ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ ΙΙΙ
Απαντήσεις στα θέματα των εξετάσεων της 27/1/2023

Θέμα 1ον Ποιός είναι ο συντελεστής του yz στο πολυώνυμο $P(x,y,z)$, δευτέρου βαθμού (ως προς x, y και z), όταν το όριο

$$\lim_{(x,y,z)\to(2,3,1)} \frac{(xy-yz-2)^y - P(x,y,z)}{(x-2)^2+(y-3)^2+(z-1)^2} = 0\,; \tag{1}$$

Απάντηση Έπεται από την (1) ότι το πολυώνυμο $P(x,y,z)$ είναι το πολυώνυμο Taylor, δευτέρου βαθμού, της συνάρτησης $f(x,y,z) := (xy-yz-2)^y$, στο σημείο $(2,3,1)$. Ας παρατηρήσουμε επίσης ότι η συνάρτηση $f(x,y,z)$ είναι C^∞ σε ανοικτή περιοχη του σημείου $(2,3,1)$, αφού

$$(xy-yz-2)\big|_{(x,y,z)=(2,3,1)} = 1 > 0 \text{ και } (xy-yz-2)^y = e^{y\log(xy-yz-2)}.$$

Συνεπώς, ο ζητούμενος συντελεστής προέρχεται από τον όρο

$$\frac{1}{2}[\,\cdots + 2\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(3,2,1)(y-3)(z-1)+\cdots\,],$$

του πολυώνύμου Taylor, δηλαδή είναι η παράγωγος $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(3,2,1)$.

Τώρα υπολογίζουμε $\dfrac{\partial f}{\partial z} = -y^2(xy-yz-2)^{y-1}$ και

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right) = -2y(xy-yz-2)^{y-1} - y^2(y-1)(x-z)(xy-yz-2)^{y-2} - y^2(xy-yz-2)^{y-1}\log(xy-yz-2)\,.$$

Άρα $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(2,3,1) = -24$.

Θέμα 2ον Μια συνάρτηση μπορεί να έχει κατευθυνόμενες παραγώγους σε κάθε κατεύθυνση – σε κάποιο σημείο – και εν τούτοις να μην είναι συνεχής στο σημείο αυτό. Δείξτε το με παράδειγμα την συνάρτηση

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y^3}{x^4+y^6} & \gamma\iota\alpha \ \ (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \gamma\iota\alpha \ \ (x,y)=(0,0)\,. \end{cases}$$

Απάντηση Έστω $\vec{u} = \alpha\vec{i} + \beta\vec{j}$ μοναδιαίο διάνυσμα, δηλαδή $|\vec{u}| = \sqrt{\alpha^2+\beta^2} = 1$. Η κατευθυνόμενη παράγωγος $\partial_{\vec{u}} f(0,0)$ είναι το όριο

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(\alpha t,\beta t)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0}\left[\frac{1}{t}\frac{(\alpha t)^2(\beta t)^3}{(\alpha t)^4+(\beta t)^6}\right] = \lim_{t\to 0}\frac{\alpha^2\beta^3}{\alpha^4+\beta^6 t^2} = \begin{cases} \dfrac{\beta^3}{\alpha^2} & \alpha\nu \ \ \alpha\neq 0 \\ 0 & \alpha\nu \ \ \alpha = 0. \end{cases}$$

Από την άλλη μεριά, η συνάρτηση f δεν είναι συνεχής στο σημείο $(0,0)$, αφού, π.χ.,

$$f(t^3,t^2) = \frac{(t^3)^2(t^2)^3}{(t^3)^4+(t^2)^6} \to \frac{1}{2}, \text{ καθώς } t\to 0\,.$$

Θέμα 3ον Υπολογίστε τον όγκο του στερεού $K=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ x^2+y^2\le\alpha^2\ \ \kappa\alpha\iota\ \ x^2+z^2\le\alpha^2\}$ ($\alpha>0$).

Απάντηση Ο ζητούμενος όγκος δίδεται από το ολοκλήρωμα

$$\iiint_K dxdydz=\int_{x=-\alpha}^{\alpha}\left[\int_{y=-\sqrt{\alpha^2-x^2}}^{\sqrt{\alpha^2-x^2}}\left(\int_{z=-\sqrt{\alpha^2-x^2}}^{\sqrt{\alpha^2-x^2}}dz\right)dy\right]dx .$$

Υπολογίζουμε:

$$\int_{z=-\sqrt{\alpha^2-x^2}}^{\sqrt{\alpha^2-x^2}}dz=2\sqrt{\alpha^2-x^2}\ ,$$

$$\int_{y=-\sqrt{\alpha^2-x^2}}^{\sqrt{\alpha^2-x^2}}\left(\int_{z=-\sqrt{\alpha^2-x^2}}^{\sqrt{\alpha^2-x^2}}dz\right)dy=4(\alpha^2-x^2)\ ,$$

$$\int_{x=-\alpha}^{\alpha}\left[\int_{y=-\sqrt{\alpha^2-x^2}}^{\sqrt{\alpha^2-x^2}}\left(\int_{z=-\sqrt{\alpha^2-x^2}}^{\sqrt{\alpha^2-x^2}}dz\right)dy\right]dx=\int_{x=-\alpha}^{\alpha}4(\alpha^2-x^2)dx=\frac{16}{3}\alpha^3 .$$

Θέμα 4ον Θεωρήστε το στερεό $K=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ y\ge 0,\ z\ge 0,\ x^2+y^2\le 2x\ \ \kappa\alpha\iota\ \ x^2+y^2+z^2\le 4\}$ και υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\iiint_K zdxdydz$.

Απάντηση Περιγράφοντας το στερεό K ως εξής:

$$K=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ (x-1)^2+y^2\le 1,\ y\ge 0\ \ \kappa\alpha\iota\ \ 0\le z\le\sqrt{4-x^2-y^2}\}\ ,$$

βλέπουμε ότι αυτό έχει βάση στο $xy-\varepsilon\pi\acute{\iota}\pi\varepsilon\delta o$, το ημικύκλιο $(x-1)^2+y^2\le 1,\ y\ge 0$, και φράσσεται από πάνω από το ημισφαίριο $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$.
Έτσι, σκεπτόμενοι την γεωμετρία του στερεου K, βρίσκουμε:

$$\mathrm{I}:=\iiint_K zdxdydz=\iint_{\substack{x^2+y^2\le 2x\\ y\ge 0}}\left(\int_{z=0}^{z=\sqrt{4-x^2-y^2}}zdz\right)dxdy=\iint_{\substack{x^2+y^2\le 2x\\ y\ge 0}}\left[\frac{1}{2}(4-x^2-y^2)\right]dxdy .$$

Θέτοντας $x=1+r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$, $0\le\theta\le\pi$, $0\le r\le 1$, υπολογίζουμε

$$\mathrm{I}=\frac{1}{2}\int_{\theta=0}^{\pi}\left\{\int_{r=0}^{1}[(4-(1+r\cos\theta)^2-(r\sin\theta)^2)]rdr\right\}d\theta=\frac{1}{2}\int_{\theta=0}^{\pi}\left\{\int_{r=0}^{1}(3-r^2-2r\cos\theta)rdr\right\}d\theta$$

$$=\frac{1}{2}\int_{\theta=0}^{\pi}\left\{\int_{r=0}^{1}(3-r^2)rdr\right\}d\theta=\frac{1}{2}\int_{\theta=0}^{\pi}\left\{\int_{r=0}^{1}\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{4}\right)\right\}d\theta=\frac{5\pi}{8} .$$

(Για την προτελευταία ισότητα, χρησιμοποιήσαμε ότι $\int_{\theta=0}^{\pi}\left\{\int_{r=0}^{1}(-2r\cos\theta)rdr\right\}d\theta=0$.)

Θέμα 5ον Στο $xy-\varepsilon\pi\acute{\iota}\pi\varepsilon\delta o$, θεωρήστε την καμπύλη κ, με παραμετρικές εξισώσεις $x = t - \sin t$, $y = 1-\cos t$, $0 \le t \le 2\pi$, καθώς και το σύνολο K το οποίο φράσσεται από πάνω από την καμπύλη κ και από κάτω από τον $x-\acute{\alpha}\xi o\nu\alpha$. Αποδείξτε ότι, για $\alpha \ge 0$ και $\beta \ge 0$,

$$\iint_{\mathrm{K}} x^\alpha y^\beta dxdy = \tfrac{1}{\beta+1}\int_{t=0}^{2\pi}(t-\sin t)^\alpha (1-\cos t)^{\beta+2}dt .$$

Απάντηση Από το θεώρημα του Green,

$$\iint_{\mathrm{K}} x^\alpha y^\beta dxdy = -\tfrac{1}{\beta+1}\int_{\partial\mathrm{K}} x^\alpha y^{\beta+1}dx .$$

Το σύνορο $\partial\mathrm{K}$ (του K) αποτελείται από την καμπύλη κ και το ευθύγραμμο τμήμα $[0,2\pi]$ (του $x-\acute{\alpha}\xi o\nu\alpha$, θεωρουμένου βέβαια ως καμπύλη στο $xy-\varepsilon\pi\acute{\iota}\pi\varepsilon\delta o$). Όσον αφορά τον προσανατολισμό του $\partial\mathrm{K}$ για την ανωτέρω ολοκλήρωση $\int_{\partial\mathrm{K}}$, έχουμε $\partial\mathrm{K} = -\kappa + [0,2\pi]$, δηλαδή

$$\int_{\partial\mathrm{K}} x^\alpha y^{\beta+1}dx = -\int_{\kappa} x^\alpha y^{\beta+1}dx + \int_{[0,2\pi]} x^\alpha y^{\beta+1}dx .$$

Τώρα, πάνω στην καμπύλη $[0,2\pi]$, $y=0$, όθεν

$$\int_{[0,2\pi]} x^\alpha y^{\beta+1}dx = 0 .$$

Από την άλλη μεριά

$$\int_{\kappa} x^\alpha y^{\beta+1}dx = \int_{t=0}^{2\pi}(t-\sin t)^\alpha (1-\cos t)^{\beta+1}(1-\cos t)dt ,$$

και η αποδεικτέα σχέση έπεται.

Θέμα 6ον Θεωρήστε το σύνολο $\Omega = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 1 < (x-1)^2 + (y-2)^4 < 3\}$ και δώστε παράδειγμα δυο συναρτήσεων $P = P(x,y)$ και $Q = Q(x,y)$, C^∞ στο Ω, έτσι ώστε $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{\partial P}{\partial y}$ και, για κάθε C^∞ συνάρτηση $f = f(x,y)$ στο Ω, το διαφορικό $df \ne Pdx + Qdy$.

Απάντηση Ας θέσουμε

$$P = \frac{-(y-2)}{(x-1)^2+(y-2)^2} \quad \text{και} \quad Q = \frac{x-1}{(x-1)^2+(y-2)^2} .$$

Είναι άμεσο ότι $P, Q \in C^\infty(\Omega)$ (αφού το σημείο $(1,2)\notin\Omega$) και $Q_x = P_y$. Επίσης, για κάθε απλή και κλειστή καμπύλη γ, στο $xy-\varepsilon\pi\acute{\iota}\pi\varepsilon\delta o$, της οποίας το εσωτερικό περιέχει το σημείο $(1,2)$,

$$\int_\gamma (Pdx + Qdy) = 2\pi .$$

Από την γεωμετρία του συνόλου Ω, είναι εύκολο να δούμε ότι το σύνολο αυτό περιέχει τέτοιες καμπύλες γ, π.χ., το «κυκλοειδές» $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : (x-1)^2 + (y-2)^4 = 2\}$. Οπότε δεν είναι δυνατόν το διαφορικό $Pdx + Qdy$ να είναι ακριβές στο Ω, αφού

$$\int_\gamma df = 0,\ \forall f \in C^\infty(\Omega) .$$

Θέμα 7^{ον} Στον $xyz-\chi\acute{\omega}\rho o$, θεωρήστε το σημείο $\mathrm{M}=(0,0,3)$ καθώς και, επί του $xy-$επιπέδου, τον κύκλο K με εξίσωση $x^2+y^2=2x$. Εν συνεχεία θεωρήστε την επιφάνεια E που σχηματίζεται από τα ευθύγραμμα τμήματα που συνδέουν το σημείο M με τα σημεία N του κύκλου K, δηλαδή $\mathrm{E}=\bigcup_{\mathrm{N}\in\mathrm{K}}[\mathrm{M},\mathrm{N}]$. Αποδείξτε ότι το εμβαδόν της επιφάνειας E δίδεται από ένα ολοκλήρωμα της μορφής $\int_0^{\pi}\sqrt{\mathrm{A}+B\cos^4 u}\,du$, όπου A και B είναι θετικοί ακέραιοι, και υπολογίστε τους αριθμούς αυτούς. ($[\mathrm{M},\mathrm{N}]$ είναι το ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει τα σημεία M και N. Η επιφάνεια E είναι μια «κωνική» επιφάνεια αλλά κάπως πλαγιαστή.)

Απάντηση Τα σημεία του κύκλου K είναι τα ακόλουθα: $(1+\cos t,\sin t,0)$, $0\le t\le 2\pi$. Επομένως, συνδέοντας το σημείο $\mathrm{M}=(0,0,3)$ με τα σημεία $(1+\cos t,\sin t,0)$ παίρνουμε τα σημεία

$$(x,y,z)=(1-s)(0,0,3)+s(1+\cos t,\sin t,0),\ 0\le s\le 1,\ 0\le t\le 2\pi\ .$$

Δηλαδή μια επιλογή παραμετρικών εξισώσεων για την επιφάνεια E είναι η εξής:

$$\mathrm{E}:\ \begin{array}{l} x=s(1+\cos t)\\ y=s\sin t \\ z=3(1-s)\end{array}\qquad 0\le s\le 1,\ 0\le t\le 2\pi\ .$$

Το εμβαδόν της E είναι

$$\mathcal{E}\mu\beta(\mathrm{E})=\int_{s=0}^{1}\int_{t=0}^{2\pi}\sqrt{\left[\det\frac{\partial(x,y)}{\partial(s,t)}\right]^2+\left[\det\frac{\partial(y,z)}{\partial(s,t)}\right]^2+\left[\det\frac{\partial(x,z)}{\partial(s,t)}\right]^2}\,dsdt\ .$$

Υπολογίζουμε

$$\det\frac{\partial(x,y)}{\partial(s,t)}=s(1+\cos t),\quad \det\frac{\partial(y,z)}{\partial(s,t)}=3s\cos t,\quad \det\frac{\partial(x,z)}{\partial(s,t)}=-3s\sin t\ .$$

Άρα

$$\mathcal{E}\mu\beta(\mathrm{E})=\int_{s=0}^{1}\int_{t=0}^{2\pi}\sqrt{[s(1+\cos t)]^2+[3s\cos t]^2+[-3s\sin t]^2}\,dsdt$$

$$=\int_{s=0}^{1}\int_{t=0}^{2\pi}s\sqrt{(1+\cos t)^2+9\cos^2 t+9\sin^2 t}\,dtds$$

$$=\frac{1}{2}\int_{t=0}^{2\pi}\sqrt{[2\cos^2(t/2)]^2+9}\,dt=\int_{u=0}^{\pi}\sqrt{(2\cos^2 u)^2+9}\,du=\int_{u=0}^{\pi}\sqrt{4\cos^4 u+9}\,du\ .$$