

Άσκ 1 : Έστω $f = U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ και έστω $\vec{a} \in U$. Υποθέτουμε
 ανοιχτό

ότι $\exists T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ γραμμική συνάρτηση τ.ω $\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} \frac{f(\vec{x}) - f(\vec{a}) - T(\vec{x} - \vec{a})}{\|\vec{x} - \vec{a}\|} = 0 \quad (*)$

Να δείχθει ότι η f είναι διαφορίσιμη στο $\vec{a}$ και $T = Df(\vec{a})$

Λύση Υποθέτουμε ότι ισχύει $(*)$ και επιλέγουμε $\vec{x} = (a_1, \dots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \dots, a_n)$

Τότε έχουμε $\frac{f(a_1, \dots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \dots, a_n) - f(\vec{a}) - T((x_i - a_i)\vec{e}_i)}{|x_i - a_i|} \xrightarrow{x_i \rightarrow a_i} 0$

(επειδή $\vec{x} - \vec{a} = (x_i - a_i)\vec{e}_i$ και $\|\vec{x} - \vec{a}\| = |x_i - a_i|$) ή ισοδύναμα

$\frac{f(a_1, \dots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \dots, a_n) - f(\vec{a}) - T((x_i - a_i)\vec{e}_i)}{x_i - a_i} \xrightarrow{x_i \rightarrow a_i} 0$

[επειδή $\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a} |\varphi(x)| = 0$ για $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}$]

Άρα $\lim_{x_i \rightarrow a_i} \left(\frac{f(a_1, \dots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \dots, a_n) - f(\vec{a})}{x_i - a_i} - T\vec{e}_i \right) = 0$ και συμπεραίνουμε

ότι για $i=1, \dots, n$ η μερική παράγωγος $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{a})$ υπάρχει και είναι ίση με $T\vec{e}_i$.

Αποδείχνουμε λοιπόν ότι ο πίνακας της T στην κανονική βάση είναι

$\left[\frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{a}), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{a}) \right]$ και από την $(*)$ έπεται ότι η f είναι διαφορίσιμη στο $\vec{a}$
 και ισχύει $T = Df(\vec{a})$.

Άσκ 2 Να δείχθει ότι η συνάρτηση $f(x_1, x_2) = \begin{cases} (x_1^2 + x_2^2) \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}\right) & \text{για } (x_1, x_2) \neq (0,0) \\ 0 & \text{για } (x_1, x_2) = (0,0) \end{cases}$

είναι διαφορίσιμη στο σημείο $(0,0)$ αλλά δεν είναι C^1 σε μια γειτονιά του $(0,0)$.

Λύση: υπολογίζουμε

$$\bullet \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2) = 2x_1 \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}\right) - \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} \cos\left(\frac{1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}\right) \text{ για } (x_1, x_2) \neq (0, 0)$$

$$\bullet \frac{\partial f}{\partial x_1}(0, 0) = \lim_{x_1 \rightarrow 0} \frac{f(x_1, 0) - f(0, 0)}{x_1 - 0} = \lim_{x_1 \rightarrow 0} x_1 \sin \frac{1}{|x_1|} = 0$$

$$\bullet \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2) = 2x_2 \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}\right) - \frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} \cos\left(\frac{1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}\right) \text{ για } (x_1, x_2) \neq (0, 0)$$

$$\bullet \frac{\partial f}{\partial x_2}(0, 0) = \lim_{x_2 \rightarrow 0} \frac{f(0, x_2) - f(0, 0)}{x_2 - 0} = \lim_{x_2 \rightarrow 0} x_2 \sin \frac{1}{|x_2|} = 0$$

Εξ' αλλού παρατηρούμε ότι ισχύει

$$\lim_{(x_1, x_2) \rightarrow (0, 0)} \frac{f(x_1, x_2) - f(0, 0) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(0, 0)x_1 - \frac{\partial f}{\partial x_2}(0, 0)x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} = \lim_{(x_1, x_2) \rightarrow (0, 0)} \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}\right) = 0,$$

έτσι η f είναι διαφορίσιμη στο $(0, 0)$. Όμως η παράγωγος $\frac{\partial f}{\partial x_1}$

(και λόγω συμμετρίας η $\frac{\partial f}{\partial x_2}$) δεν είναι συνεχής στο $(0, 0)$. Πράγματι,

$$\text{θετώντας } \varphi(x_1, x_2) = \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} \cos\left(\frac{1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}\right) \text{ βλέπουμε ότι το όριο}$$

$\lim_{(x_1, x_2) \rightarrow (0, 0)} \varphi(x_1, x_2)$ δεν υπάρχει, διότι

$$\alpha) \varphi(0, x_2) = 0 \Rightarrow \lim_{x_2 \rightarrow 0} \varphi(0, x_2) = 0$$

ενώ

$$\beta) \varphi(x_1, 0) = \frac{x_1}{|x_1|} \cos\left(\frac{1}{|x_1|}\right) \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} \varphi\left(\frac{1}{2k\pi}, 0\right) = 1$$

Άσκ 3 Έστω $f, g: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, διαφορίσιμες στο U , με

$$f = (f_1, \dots, f_m), g = (g_1, \dots, g_m). \text{ Έστω επίσης } \varphi(\vec{x}) = \sin(\|f(\vec{x})\|^2)$$

Να υπολογίσετε (i) το $D(f \cdot g)(\vec{x})$ (ii) το $D(\|f\|^2)(\vec{x})$ (iii) το $D\varphi(\vec{x})$

εξ γινόμενο

Λύση: (i) Έχουμε $\begin{cases} f, g: U \rightarrow \mathbb{R}^m \\ f \cdot g = f_1 g_1 + \dots + f_m g_m \end{cases}$ (διαφορίσιμη στο U ως άθροισμα γινόμενων διαφορίσιμων συναρτήσεων). Για $j=1, \dots, n$ ισχύει

$$\frac{\partial (f \cdot g)}{\partial x_j} = \frac{\partial f_1}{\partial x_j} g_1 + f_1 \frac{\partial g_1}{\partial x_j} + \dots + \frac{\partial f_m}{\partial x_j} g_m + f_m \frac{\partial g_m}{\partial x_j}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial (f \cdot g)}{\partial x_j} = \frac{\partial f}{\partial x_j} \cdot g + f \cdot \frac{\partial g}{\partial x_j} \quad \text{Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι}$$

εξ γινόμενο

$$\begin{aligned} D(f \cdot g)(\vec{x}) &= \left[\frac{\partial (f \cdot g)}{\partial x_1}(\vec{x}) \dots \frac{\partial (f \cdot g)}{\partial x_n}(\vec{x}) \right] \text{ πίνακας } 1 \times n \\ &\quad \text{γραμμή} \\ &= [g_1(\vec{x}) \dots g_m(\vec{x})] \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{x}) & \dots & \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{x}) \\ \text{στήλες} \end{bmatrix} + [f_1(\vec{x}) \dots f_m(\vec{x})] \begin{bmatrix} \frac{\partial g}{\partial x_1}(\vec{x}) & \dots & \frac{\partial g}{\partial x_n}(\vec{x}) \\ \text{στήλες} \end{bmatrix} \\ &\quad \parallel \qquad \parallel \qquad \parallel \qquad \parallel \\ &\quad \text{πίνακας } 1 \times m \quad \text{πίνακας } m \times n \quad \text{πίνακας } 1 \times m \quad \text{πίνακας } m \times n \\ &\quad Df(\vec{x}) \qquad \qquad \qquad Dg(\vec{x}) \end{aligned}$$

$$D(f \cdot g)(\vec{x}) = [g_1(\vec{x}) \dots g_m(\vec{x})] \cdot Df(\vec{x}) + [f_1(\vec{x}) \dots f_m(\vec{x})] \cdot Dg(\vec{x})$$

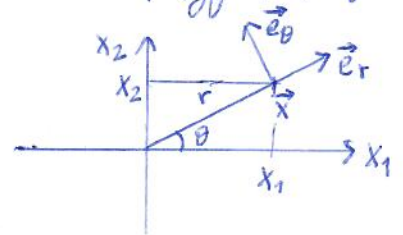
(ii) Ειδικότερα ισχύει (όταν $f = g$)

$$D(\|f\|^2)(\vec{x}) = 2 [f_1(\vec{x}) \dots f_m(\vec{x})] \cdot Df(\vec{x}).$$

(iii) Τέλος, έχουμε $D\varphi(\vec{x}) = \sin'(\|f(\vec{x})\|^2) D(\|f\|^2)(\vec{x})$
 $= 2\cos(\|f(\vec{x})\|^2) \begin{bmatrix} f_1(\vec{x}) & \dots & f_m(\vec{x}) \end{bmatrix} \cdot Df(\vec{x})$
πίνακας $1 \times m$ πίνακας $m \times n$

Ασκ 4 Έστω $u \in C^1(\mathbb{R}^2)$. Στις πολικές συντεταγμένες $\begin{cases} x_1 = r \cos \theta \\ x_2 = r \sin \theta \end{cases}$
 η u γράφεται $u(x_1, x_2) = \varphi(r, \theta)$.

(i) Να δείχθει ότι για $\vec{x} \neq \vec{0}$ ισχύει $\nabla u(\vec{x}) = \frac{\partial \varphi}{\partial r}(r, \theta) \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta}(r, \theta) \vec{e}_\theta$
 όπου $\vec{e}_r = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}$, $\vec{e}_\theta = \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix}$



(ii) Να υπολογιστεί το $\nabla u(\vec{x})$ ($\vec{x} \neq \vec{0}$) όταν

$\varphi(r, \theta) = r^k \cos(k\theta)$ (με $k \in \mathbb{N}$) και όταν $u(x_1, x_2) = \psi(r)$

Λύση: Έχουμε $\varphi(r, \theta) = u(r \cos \theta, r \sin \theta) = u(f(r, \theta))$ όπου

$f = (0, \infty) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ είναι C^1 στο πεδίο ορισμού της
 $(r, \theta) \mapsto (r \cos \theta, r \sin \theta)$

Επομένως

$$D\varphi(r, \theta) = \left[\frac{\partial \varphi}{\partial r}(r, \theta) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \theta}(r, \theta) \right] = Du(r \cos \theta, r \sin \theta) \circ Df(r, \theta)$$

$$= \left[\frac{\partial u}{\partial x_1}(r \cos \theta, r \sin \theta) \quad \frac{\partial u}{\partial x_2}(r \cos \theta, r \sin \theta) \right] \cdot \begin{bmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{bmatrix}$$

$$= [\nabla u(r \cos \theta, r \sin \theta) \cdot \vec{e}_r \quad r \nabla u(r \cos \theta, r \sin \theta) \cdot \vec{e}_\theta]$$

Όπως στην ορθοκανονική βάση $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$, το $\nabla u(\vec{x})$ γράφεται

$$\nabla u(\vec{x}) = (\nabla u(r \cos \theta, r \sin \theta) \cdot \vec{e}_r) \vec{e}_r + (r \nabla u(r \cos \theta, r \sin \theta) \cdot \vec{e}_\theta) \vec{e}_\theta.$$

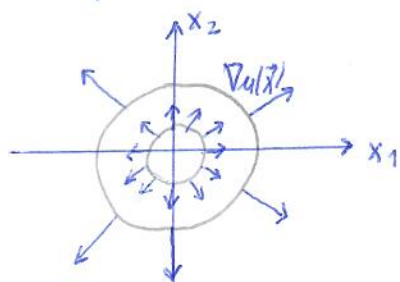
Άρα $\nabla u(\vec{x}) = \frac{\partial \varphi}{\partial r}(r, \theta) \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta}(r, \theta) \vec{e}_\theta$ για $\vec{x} \neq \vec{0}$.

(ii) Ειδικότερα, όταν $\varphi(r, \theta) = r^K \cos(K\theta)$, βρίσκουμε $\frac{\partial \varphi}{\partial r}(r, \theta) = K r^{K-1} \cos(K\theta)$

και $\frac{\partial \varphi}{\partial \theta}(r, \theta) = -K r^K \sin(K\theta)$. Άρα $\nabla \varphi(\vec{x}) = K r^{K-1} (\cos(K\theta) \vec{e}_r - \sin(K\theta) \vec{e}_\theta)$

Όταν $u(x_1, x_2) = \psi(r)$ (δηλαδή η u είναι συνάρτηση μόνο της ακτίνας $r = \|\vec{x}\|$) έχουμε $\nabla u(\vec{x}) = \psi'(r) \vec{e}_r = \psi'(\|\vec{x}\|) \frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|}$

Στην περίπτωση αυτή, παρατηρούμε ότι τα σύνολα σάθρης της u είναι ομοκέντροι κύκλοι ενώ το $\nabla u(\vec{x})$ είναι ένα ακτινωτό διανυσματικό πεδίο.

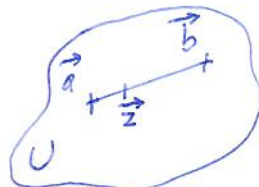


Λέμ 5: Έστω $f: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, διαφορίσιμη στο U και έστω

$\vec{a}, \vec{b} \in U$. Υποθέτουμε ότι το ευθύγραμμο τμήμα

$$[\vec{a}, \vec{b}] = \{ \vec{a} + t(\vec{b} - \vec{a}) : t \in [0, 1] \}$$

περιέχεται στο U .



Να δείχθεί ότι ισχύει $f(\vec{b}) - f(\vec{a}) = \nabla f(\vec{z}) \cdot (\vec{b} - \vec{a})$ για κάποιο $\vec{z} \in (\vec{a}, \vec{b})$.

Λύση: Θεωρούμε τη συνάρτηση $\begin{cases} \varphi: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \\ \varphi(t) = f(\vec{a} + t(\vec{b} - \vec{a})) \end{cases}$ που είναι συνεχής

στο $[0, 1]$ και παραγωγίσιμη στο $(0, 1)$. Άρα συμπεραίνουμε από το ΘΜΤ

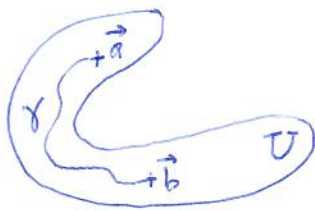
ότι $\exists c \in (0, 1)$ τ.ω. $\varphi(1) - \varphi(0) = \varphi'(c)$. Επειδή ισχύει

$$\varphi'(t) = \nabla f(\vec{a} + t(\vec{b} - \vec{a})) \cdot (\vec{b} - \vec{a}) \text{ έχουμε } \varphi(1) - \varphi(0) = f(\vec{b}) - f(\vec{a})$$

$$= \underbrace{\nabla f(\vec{a} + c(\vec{b} - \vec{a}))}_{\vec{z}} \cdot (\vec{b} - \vec{a})$$

Άσκ 6 : Έστω $f: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, κλάσεως C^1 στο U .
 ανοιχτό

Υποθέτουμε ότι το U είναι κατά τόξα συνεκτικό. Αυτό σημαίνει ότι για κάθε $\vec{a}, \vec{b} \in U$, υπάρχει μία καμπύλη $\gamma: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ κλάσεως C^1 τ.ω. $\gamma([0,1]) \subset U$ και $\gamma(0) = \vec{a}$, $\gamma(1) = \vec{b}$. Να δείχθει ότι αν $\nabla f(\vec{x}) = \vec{0}$, $\forall \vec{x} \in U$, τότε η f είναι σταθερή.



κατά τόξα συνεκτικό σύνολο

Λύση : Έστω $\vec{a}$ και $\vec{b}$ δύο διαφορετικά σημεία του U και έστω $\gamma: [0,1] \rightarrow U$ μία καμπύλη κλάσεως C^1 τ.ω. $\gamma(0) = \vec{a}$, $\gamma(1) = \vec{b}$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $\varphi(t) = f(\gamma(t))$, $\varphi: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$, που είναι κλάσεως C^1 στο $[0,1]$. Επειδή ισχύει $\varphi'(t) = \nabla f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = 0$, $\forall t \in [0,1]$, συμπεραίνουμε ότι η φ είναι σταθερή. Άρα $f(\vec{a}) = f(\vec{b})$ και η f είναι επίσης σταθερή στο U .

Άσκ 7 : Έστω $\varphi: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ μία συνάρτηση κλάσεως C^2 και έστω $f: \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\} \rightarrow \mathbb{R}$. Να δείχθει ότι
 $\vec{x} \mapsto f(\vec{x}) = \varphi(\|\vec{x}\|)$

$$(i) \nabla f(\vec{x}) = \varphi'(\|\vec{x}\|) \frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|} \quad (ii) \Delta f(\vec{x}) = \varphi''(\|\vec{x}\|) + \frac{n-1}{\|\vec{x}\|} \varphi'(\|\vec{x}\|)$$

$$(iii) \Delta(\ln(\|\vec{x}\|)) = 0 \text{ όταν } n=2, \Delta(\|\vec{x}\|^{2-n}) = 0 \text{ όταν } n \geq 3.$$

Λύση (i) Έχουμε $f(x_1, \dots, x_n) = \varphi(\sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2})$ και η f είναι κλάσεως C^2 στο $\mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}$. Υπολογίζουμε για κάθε $i = 1, \dots, n$:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{x}) = \frac{2x_i}{2\sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}} \varphi'(\sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}) = \frac{x_i}{\|\vec{x}\|} \varphi'(\|\vec{x}\|)$$

$$\text{Άρα } \nabla f(\vec{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{x}) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{x}) \end{pmatrix} = \varphi'(\|\vec{x}\|) \frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|}$$

(ii) Παράγωγουμε ακόμα μία φορά και βρίσκουμε

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(\vec{x}) = \frac{1}{\sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}} \varphi'(\sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}) - \frac{x_i^2}{(x_1^2 + \dots + x_n^2)^{3/2}} \varphi'(\sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}) + \frac{x_i^2}{(x_1^2 + \dots + x_n^2)} \varphi''(\sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2})$$

$$\begin{aligned} \text{Άρα } \Delta f(\vec{x}) &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(\vec{x}) = \varphi''(\|\vec{x}\|) + \frac{n}{\|\vec{x}\|} \varphi'(\|\vec{x}\|) - \frac{1}{\|\vec{x}\|} \varphi'(\|\vec{x}\|) \\ &= \varphi''(\|\vec{x}\|) + \frac{n-1}{\|\vec{x}\|} \varphi'(\|\vec{x}\|) \end{aligned}$$

(iii) Όταν $n=2$, αναζητούμε ότι η $\varphi(r) = \ln r$ ικανοποιεί

$$\forall r > 0: \varphi''(r) + \frac{\varphi'(r)}{r} = 0. \text{ Όταν } n \geq 3, \text{ αναζητούμε ότι η } \varphi(r) = r^{2-n}$$

$$\text{ικανοποιεί } \forall r > 0: \varphi''(r) + \frac{n-1}{r} \varphi'(r) = 0$$

Σχόλιο: Η αρμονική συνάρτηση $f(\vec{x}) = \frac{GMm}{\|\vec{x}\|}$, $f: \mathbb{R}^3 \setminus \{\vec{0}\} \rightarrow \mathbb{R}$

ονομάζεται δυναμικό του Newton, διότι η κλίση της $\nabla f(\vec{x}) = -\frac{GMm}{\|\vec{x}\|^3} \vec{x}$

ισούται με το βαρυτικό πεδίο μιας σημειακής μάζας M τοποθετημένης

στην αρχή των αξόνων $\vec{0}$ ($G = \text{πυκνότητα βαρυτική σταθερά}$).

Άσκ 8: Να δείξετε ότι

(i) $\varphi \in C^1(\mathbb{R}^2)$ και $\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(x_1, x_2) = 0, \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^2 \Leftrightarrow \varphi(x_1, x_2) = \alpha(x_2)$ με $\alpha \in C^1(\mathbb{R})$.

(ii) $\varphi \in C^2(\mathbb{R}^2)$ και $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial x_2}(x_1, x_2) = 0, \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^2 \Leftrightarrow \varphi(x_1, x_2) = A(x_2) + B(x_1)$ με $A, B \in C^2(\mathbb{R})$.

Λύση (i) $\Leftarrow$ Προφανώς αν $\varphi(x_1, x_2) = \alpha(x_2)$ με $\alpha \in C^1(\mathbb{R})$ ισχύει $\varphi \in C^1(\mathbb{R}^2)$ και $\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(x_1, x_2) = 0, \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^2$. $\Rightarrow$ Υποθέτουμε τώρα ότι $\varphi \in C^1(\mathbb{R}^2)$ και $\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(x_1, x_2) = 0, \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^2$. Για κάθε $x_2 \in \mathbb{R}$ φιξαρικό, η παράγωγος της συνάρτησης $x_1 \mapsto \varphi(x_1, x_2)$, $\uparrow \mathbb{R}$ είναι η συνάρτηση $x_1 \mapsto \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(x_1, x_2) = 0$. Από για κάθε $x_2 \in \mathbb{R}$ φιξαρικό, η συνάρτηση $x_1 \mapsto \varphi(x_1, x_2)$ είναι σταθερή και έχουμε $\varphi(x_1, x_2) = \alpha(x_2), \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^2$
σταθερά που εξαρτάται από το x_2

Επιπλέον, επειδή $\varphi \in C^1(\mathbb{R}^2)$ πρέπει επίσης να έχουμε $\alpha \in C^1(\mathbb{R})$

(ii) $\Leftarrow$ Αν $\varphi(x_1, x_2) = A(x_2) + B(x_1)$ με $A, B \in C^2(\mathbb{R})$ είναι φανερό ότι $\varphi \in C^2(\mathbb{R}^2)$

και $\frac{\partial \varphi}{\partial x_2}(x_1, x_2) = A'(x_2)$ $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial x_2}(x_1, x_2) = 0$. $\Rightarrow$ Υποθέτουμε τώρα ότι $\varphi \in C^2(\mathbb{R}^2)$

και $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial x_2}(x_1, x_2) = 0, \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^2$. Ισχύει $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial x_2}(x_1, x_2) = \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \right)(x_1, x_2) = 0, \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^2$

από το (i) συμπεραίνουμε ότι $\frac{\partial \varphi}{\partial x_2}(x_1, x_2) = \alpha(x_2)$ με $\alpha \in C^1(\mathbb{R})$. Για κάθε $x_1 \in \mathbb{R}$

φιξαρικό, θεωρούμε τώρα τη συνάρτηση $x_2 \mapsto \varphi(x_1, x_2)$. Γνωρίζουμε ότι

η παράγωγος της είναι η συνάρτηση $x_2 \mapsto \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}(x_1, x_2) = \alpha(x_2)$ και ολοκληρώνοντας

ως προς x_2 , βρίσκουμε ότι $\varphi(x_1, x_2) = A(x_2) + B(x_1)$ όπου η $A \in C^2(\mathbb{R})$ είναι μία

παράγουσα της α και $B(x_1)$ είναι μία σταθερά που εξαρτάται από το x_1 . Επιπλέον

επειδή $\varphi \in C^2(\mathbb{R}^2)$ πρέπει επίσης να έχουμε $B \in C^2(\mathbb{R})$.

Άσκ 9 Έστω $f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 - x_2 \end{pmatrix}$, έστω $h(y_1, y_2)$, $h: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ κλάσης C^2 και έστω $\varphi = h \circ f$, $\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$.

(i) Να δείξετε ότι $\varphi \in C^2(\mathbb{R}^2)$ και $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial x_2}(x_1, x_2) = \frac{\partial^2 h}{\partial y_1^2}(x_1 + x_2, x_1 - x_2) - \frac{\partial^2 h}{\partial y_2^2}(x_1 + x_2, x_1 - x_2)$

(ii) Να δείξετε ότι $\frac{\partial^2 h}{\partial y_1^2}(y_1, y_2) - \frac{\partial^2 h}{\partial y_2^2}(y_1, y_2) = 0$, $\forall \vec{y} \in \mathbb{R}^2$ αν $h(y_1, y_2) = A\left(\frac{y_1 - y_2}{2}\right) + B\left(\frac{y_1 + y_2}{2}\right)$ με $A, B \in C^2(\mathbb{R})$.

Λύση: Έχουμε $\varphi: \mathbb{R}^2 \xrightarrow{f} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{h} \mathbb{R}$ με $f \in C^2(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}^2)$ και $h \in C^2(\mathbb{R}^2)$
 $\vec{x} \mapsto f(\vec{x}) = \vec{y} \mapsto h(f(\vec{x}))$

άρα $\varphi \in C^2(\mathbb{R}^2)$. Επιδείξω ισχύει

$$D\varphi(x_1, x_2) = Dh(f(x_1, x_2)) \circ Df(x_1, x_2) \Leftrightarrow \left[\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(x_1, x_2), \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}(x_1, x_2) \right] = \left[\frac{\partial h}{\partial y_1}(f(\vec{x})), \frac{\partial h}{\partial y_2}(f(\vec{x})) \right] \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha) \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(x_1, x_2) = \frac{\partial h}{\partial y_1}(x_1 + x_2, x_1 - x_2) + \frac{\partial h}{\partial y_2}(x_1 + x_2, x_1 - x_2) \\ \beta) \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}(x_1, x_2) = \frac{\partial h}{\partial y_1}(x_1 + x_2, x_1 - x_2) - \frac{\partial h}{\partial y_2}(x_1 + x_2, x_1 - x_2) \end{cases}$$

Θέτουμε $\psi = \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}$ και $v = \left(\frac{\partial h}{\partial y_1} - \frac{\partial h}{\partial y_2} \right)$, η (β) γράφεται επίσης

$\psi(x_1, x_2) = v(x_1 + x_2, x_1 - x_2)$, άρα συνεπείας από τη (α) ότι

$$\frac{\partial \psi}{\partial x_1}(x_1, x_2) = \frac{\partial v}{\partial y_1}(x_1 + x_2, x_1 - x_2) + \frac{\partial v}{\partial y_2}(x_1 + x_2, x_1 - x_2) \text{ και έχουμε ισοδύναμα:}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \right)(x_1, x_2) = \frac{\partial}{\partial y_1} \left(\frac{\partial h}{\partial y_1} - \frac{\partial h}{\partial y_2} \right)(x_1 + x_2, x_1 - x_2) + \frac{\partial}{\partial y_2} \left(\frac{\partial h}{\partial y_1} - \frac{\partial h}{\partial y_2} \right)(x_1 + x_2, x_1 - x_2),$$

$$\text{Σημειώ} \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial x_2}(x_1, x_2) = \frac{\partial^2 h}{\partial y_1^2}(x_1 + x_2, x_1 - x_2) - \frac{\partial^2 h}{\partial y_1 \partial y_2}(x_1 + x_2, x_1 - x_2) + \frac{\partial^2 h}{\partial y_2 \partial y_1}(x_1 + x_2, x_1 - x_2) - \frac{\partial^2 h}{\partial y_2^2}(x_1 + x_2, x_1 - x_2)$$

Επειδή $h \in C^2(\mathbb{R}^2)$, ισχύει $\frac{\partial^2 h}{\partial y_1 \partial y_2} = \frac{\partial^2 h}{\partial y_2 \partial y_1}$, άρα συμπεραίνουμε ότι

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial x_2}(x_1, x_2) = \frac{\partial^2 h}{\partial y_1^2}(x_1+x_2, x_1-x_2) - \frac{\partial^2 h}{\partial y_2^2}(x_1+x_2, x_1-x_2)$$

(ii) Η $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ είναι 1-1 και επί άρα αντιστρέψιμη.
 $(x_1, x_2) \mapsto (y_1, y_2) = (x_1+x_2, x_1-x_2)$

Έχουμε $f^{-1}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$
 $(y_1, y_2) \mapsto (x_1, x_2) = \left(\frac{y_1+y_2}{2}, \frac{y_1-y_2}{2}\right)$. Επομένως, προκύπτει από το (i) ότι

$$\frac{\partial^2 h}{\partial y_1^2}(y_1, y_2) - \frac{\partial^2 h}{\partial y_2^2}(y_1, y_2) = 0, \forall \vec{y} \in \mathbb{R}^2 \Leftrightarrow \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial x_2}(x_1, x_2) = 0, \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^2$$

Άσκ 8

$$\Leftrightarrow \varphi(x_1, x_2) = A(x_2) + B(x_1) \text{ με } A, B \in C^2(\mathbb{R})$$

$$\Leftrightarrow \varphi\left(\frac{y_1+y_2}{2}, \frac{y_1-y_2}{2}\right) = A\left(\frac{y_1-y_2}{2}\right) + B\left(\frac{y_1+y_2}{2}\right) \text{ με } A, B \in C^2(\mathbb{R})$$

Άσκ 10 Έστω $f(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{x_1^3 x_2 - x_1 x_2^3}{x_1^2 + x_2^2} & \text{για } (x_1, x_2) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{για } (x_1, x_2) = (0, 0) \end{cases}$

(i) Να δείξετε ότι $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$ και $\frac{\partial f}{\partial x_1}(0, x_2) = -x_2, \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, 0) = x_1$

(ii) Να δείξετε ότι οι μερικές παράγωγοι δεύτερης τάξης της f υπάρχουν σε κάθε σημείο του $\mathbb{R}^2$ και στο $(0, 0)$ ισχύει $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(0, 0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(0, 0) = 0$

αλλιώς $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(0, 0) = +1 \neq \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(0, 0) = 0$

Λύση: (i) Η f είναι μία ρητή συνάρτηση, άρα είναι κλάσως C^∞ στο $\mathbb{R}^2 \setminus \{0,0\}$. Θα δείξουμε ότι $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$. Υπολογίζουμε πρώτα τις

$$(α) \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2) = \frac{3x_1^2 x_2 - x_2^3}{x_1^2 + x_2^2} - \frac{x_1^3 x_2 - x_1 x_2^3}{(x_1^2 + x_2^2)^2} 2x_1 & \text{για } (x_1, x_2) \neq (0,0) \\ \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2) = \frac{x_1^3 - 3x_1 x_2^2}{x_1^2 + x_2^2} - \frac{x_1^3 x_2 - x_1 x_2^3}{(x_1^2 + x_2^2)^2} 2x_2 & \text{--- " ---} \end{cases}$$

Έπειτα παρατηρούμε ότι $f(x_1, 0) = f(0, x_2) = 0 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, 0) = \frac{\partial f}{\partial x_2}(0, x_2) = 0$ (β)

Επειδή ισχύει $|x_1|, |x_2| \leq \|\vec{x}\|$ συμπεραίνουμε το φράγμα:

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2) \right| \leq M \|\vec{x}\|, \quad \left| \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2) \right| \leq M \|\vec{x}\| \quad \text{για } (x_1, x_2) \neq (0,0) \text{ και}$$

για μία σταθερά $M > 0$. Βλέπουμε λοιπόν ότι

$$\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{0}} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2) = 0 \quad \text{και} \quad \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{0}} \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2) = 0 \Rightarrow f \in C^1(\mathbb{R}^2)$$

Τέλος, γνωρίζεται από το (α) ότι $\frac{\partial f}{\partial x_1}(0, x_2) = -x_2$ και $\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, 0) = x_1$ (γ)

(ii) Θα δείξουμε ότι οι μερικές παράγωγοι δεύτερης τάξης υπάρχουν στο $(0,0)$

[Στο $\mathbb{R}^2 \setminus \{0,0\}$ υπάρχουν ώστε $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2 \setminus \{0,0\})$]. Από το (β) προκύπτει

$$\text{ότι } \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(0,0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(0,0) = 0 \quad \left[\text{δωτε } \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(0,0) = \lim_{x_1 \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, 0) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(0,0)}{x_1 - 0} = 0 \right]$$

Ομοίως από το (γ) προκύπτει ότι

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(0,0) = \lim_{x_1 \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, 0) - \frac{\partial f}{\partial x_2}(0,0)}{x_1 - 0} = 1, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(0,0) = \lim_{x_2 \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x_1}(0, x_2) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(0,0)}{x_2 - 0} = -1$$

Αυτό συμβαίνει επειδή η f ΔΕΝ είναι κλάσως C^2 σε μια γειτονιά του $\vec{0}$!

Ασκ 11 Έστω το διανυσματικό πεδίο $F(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} x_2 \\ -x_1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $F \in C^\infty(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3)$.
Δείξτε ότι το F δεν είναι πεδίο κλίσεων

Λύση: Αν το F ήταν πεδίο κλίσεων, τότε το F θα γράφονταν

$F(\vec{x}) = \nabla f(\vec{x})$ για κάποια συνάρτηση $f \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$ και θα είχαμε

$$\text{curl } F(\vec{x}) = 0. \text{ Όμως ισχύει } \text{curl } F(\vec{x}) = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ x_2 & -x_1 & 0 \end{vmatrix} = -2\vec{e}_3 \neq 0.$$

Ασκ 12: Να δείξετε ότι αν $F \in C^2(U; \mathbb{R}^3)$ με $U \subset \mathbb{R}^3$ ανοιχτό, τότε
ισχύει $\text{div}(\text{curl } F)(\vec{x}) = 0$.

Λύση: Έχουμε $\text{curl } F(\vec{x}) = \left(\frac{\partial F_3}{\partial x_2}(\vec{x}) - \frac{\partial F_2}{\partial x_3}(\vec{x}) \right) \vec{e}_1 + \left(\frac{\partial F_1}{\partial x_3}(\vec{x}) - \frac{\partial F_3}{\partial x_1}(\vec{x}) \right) \vec{e}_2 + \left(\frac{\partial F_2}{\partial x_1}(\vec{x}) - \frac{\partial F_1}{\partial x_2}(\vec{x}) \right) \vec{e}_3$

$$\text{Άρα } \text{div}(\text{curl } F)(\vec{x}) = \frac{\partial^2 F_3}{\partial x_1 \partial x_2}(\vec{x}) - \frac{\partial^2 F_2}{\partial x_1 \partial x_3}(\vec{x}) + \frac{\partial^2 F_1}{\partial x_2 \partial x_3}(\vec{x}) - \frac{\partial^2 F_3}{\partial x_2 \partial x_1}(\vec{x}) + \frac{\partial^2 F_2}{\partial x_3 \partial x_1}(\vec{x}) - \frac{\partial^2 F_1}{\partial x_3 \partial x_2}(\vec{x}) = 0$$

Ασκ 13: Αποδείξτε ότι το 2×2 σύστημα

$$(\Sigma) \begin{cases} x_1^2 x_2 = y_1 \\ x_1^3 - x_2^3 = y_2 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{μπορεί να λυθεί μοναδικά ως προς } (x_1, x_2) \\ \text{για } (y_1, y_2) \text{ κοντά στο } (4, 7) \text{ με τη λύση } (x_1, x_2) \end{array}$$

να βρισκεται κοντά στο $(2, 1)$.

Λύση: Έστω $f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_1^2 x_2 \\ x_1^3 - x_2^3 \end{pmatrix}$. Έχουμε $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}^2)$, $f(2, 1) = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix}$

$$Df(\vec{x}) = \begin{bmatrix} 2x_1 x_2 & x_1^2 \\ 3x_1^2 & -3x_2^2 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad Df(2, 1) = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 12 & -3 \end{bmatrix} \text{ αντιστρέφως εύκολα.}$$

Άρα, υπάρχουν ανοιχτά σύνολα $U_0, V_0 \subset \mathbb{R}^2$ με $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \in U_0$, $\begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix} \in V_0$ π.ω η
 $f: U_0 \rightarrow V_0$ να είναι μια αμφιδιαφορίσιμη κλίσεως C^∞ . Επιπλέον για τυχόν των
 (y_1, y_2) στο V_0 το σύστημα $(\Sigma) \Leftrightarrow f(\vec{x}) = \vec{y}$, έχει μια μοναδική λύση $\vec{x} = f^{-1}(\vec{y})$ στο U_0 .

Άσκ 14 Δείξτε ότι υπάρχει μια C^∞ συνάρτηση $\varphi(x)$ ορισμένη
σε ένα διάστημα $(1-\delta, 1+\delta)$ με $\delta > 0$ ώστε

$$(*) \quad x^{\varphi(x)} + (\varphi(x))^x = 2 \quad \forall x \in (1-\delta, 1+\delta).$$

Λύση: Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x, y) = x^y + y^x = e^{y \ln x} + e^{x \ln y}$.

Έχουμε $f \in C^\infty(10, \infty) \times (10, \infty)$ και $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = (\ln x) x^y + \frac{x}{y} y^x$

για $x > 0, y > 0$. Θεωρούμε επίσης το σύνολο σταθμής της f

για την τιμή $c = 2$. Προφανώς $f(1, 1) = 2$ και $\frac{\partial f}{\partial y}(1, 1) = 1 \neq 0$.

Άρα η ύπαρξη μιας συνάρτησης $\varphi: (1-\delta, 1+\delta) \xrightarrow{C^\infty} \mathbb{R}$ τ.ω.

$\varphi(1) = 1$ και $f(x, \varphi(x)) = f(1, 1) = 2$, $\forall x \in (1-\delta, 1+\delta)$,

προκύπτει από το θεώρημα πενταεχμένης συνάρτησης.