέτοντας $x = r\cos\theta$ και $y = r\sin\theta$, βρίσκουμε: $r^2 = r\cos\theta + r$, ισοδύναμα $r = 1+\cos\theta$. Άρα πρόκειται για ένα καρδιοειδές και το εμβαδόν του χωρίου K που περικλείει είναι ίσο με

$$\iint_{\mathrm{K}} dxdy = 2\int_{\theta=0}^{\pi}\left(\int_{r=0}^{1+\cos\theta} rdr\right)d\theta = \int_{\theta=0}^{\pi}(1+\cos\theta)^2 d\theta = \int_{\theta=0}^{\pi}(1+\cos^2\theta + 2\cos\theta)d\theta = \pi + \frac{1}{2}\int_{\theta=0}^{\pi}[1+\cos(2\theta)]d\theta = \frac{3\pi}{2} .$$

Θέμα 2ον

2A. Μελετήστε το όριο $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0) \\ \mu\varepsilon\ y\neq x^2}} \dfrac{e^{x^2-y} - \sin(x^2-y) - 1}{1-\cos(x^2-y)}$.

Απάντηση Θέτοντας $u = x^2 - y$, βρίσκουμε

$$\frac{e^{x^2-y} - \sin(x^2-y) - 1}{1-\cos(x^2-y)} = \frac{e^u - \sin u - 1}{1-\cos u} ,$$

και η μελέτη του εν λόγω ορίου ανάγεται στην μελέτη του ορίου:

$$\lim_{u\to 0}\frac{e^u - \sin u - 1}{1-\cos u} = \lim_{u\to 0}\frac{e^u - \cos u}{\sin u} = \lim_{u\to 0}\frac{e^u + \sin u}{\cos u} = 1 ,$$

όπου κάναμε χρήση του κανόνα του L' Hôpital.

2B. Θεωρήστε το διανυσματικό πεδίο $\vec{F} = \dfrac{-y}{x^2+y^2}\vec{i} + \dfrac{x}{x^2+y^2}\vec{j} + z\vec{k}$ ορισμένο για $(x,y,z)\in\Omega$ όπου $\Omega = \mathbb{R}^3 - \{(0,0,z) : z\in\mathbb{R}\}$. Εξετάστε αν υπάρχει συνάρτηση $f\in C^1(\Omega)$ τέτοια ώστε $\vec{\nabla} f = \vec{F}$ (στα σημεία του Ω).

Απάντηση Αν υπήρχε $f\in C^1(\Omega)$ τέτοια ώστε $\vec{\nabla} f = \vec{F}$, στα σημεία του Ω, τότε

$$\int_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_\gamma \vec{\nabla} f\cdot d\vec{r} = 0, \text{ για κάθε } \textbf{\textit{κλειστή}} \text{ καμπύλη στο } \Omega.$$

Αλλά αν θεωρήσουμε την καμπύλη (κύκλο) $\gamma:[0,2\pi]\to\Omega$, με $\gamma(t)=(\cos t,\sin t,0)$, $0\le t\le 2\pi$, τότε

$$\int_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_\gamma \left(\frac{-y}{x^2+y^2}dx+\frac{x}{x^2+y^2}dy+zdz\right) = \int_{t=0}^{2\pi}\left[\frac{-\sin t}{\cos^2 t+\sin^2 t}(-\sin t)+\frac{\cos t}{\cos^2 t+\sin^2 t}\cos t\right]dt = 2\pi \neq 0.$$

Άρα ***δεν*** υπάρχει τέτοια f (***παρόλο*** που $curl\vec{F}=\vec{0}$).

Σημείωση. $curl\vec{F}=\vec{0}$ (στο Ω) $\Rightarrow$ $\exists\, f\in C^1(\Omega)$ με $\vec{\nabla} f=\vec{F}$ (στο Ω), με την προϋπόθεση το Ω να είναι ***απλά συνεκτικό***. Το $\Omega=\mathbb{R}^3-\{(0,0,z):\, z\in\mathbb{R}\}$ δεν είναι απλά συνεκτικό, και <u>εν γένει</u> αστρόβιλα διανυσματικά πεδία στο Ω <u>δεν</u> είναι συντηρητικά σ' αυτό.

Θέμα 3^{ον}

3ΑΥπολογίστε το εμβαδόν του μέρους της επιφάνειας του κώνου $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3: z=2\sqrt{x^2+y^2}\}$ το οποίο ευρίσκεται μέσα στον κύλινδρο $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3: x^2-8x+4y^2-4y=18\}$. (Η βάση του κυλίνδρου είναι *έλλειψη* στο $xy-$επίπεδο.)

Απάντηση Θέτοντας $\varphi(x,y)=2\sqrt{x^2+y^2}$, το στοιχείο εμβαδού της επιφάνειας $z=\varphi(x,y)$ είναι

$$d\sigma=\sqrt{1+\varphi_x^2+\varphi_y^2}\,dxdy=\sqrt{1+\left(\frac{2x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2+\left(\frac{2y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2}\,dxdy=\sqrt{5}dxdy.$$

Άρα το ζητούμενο εμβαδόν είναι ίσο με

$$\iint_{\mathrm{K}}\sqrt{5}dxdy=\sqrt{5}\,\varepsilon\mu\beta(\mathrm{K}),$$

όπου K είναι το χωρίο που περικλείεται από την έλλειψη στο $xy-$επίπεδο με εξίσωση

$$x^2-8x+4y^2-4y=18 \;\Leftrightarrow\; (x-4)^2+(2y-1)^2=35 \;\Leftrightarrow\; \left(\frac{x-4}{\sqrt{35}}\right)^2+\left(\frac{y-(1/2)}{\sqrt{35}/2}\right)^2=1.$$

Άρα

$$\varepsilon\mu\beta(\mathrm{K})=\pi\cdot\sqrt{35}\cdot\frac{\sqrt{35}}{2}=\frac{35\pi}{2} \quad\text{και}\quad \iint_{\mathrm{K}}\sqrt{5}dxdy=35\pi\sqrt{5}/2,$$

όπου χρησιμοποιήσαμε και τον τύπο που δίνει το εμβαδόν που περικλείει μια έλλειψη.

3Β. Για ποιά τιμή του αριθμού α, υπάρχει το όριο

$$\lim_{N\to\infty}\sum_{1\le k,\ell\le N}\frac{k\ell}{(N^3+k^3+\ell^3)^\alpha}$$

και είναι ***<u>θετικός</u>*** αριθμός;

Υπόδειξη Θυμηθείτε ότι το ολοκλήρωμα είναι όριο «ενδιάμεσων» αθροισμάτων Riemann.

Απάντηση Για μια συνεχή συνάρτηση $f(x,y)$, το όριο

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N^2}\sum_{1\le k,\ell\le N}f(k/N,\ell/N)=\iint_{[0,1]\times[0,1]}f(x,y)dxdy.$$

Έτσι, γράφοντας το άθροισμα

$$S(\alpha):=\sum_{1\le k,\ell\le N}\frac{k\ell}{(N^3+k^3+\ell^3)^\alpha}=\frac{1}{N^{3\alpha-4}}\left[\frac{1}{N^2}\sum_{1\le k,\ell\le N}\frac{(k/N)(\ell/N)}{[1+(k/N)^3+(\ell/N)^3]^\alpha}\right]$$

και λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι το όριο

$$\lim_{N\to\infty}\left[\frac{1}{N^2}\sum_{1\le k,\ell\le N}\frac{(k/N)(\ell/N)}{[1+(k/N)^3+(\ell/N)^3]^\alpha}\right]=\iint_{[0,1]\times[0,1]}\frac{xydxdy}{[1+x^3+y^3]^\alpha}>0,$$

βρίσκουμε ότι

$$\lim_{N\to\infty} S(\alpha)=\begin{cases} 0 & \alpha\nu \ \ \alpha>4/3 \\ \iint\limits_{[0,1]\times[0,1]} \dfrac{xydxdy}{[1+x^3+y^3]^{4/3}} & \alpha\nu \ \ \alpha=4/3 \\ \infty & \alpha\nu \ \ \alpha<4/3. \end{cases}$$

Θέμα 4^{ον}

4A Θεωρήστε μια C^1 συνάρτηση $f:\Omega\to\mathbb{R}$ ορισμένη στο σύνολο $\Omega=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3: x^2+y^2+z^2<1\}$ τέτοια ώστε $f(0,0,0)=0$ και

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)\right|\le 1\,,\ \left|\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)\right|\le 2\,,\ \left|\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)\right|\le 3\,, \text{ για κάθε } (x,y,z)\in\Omega.$$

Αποδείξτε ότι

$$|f(x,y,z)|\le\sqrt{14(x^2+y^2+z^2)} \quad \text{για κάθε } (x,y,z)\in\Omega.$$

Υπόδειξη Θεωρήστε την συνάρτηση f περιορισμένη στα σημεία (tx,ty,tz), $0\le t\le 1$, του ευθυγράμμου τμήματος $[(0,0,0),(x,y,z)]$. Θυμηθείτε επίσης την ανισότητα Cauchy-Schwarz.

Απάντηση Σταθεροποιώντας το $(x,y,z)\in\Omega$, θεωρούμε την συνάρτηση

$$\varphi(t)=f(tx,ty,ty)\,,\ 0\le t\le 1.$$

Από το θεώρημα μέσης τιμής,

$$f(x,y,z)=f(x,y,z)-f(0,0,0)=\varphi(1)-\varphi(0)=\varphi'(\tau)\,, \text{ για κάποιο } \tau\in[0,1].$$

Αλλά, από τον κανόνα της αλυσίδας,

$$\varphi'(\tau)=xf_x(\tau x,\tau y,\tau y)+yf_y(\tau x,\tau y,\tau y)+zf_z(\tau x,\tau y,\tau y)$$

και συνεπώς, από την υπόθεση για τις παραγώγους της f,

$$|f(x,y,z)|=|\varphi'(\tau)|=|xf_x(\tau x,\tau y,\tau y)+yf_y(\tau x,\tau y,\tau y)+zf_z(\tau x,\tau y,\tau y)|$$
$$\le\sqrt{x^2+y^2+z^2}\sqrt{1^2+2^2+3^2}=\sqrt{14(x^2+y^2+z^2)}\,.$$

4B Γράψτε ένα ολοκλήρωμα για το μήκος της καμπύλης που είναι η τομή της σφαίρας $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3: x^2+y^2+z^2=4\}$ και του κυλίνδρου $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3: x^2+y^2=2x\}$.

Απάντηση Παραμετρικοποιώντας τον κύκλο $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: x^2+y^2=2x\}$ με τις εξισώσεις

$$x=1+\cos t\,,\ y=\sin t\,,\ 0\le t\le 2\pi\,,$$

και υπολογίζοντας

$$z=\pm\sqrt{4-x^2-y^2}=\pm\sqrt{4-(1+\cos t)^2-\sin^2 t}=\pm\sqrt{2-2\cos t}=\pm\sqrt{2}\sqrt{2\sin^2(t/2)}=\pm 2\sin(t/2)\,,$$

βρίσκουμε μια παραμέτρηση της εν λόγω καμπύλης:

$$x=1+\cos t\,,\ y=\sin t\,,\ z=\pm 2\sin(t/2)\,,\ 0\le t\le 2\pi\,.$$

Άρα το μήκος της είναι ίσο με

$$2\int_{t=0}^{2\pi}\sqrt{(dx/dt)^2+(dy/dt)^2+(dz/dt)^2}\,dt=2\int_{t=0}^{2\pi}\sqrt{(-\sin t)^2+(\cos t)^2+[\cos(t/2)]^2}\,dt$$
$$=2\int_0^{2\pi}\sqrt{1+\cos^2(t/2)}\,dt=4\int_0^{\pi}\sqrt{1+\cos^2 u}\,du\,.$$
