

Ασκ 1 : Να δείχθει ότι κάθε σημείο $\vec{a}$ του $\mathbb{R}^n$ είναι κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$.

Λύση : Θα δείξουμε ότι το συμπλήρωμα $\mathbb{R}^n \setminus \{\vec{a}\}$ είναι ανοιχτό.

Πράγματι, για κάθε $\vec{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{a}\}$ (δηλαδή $\vec{x} \neq \vec{a}$), η ανοιχτή μπάλα $B(\vec{x}, \|\vec{x} - \vec{a}\|)$ περιέχεται στο $\mathbb{R}^n \setminus \{\vec{a}\}$. Άρα το $\mathbb{R}^n \setminus \{\vec{a}\}$ είναι ανοιχτό.

Ασκ 2 : Έστω $A \subset \mathbb{R}^n$. Να δείχθει ότι

(i) Το $\overset{\circ}{A}$ είναι το μεγαλύτερο ανοιχτό σύνολο που περιέχεται στο A .

(ii) $A = \overset{\circ}{A} \Leftrightarrow A$ ανοιχτό

(iii) Το $\bar{A}$ είναι το μικρότερο κλειστό σύνολο που περιέχει το A

(iv) $A = \bar{A} \Leftrightarrow A$ κλειστό

Λύση (i) Είδαμε ότι το $\overset{\circ}{A}$ είναι ανοιχτό σύνολο που περιέχεται στο A .

Έστω ω ένα άλλο ανοιχτό σύνολο που να περιέχεται στο A . Θα δείξουμε ότι $\omega \subset \overset{\circ}{A}$. Πράγματι, έστω $\vec{x} \in \omega$. Επειδή το ω είναι ανοιχτό, υπάρχει $r > 0$ τ.ω $B(\vec{x}, r) \subset \omega \subset A$. Άρα $\vec{x} \in \overset{\circ}{A}$ και $\omega \subset \overset{\circ}{A}$.

(ii) Αν $A = \overset{\circ}{A}$, τότε το A είναι ανοιχτό επειδή το $\overset{\circ}{A}$ είναι ανοιχτό.

Αντίστροφα, αν το A είναι ανοιχτό, συμπεραίνουμε από το (i) ότι $\overset{\circ}{A} = A$.

(iii) Είδαμε ότι το $\bar{A}$ είναι κλειστό σύνολο που περιέχει το A .

Έστω F ένα άλλο κλειστό σύνολο που να περιέχει το A . Θα δείξουμε

ότι $\bar{A} \subset F$. Πράγματι το $\omega = \mathbb{R}^n \setminus F$ είναι ανοιχτό σύνολο που

περιέχεται στο $\mathbb{R}^n \setminus A$. Άρα, λόγω των (i) έχουμε $\omega = \mathbb{R}^n \setminus F \subset \underbrace{\text{ext}(A)}_{\mathbb{R}^n \setminus A}$.

Άρα $\mathbb{R}^n \setminus \text{ext}(A) = \bar{A} \subset F$.

(iv) Αν $A = \bar{A}$ τότε το A είναι κλειστό επειδή το $\bar{A}$ είναι κλειστό.

Αντίστροφα, αν το A είναι κλειστό, συμπεραίνουμε από το (iii) ότι $\bar{A} = A$.

Άσκ 3: Να δείχθει ότι οι ευθείες είναι κλειστά υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$.

Λύση: Μία ευθεία είναι το σύνολο $\Delta = \{ \vec{x} = \vec{a} + t\vec{v}, t \in \mathbb{R} \}$ για κάποια διανύσματα $\vec{a}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$, $\vec{v} \neq \vec{0}$ φεζαρισμένα. Για να δείξουμε ότι το Δ είναι κλειστό, θα χρησιμοποιήσουμε το κριτήριο με τις ακολουθίες.

Έστω $(\vec{x}_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \Delta$ τ.ω $\lim_{k \rightarrow \infty} \vec{x}_k = \vec{\ell} \in \mathbb{R}^n$. Θα δείξουμε ότι.

το όριο $\vec{\ell}$ ανήκει στην ευθεία Δ . Πράγματι, γράφουμε $\vec{x}_k = \vec{a} + t_k \vec{v}$

με $(t_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ και έχουμε ότι $\vec{x}_k \cdot \vec{v} = \vec{a} \cdot \vec{v} + t_k \|\vec{v}\|^2 \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \vec{\ell} \cdot \vec{v}$

Άρα $\lim_{k \rightarrow \infty} t_k = \frac{(\vec{\ell} - \vec{a}) \cdot \vec{v}}{\|\vec{v}\|^2} =: t_\infty \in \mathbb{R}$

και $\vec{\ell} = \lim_{k \rightarrow \infty} \vec{x}_k = \vec{a} + t_\infty \vec{v} \in \Delta$ που είναι το ζητούμενο.

Ασκ 4 : Να δείχθεί ότι

- (i) Η ένωση οποιουδήποτε πλήθους ανοιχτών συνόλων του $\mathbb{R}^n$ είναι ανοιχτό σύνολο του $\mathbb{R}^n$.
- (ii) Η τομή πεπερασμένου πλήθους ανοιχτών συνόλων του $\mathbb{R}^n$ είναι ανοιχτό σύνολο του $\mathbb{R}^n$.
- (iii) Η τομή οποιουδήποτε πλήθους κλειστών συνόλων του $\mathbb{R}^n$ είναι κλειστό σύνολο του $\mathbb{R}^n$.
- (iv) Η ένωση πεπερασμένου πλήθους κλειστών συνόλων του $\mathbb{R}^n$ είναι κλειστό σύνολο του $\mathbb{R}^n$.

Λύση (i) Έστω $\Omega = \bigcup_{i \in I} U_i$ όπου για κάθε $i \in I$ το U_i είναι ανοιχτό και έστω $\vec{x} \in \Omega$. Το $\vec{x}$ ανήκει σε κάποιο U_{i_0} ($i_0 \in I$) και αφού το U_{i_0} είναι ανοιχτό, υπάρχει $r > 0$ π.ω. $B(\vec{x}, r) \subset U_{i_0} \subset \Omega$. Άρα το Ω είναι ανοιχτό.

(ii) Έστω $\Omega = \bigcap_{i=1}^K U_i$ όπου για κάθε $i=1, 2, \dots, K$ το U_i είναι ανοιχτό και έστω $\vec{x} \in \Omega$. Για κάθε $i=1, 2, \dots, K$, το $\vec{x}$ ανήκει στο U_i και αφού το U_i είναι ανοιχτό, υπάρχει $r_i > 0$ π.ω. $B(\vec{x}, r_i) \subset U_i$. Άρα θέτοντας $r = \min_{i=1, \dots, K} r_i$ έχουμε $B(\vec{x}, r) \subset \bigcap_{i=1}^K U_i$ και συνεπώς το Ω είναι ανοιχτό.

Το (iii) προκύπτει από το (i) επειδή ένα κλειστό σύνολο είναι το συμπλήρωμα ενός ανοιχτού συνόλου και ισχύει $\mathbb{R}^n \setminus \left(\bigcup_{i \in I} U_i \right) = \bigcap_{i \in I} (\mathbb{R}^n \setminus U_i)$

Ομοίως το (iv) προκύπτει από το (ii) επειδή ισχύει $\mathbb{R}^n \setminus \left(\bigcap_{i=1}^K U_i \right) = \bigcup_{i=1}^K (\mathbb{R}^n \setminus U_i)$

Ασκ 5 Να δείξει ότι η ακολουθία $\vec{a}_k = \begin{pmatrix} a_{k1} \\ a_{k2} \\ \vdots \\ a_{kn} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$, $k=1,2,\dots$

τείνει στο $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ αν ισχύει $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{ki} = a_i$, $\forall i=1,2,\dots,n$.

Λύση: Από τις ανισότητες

$$|a_{ki} - a_i| \leq \|\vec{a}_k - \vec{a}\| \leq |a_{k1} - a_1| + \dots + |a_{kn} - a_n|$$

$\uparrow \qquad \qquad \qquad \uparrow$
 $\forall i=1,2,\dots,n \qquad \qquad \qquad (\text{βλ. Ασκ 2, κεφ 1})$

βλέπουμε ότι $\lim_{k \rightarrow \infty} \|\vec{a}_k - \vec{a}\| = 0$ αν ισχύει $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{ki} = a_i$ $\forall i=1,2,\dots,n$.

Ασκ 6: Εξετάστε ως προς την ύπαρξη ορίου στο $(0,0)$ τις συναρτήσεις

(i) $f_1(x_1, x_2) = \frac{x_1^4 - 2x_2^4}{x_1^2 + x_2^2}$

(ii) $f_2(x_1, x_2) = x_1 \ln \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$

(iii) $f_3(x_1, x_2) = \frac{x_1 x_2}{x_1 - x_2}$

(iv) $f_4(x_1, x_2) = \frac{1 - \cos(x_1 x_2)}{\sin(x_1^2 + x_2^2)}$

Λύση (i) Έστω $\vec{x} = (x_1, x_2)$. Παρατηρούμε ότι $|x_1|, |x_2| \leq \|\vec{x}\|$

Άρα $|f_1(x_1, x_2)| \leq \frac{x_1^4 + 2x_2^4}{x_1^2 + x_2^2} \leq 3 \frac{\|\vec{x}\|^4}{\|\vec{x}\|^2} = 3\|\vec{x}\|^2 \Rightarrow \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{0}} f_1(\vec{x}) = 0$

(ii) Ομοίως, έχουμε

$|f_2(x_1, x_2)| \leq \|\vec{x}\| |\ln \|\vec{x}\|| \xrightarrow{\|\vec{x}\| \rightarrow 0} 0$. Άρα $\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{0}} f_2(\vec{x}) = 0$

(iii) Θεωρούμε την ακολουθία $\vec{x}_k = \begin{pmatrix} 1/k + 1/k^4 \\ 1/k \end{pmatrix}$ για $k=1, 2, \dots$

Είναι φανερό ότι $\lim_{k \rightarrow \infty} \vec{x}_k = \vec{0}$ και επιπλέον έχουμε

$$f_3(\vec{x}_k) = \frac{k^{-2} + k^{-5}}{k^{-4}} = k^2 + \frac{1}{k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} +\infty, \text{ Άρα το όριο}$$

της f_3 καθώς το $(x_1, x_2) \rightarrow (0, 0)$, $x_1 \neq x_2$, ΔΕΝ ΥΠΑΡΧΕΙ

(iv) Παρατηρούμε πρώτα ότι $|x_1 x_2| \leq \frac{x_1^2 + x_2^2}{2} = \frac{\|\vec{x}\|^2}{2}$. Άρα
καθώς το $\|\vec{x}\| \rightarrow 0$, το γινόμενο $s = x_1 x_2$ τείνει επίσης στο 0.

Έπειτα, γράφουμε τα ανάπτυγματα του Taylor:

$$1 - \cos(s) = \frac{s^2}{2} (1 + \varepsilon(s)) \text{ με } \lim_{s \rightarrow 0} \varepsilon(s) = 0$$

$$\text{και } \sin(\|\vec{x}\|^2) = \|\vec{x}\|^2 (1 + \zeta(\|\vec{x}\|^2)) \text{ με } \lim_{t \rightarrow 0} \zeta(t) = 0.$$

Άρα έχουμε ότι $f_4(\vec{x}) = \frac{x_1^2 x_2^2}{2 \|\vec{x}\|^2} \left(\frac{1 + \varepsilon(x_1 x_2)}{1 + \zeta(\|\vec{x}\|^2)} \right)$, με τη συνάρτηση

$$\varphi(\vec{x}) = \frac{1 + \varepsilon(x_1 x_2)}{1 + \zeta(\|\vec{x}\|^2)}$$

είναι φραγμένη καθώς το $\|\vec{x}\| \rightarrow 0$.

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι $|f_4(\vec{x})| \leq \underset{\text{σταθερά}}{\uparrow} \frac{M}{2} \frac{x_1^2 x_2^2}{\|\vec{x}\|^2} \leq \frac{M}{2} \|\vec{x}\|^2$ (επειδή $|x_1|, |x_2| \leq \|\vec{x}\|$)

όπου το $\|\vec{x}\|$ είναι αρκετά μικρό και συνεπώς $\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{0}} f_4(\vec{x}) = 0$.

Ασκ 7 : Έστω $F \subset \mathbb{R}^n$, $F \neq \emptyset$. Να δείχθει ότι

- (i) Η συνάρτηση $\mathbb{R}^n \ni \vec{x} \mapsto d(\vec{x}, F)$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}^n$.
- (ii) Αν το F είναι κλειστό ισχύει $d(\vec{x}, F) = 0$ αν $\vec{x} \in F$ και για κάθε $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ υπάρχει $\vec{y} \in F$ τ.ω. $d(\vec{x}, F) = d(\vec{x}, \vec{y})$.

Πύση (i) Είδαμε στην Ασκ 7 του Κεφ 1 ότι για κάθε $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ ισχύει $|d(\vec{x}, F) - d(\vec{y}, F)| \leq d(\vec{x}, \vec{y})$. Άρα η συνάρτηση $d(\cdot, F)$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}^n$.

(ii) Είναι προφανές ότι αν $\vec{x} \in F$ ισχύει $d(\vec{x}, F) = 0$. Αντίστροφα ως υποθέτουμε ότι το F είναι κλειστό και ισχύει $d(\vec{x}, F) = \inf_{\vec{y} \in F} d(\vec{x}, \vec{y}) = 0$.

Άρα υπάρχει μία ακολουθία $(\vec{y}_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset F$ τ.ω. $\lim_{k \rightarrow \infty} d(\vec{x}, \vec{y}_k) = 0$,

δηλαδή $\lim_{k \rightarrow \infty} \vec{y}_k = \vec{x}$. Επειδή το F είναι κλειστό, συμπεραίνουμε ότι το όριο $\vec{x}$ ανήκει στο F .

Παρατήρηση : Αν θεωρήσουμε το σύνολο $E = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\}$ που δεν είναι κλειστό και το σημείο $\vec{x} = \vec{0}$, έχουμε $d(\vec{x}, E) = 0$ αλλά το $\vec{0}$ δεν ανήκει στο E .

Έστω τώρα ένα σημείο $\vec{x} \notin F$ και έστω ένα σημείο $\vec{y}_0 \in F$.

Ορίσουμε το σύνολο $K = F \cap \overline{B}(\vec{x}, \|\vec{x} - \vec{y}_0\|)$ που είναι κλειστό (τομή δύο κλειστών συνόλων) και φραγμένο (δηλαδή το K είναι

συμπαγές). Είναι προφανές ότι $d(\vec{x}, F) = \inf_{\vec{y} \in K} d(\vec{x}, \vec{y})$. Επειδή

η $d(\cdot, F)$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}^n$, συμπεραίνουμε ότι υπάρχει $\vec{y} \in K$ τ.ω. $d(\vec{x}, F) = d(\vec{x}, \vec{y})$.

Άσκ 8 : Έστω $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ μία συνεχής συνάρτηση στο $\mathbb{R}^n$.

Να δείχθεί ότι για κάθε $c \in \mathbb{R}$ τα σύνολα στάθμης $E_c = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : f(\vec{x}) = c\}$ είναι κλειστά υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$.

Λύση : Έστω $(\vec{x}_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset E_c$ τ.ω. $\lim_{k \rightarrow \infty} \vec{x}_k = \vec{l} \in \mathbb{R}^n$.

Θα δείξουμε ότι το όριο $\vec{l}$ ανήκει στο E_c και έτσι θα συμπεράνουμε ότι το E_c είναι κλειστό. Πράγματι, έχουμε $f(\vec{x}_k) = c$, $\forall k \in \mathbb{N}$

και επειδή η f είναι συνεχής ισχύει $\lim_{k \rightarrow \infty} f(\vec{x}_k) = f(\vec{l})$. Άρα $f(\vec{l}) = c$ και $\vec{l} \in E_c$.

Παρατήρηση : Ειδικότερα, αν η f είναι γραμμική ($f(\vec{x}) = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n$) τότε η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}^n$ και τα σύνολα στάθμης (τα υπερεπίπεδα) είναι κλειστά στο $\mathbb{R}^n$.

Άσκ 9 : Να δείχθεί ότι το σύνολο $\underbrace{\{(e^{it} \cos t, e^{it} \sin t) : t \in \mathbb{R}\}}_E$ δεν είναι κλειστό στο $\mathbb{R}^2$.

Λύση : Θεωρούμε την ακολουθία $\vec{x}_k = (e^{-k} \cos(-k), e^{-k} \sin(-k))$, $k \in \mathbb{N}$ που περιέχεται στο σύνολο E και τείνει στο $\vec{0}$ διότι $\|\vec{x}_k\| = e^{-k} \rightarrow 0$ $k \rightarrow \infty$.

Επειδή το όριο της $\vec{0}$, δεν ανήκει στο E , το σύνολο E

δεν είναι κλειστό.

Άσκ 10 Έστω η συνάρτηση $f(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{x_1^2 x_2^3}{x_1^4 + x_2^6} & \text{για } (x_1, x_2) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{για } (x_1, x_2) = (0, 0) \end{cases}$

- (i) Να δείχθεί ότι ο περιορισμός της f σε κάθε ευθεία $\Delta_\theta = \{(\cos\theta)t, (\sin\theta)t : t \in \mathbb{R}\}$ που διέρχεται από την αρχή των αξόνων, είναι μία συνάρτηση $f_\theta: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ κλάσης C^1 .
- (ii) Να δείχθεί ότι η f δεν είναι συνεχής στο $(0, 0)$.

Λύση: (i) Ο περιορισμός της f στην ευθεία Δ_θ (με $\theta \in [0, \pi)$ φιξζομένο)

είναι η συνάρτηση
$$f_\theta(t) = \begin{cases} \frac{\cos^2\theta \sin^3\theta t^5}{(\cos^4\theta)t^4 + (\sin^6\theta)t^6} = \frac{\cos^2\theta \sin^3\theta t}{\cos^4\theta + (\sin^6\theta)t^2} & \text{αν } \theta \neq \frac{\pi}{2} \\ f_\theta(t) = 0 & \text{αν } \theta = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

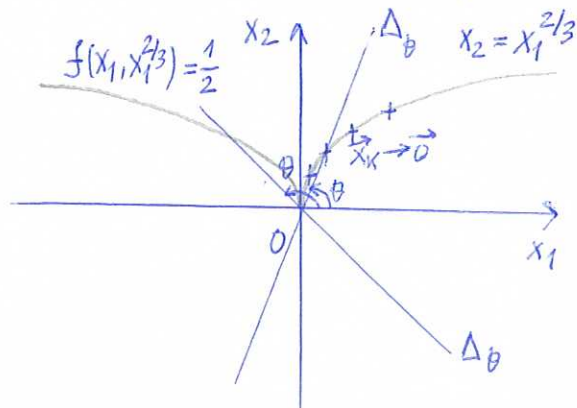
διότι εξ' ορισμού έχουμε $f_\theta(t) = f(\cos\theta t, \sin\theta t)$ αν $t \neq 0$ και $f_\theta(0) = f(\cos\theta \cdot 0, \sin\theta \cdot 0) = 0$.
Προφανώς ισχύει $f_\theta \in C^1(\mathbb{R})$, $\forall \theta \in [0, \pi)$.

(ii) Θεωρούμε την ακολουθία $\vec{x}_k = \left(\frac{1}{k}, \frac{1}{k^{2/3}} \right)$, $k = 1, 2, \dots$

και υπολογίζουμε $f(\vec{x}_k) = \frac{\frac{1}{k^2} \cdot \frac{1}{k^2}}{\frac{1}{k^4} + \frac{1}{k^4}} = \frac{1}{2}$. Επειδή η ακολουθία

$\vec{x}_k$ τείνει στο $\vec{0}$ και έχουμε $\lim_{k \rightarrow \infty} f(\vec{x}_k) = \frac{1}{2} \neq f(\vec{0})$, συμπεραίνουμε

ότι η f δεν είναι συνεχής στο $\vec{0}$.



Άσκ 11 Έστω $F \subset \mathbb{R}^n$, $F \neq \emptyset$, $K \subset \mathbb{R}^n$, $K \neq \emptyset$. Υποθέτουμε ότι το F είναι κλειστό και το K είναι συμπαγές. Να δείχθει ότι $\exists \vec{x} \in F$ και $\vec{y} \in K$ τ.ω $d(F, K) = d(\vec{x}, \vec{y})$.

Λύση Εξ' ορισμού $d(F, K) = \inf \{ d(\vec{x}, \vec{y}) : \vec{x} \in F, \vec{y} \in K \}$.

Έστω $(\vec{x}_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset F$ και $(\vec{y}_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset K$ ακολουθίες τ.ω

$$\lim_{k \rightarrow \infty} d(\vec{x}_k, \vec{y}_k) = d(F, K). \text{ Παρατηρούμε ότι η } (\vec{y}_k)_{k \in \mathbb{N}}$$

είναι φραγμένη διότι το K είναι φραγμένο. Άρα η

$(\vec{x}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ είναι επίσης φραγμένη συνεπώς ισχύει

$$\|\vec{x}_k\| \leq \underbrace{\|\vec{x}_k - \vec{y}_k\|}_{\text{φραγμένη}} + \underbrace{\|\vec{y}_k\|}_{\text{φραγμένη}} \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

Από την $(\vec{x}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ έχουμε μια συχνά συνυφισμένη υποακολουθία $(\vec{x}_{k_m})_{m \in \mathbb{N}}$

(βλ. θεώρημα BW) και $\vec{x} = \lim_{m \rightarrow \infty} \vec{x}_{k_m} \in F$ επειδή το F είναι

κλειστό. Ομοίως από την $(\vec{y}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ έχουμε μια ^{συχνά συνυφισμένη} υποακολουθία

$(\vec{y}_{k_{m_l}})_{l \in \mathbb{N}}$ τ.ω $\lim_{l \rightarrow \infty} \vec{y}_{k_{m_l}} = \vec{y} \in K$ (επειδή το K είναι συμπαγές)
επειδή η $\|\cdot\|$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}^n$

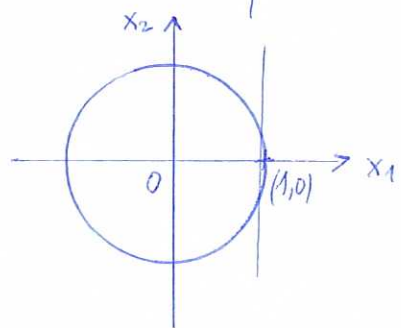
Προφανώς ισχύει $d(\vec{x}, \vec{y}) = \|\vec{x} - \vec{y}\| = \lim_{l \rightarrow \infty} \|\vec{x}_{k_{m_l}} - \vec{y}_{k_{m_l}}\| = d(F, K)$

Α6Κ 12 Να εξεταστεί αν υπάρχει το όριο $\lim_{\vec{x} \rightarrow (1,0)} \frac{x_1^4 + x_2^4 - 1}{x_1^2 + x_2^2 - 1}$

Λύση: Η συνάρτηση $f(x_1, x_2) = \frac{x_1^4 + x_2^4 - 1}{x_1^2 + x_2^2 - 1}$ ορίζεται (και είναι συνεχής)

ανοιχτό σύνολο

στο $U = \{ \vec{x} \in \mathbb{R}^2 : \|\vec{x}\| \neq 1 \}$. Ο περιορισμός της f στην ευθεία $x_2 = 0$



είναι η συνάρτηση $\varphi_1(x_1) = \frac{x_1^4 + 0 - 1}{x_1^2 + 0 - 1}$ που ορίζεται

για $x_1 \neq \pm 1$. Προφανώς έχουμε ότι $\varphi_1(x_1) = x_1^2 + 1$

άρα ισχύει $\lim_{x_1 \rightarrow 1} \varphi_1(x_1) = \lim_{x_1 \rightarrow 1} f(x_1, 0) = 2$.

Όμοια, ο περιορισμός της f στην ευθεία $x_1 = 1$ είναι η συνάρτηση

$\varphi_2(x_2) = f(1, x_2) = \frac{1 + x_2^4 - 1}{1 + x_2^2 - 1}$ που ορίζεται για $x_2 \neq 0$. Προφανώς

έχουμε ότι $\lim_{x_2 \rightarrow 0} \varphi_2(x_2) = \lim_{x_2 \rightarrow 0} f(1, x_2) = 0$. Συμπεραίνουμε λοιπόν

ότι το $\lim_{\vec{x} \rightarrow (1,0)} f(\vec{x})$ δεν υπάρχει, αφού έχουμε $\lim_{x_1 \rightarrow 1} f(x_1, 0) \neq \lim_{x_2 \rightarrow 0} f(1, x_2)$

Α6Κ 13 Να εξεταστεί για ποιες τιμές του $\alpha > 0$ μπορεί η

$f(x_1, x_2) = \frac{|x_1 x_2|^\alpha}{x_1^2 + x_2^2}$ να επεκταθεί σε μία συνεχή συνάρτηση ορισμένη στο $\mathbb{R}^2$.

Λύση: Η f είναι συνεχής στο ανοιχτό σύνολο $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{\vec{0}\}$. Όταν

$\alpha > 1$, έχουμε $|f(x_1, x_2)| = \frac{|x_1|^\alpha |x_2|^\alpha}{\|\vec{x}\|^2} \leq \frac{\|\vec{x}\|^{2\alpha}}{\|\vec{x}\|^2} = \|\vec{x}\|^{2(\alpha-1)} \xrightarrow{\|\vec{x}\| \rightarrow 0} 0$

$|x_1|, |x_2| \leq \|\vec{x}\|$

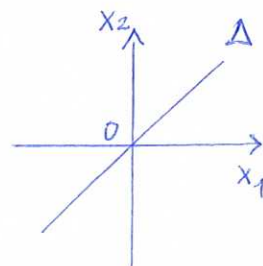
Άρα, θέτοντας $f(\vec{0}) = 0$, η f επεκτείνεται σε μία συνεχή συνάρτηση ορισμένη στο $\mathbb{R}^2$. Όταν $\alpha \leq 1$, παρατηρούμε ότι η f μηδενίζεται

πάνω στους άξονες των x_1 και x_2 . Άρα έχουμε $\lim_{x_1 \rightarrow 0} f(x_1, 0) = 0$.

Επειτα, θεωρούμε τον περιορισμό της f στην ευθεία $\Delta = \{ \vec{x} \in \mathbb{R}^2 : x_1 = x_2 \}$

$$\text{Για } x_1 = x_2, \text{ έχουμε } f(x_1, x_1) = \frac{|x_1|^{2\alpha}}{2|x_1|^2} = \frac{1}{2} |x_1|^{2(\alpha-1)} \quad \text{και}$$

$$\text{βλέπουμε ότι } \lim_{x_1 \rightarrow 0} f(x_1, x_1) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{αν } \alpha = 1 \\ +\infty & \text{αν } \alpha \in (0, 1) \end{cases}$$



Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι το όριο $\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{0}} f(x_1, x_2)$ δεν υπάρχει όταν

$\alpha \in (0, 1]$, επειδή έχουμε $\lim_{x_1 \rightarrow 0} f(x_1, 0) \neq \lim_{x_1 \rightarrow 0} f(x_1, x_1)$. Στην περίπτωση

αυτή, η f δεν επεκτείνεται σε μία συνεχή συνάρτηση ορισμένη στο $\mathbb{R}^2$.

Ασκ 14: Έστω $f(x_1, x_2) = \frac{x_1^2 x_2^2}{x_1^2 x_2^2 + (x_1 - x_2)^2}$. Να εξεταστεί αν υπάρχει το όριο $\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{0}} f(\vec{x})$.

Λύση: Η f είναι συνεχής στο ανοιχτό σύνολο $U = \mathbb{R}^2 - \{\vec{0}\}$ και παρατηρούμε ότι μηδενίζεται πάνω στους άξονες των x_1 και x_2 . Άρα έχουμε $\lim_{x_1 \rightarrow 0} f(x_1, 0) = 0$

Όμως, πάνω στην ευθεία $\Delta = \{ \vec{x} \in \mathbb{R}^2 : x_1 = x_2 \}$ βλέπουμε ότι $f(x_1, x_1) = 1$

Συμπεραίνουμε λοιπόν (όπως και στην Ασκ 13) ότι το όριο $\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{0}} f(\vec{x})$ δεν

υπάρχει, επειδή έχουμε $\lim_{x_1 \rightarrow 0} f(x_1, 0) \neq \lim_{x_1 \rightarrow 0} f(x_1, x_1)$.