Ανάλυση - Πιθανότητες Διάλεξη 4η 23/12/2020

Τυχαία Μεταβλητή - Μετρήσιμη Συνάρτηση

Έστω $(\Omega, \mathcal{F})$ χώρος μέτρου (χώρος πιθανότητας). Μία συνάρτηση $f: \Omega \to \mathbb{R}$ καλείται μετρήσιμη (τ.μ.) αν για κάθε σύνολο Borel $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ το $f^{-1}(B) = \{f \in B\} \in \mathcal{F}$

$$f^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega : f(\omega) \in B\}$$

Μία σημαντική ιδιότητα Αν $f_1, f_2, \ldots : \Omega \to \mathbb{R}$ μετρήσιμες και για κάθε $\omega \in \Omega$: $\lim_n f_n(\omega) = f(\omega)$ (σύγκλιση κατά σημείο) τότε η $f := \lim_n f_n$ είναι επίσης μετρήσιμη.

Βασικές κατηγορίες Τ.Μ. Έστω $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ χ.π.

1. Δείκτρια ή Χαρακτηριστική Τ.Μ.

Έστω ενδεχόμενο $A \in \mathcal{F}$. Ορίζω την συνάρτ. $\chi_A : \Omega \to \mathbb{R}$ με $\chi_A(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega \in A \\ 0, & \text{δ.α.} \end{cases}$

Η χ_A είναι τ.μ. και καλείται δείκτρια του A.

2. Απλή Τ.Μ.

Έστω μία διαμέριση $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathcal{F}$ του Ω και $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$.

Ορίζω την συνάρτηση $f: \Omega \to \mathbb{R}$ με $f(\omega) = \begin{cases} \lambda_1, & \omega \in A_1 \\ \lambda_2, & \omega \in A_2 \\ \vdots \\ \lambda_n, & \omega \in A_n \end{cases}$ άρα $f \in \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$ είναι τ.μ.

και $\underbrace{f = \lambda_1 \chi_{A_1} + \lambda_2 \chi_{A_2} + \ldots + \lambda_n \chi_{A_n}}_{\text{κανονική μορφή}} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \chi_{A_i}$ καλείται απλή τ.μ.

Δεν είναι απαραίτητο τα $A_1, A_2, \ldots, A_n$ να είναι διαμέριση αλλά αν είναι η κανονική μορφή είναι μοναδική.

3. Μη Αρνητική Τ.Μ.

Ισχύει για κάθε μη αρνητική τ.μ. $f: \Omega \to [0, +\infty]$

υπάρχει μία αύξουσα ακολουθία $f_1, f_2, \dots, f_n, \dots$ απλών μη αρνητικών τ.μ.

δηλ. $0 \le f_n(\omega) \le f_{n+1}(\omega)$ για κάθε $\omega \in \Omega$, $\forall n \in \mathbb{N}$ όπου

$\lim_n f_n(\omega) = f(\omega)$ για κάθε $\omega \in \Omega$ (σύγκλιση κατά σημείο κ.σ.)

και η $f := \lim_n f_n$

4. Τ.Μ. με τιμές στο $\mathbb{R}$

κάθε τ.μ. $f: \Omega \to \mathbb{R}$ μπορεί να γραφτεί ως διαφορά δύο μη αρνητικών τ.μ.

δηλ. $f := f^+ - f^-$ με $f^+, f^- \ge 0$ τ.μ.

Κατασκευή: Έστω ακολουθία απλών τ.μ. $f_1, f_2, \dots : \Omega \to \mathbb{R}$ με $f = \lim_n f_n$

Ορίζω τις ακολουθίες $f_n^+ = \max\{0, f_n\}$, $f_n^- = \max\{0, -f_n\}$ και θέτω $f^+ := \lim f_n^+$, $f^- := \lim f_n^-$

Τότε η $f_n = f_n^+ - f_n^- : \Omega \to \mathbb{R}$ και. $f = \lim f_n = \lim (f_n^+ - f_n^-) = \lim f_n^+ - \lim f_n^- = f^+ - f^-$

Παραγόμενη σ-άλγεβρα από Τ.Μ.

Έστω σύνολο Ω, $\mathcal{F}$ σ-άλγεβρα και $X: \Omega \to \mathbb{R}$ τ.μ.

Για κάθε Borel $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ έχω ότι $X^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\} \in \mathcal{F}$

Όπως από τη συλλογή συνόλ. $\{X^{-1}(B) : B \subseteq \mathbb{R}, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\} = X^{-1}(\mathcal{B}(\mathbb{R}))$

ορίζω την παραγόμενη σ-άλγεβρα της τ.μ. X

όπου $\sigma(X) = \sigma(\{X^{-1}(B) : B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\})$

Επίσης η X είναι τ.μ. $\Rightarrow f^{-1}(\mathcal{B}(\mathbb{R})) \subset \mathcal{F}$.

$$\Rightarrow \quad \sigma(X) = \sigma\left(f^{-1}(\mathcal{B}(\mathbb{R}))\right) \subset \mathcal{F}.$$

Άρα $\sigma(X) \subset \mathcal{F}$.

$(\Omega, \mathcal{F}) \longrightarrow$ χ.π. που αντιστοιχεί σε ένα επίπεδο πληροφόρησης
(δηλαδή βλέπεις $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega) \longrightarrow$ πλήρη πληροφόρηση)

$\sigma(X) \longrightarrow$ "ελάχιστο" επίπεδο πληροφόρησης που αντιστοιχεί οικείως στην πληροφορία που παρέχει η τ.μ. X.

<u>Παράδειγμα</u> Ρίχνω δύο διακεκριμένα ζάρια $\Omega = \{(i,j) : 1 \le i,j \le 6\}$ δ.χ.
$\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ με $(\Omega, \mathcal{F})$ χ.π.

Έστω η τ.μ. $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ $\quad f$ = άθροισμα των ενδείξεων.
δηλ. $f(i,j) = i+j$ και έστω $\sigma(X)$ η παραγόμενη σ-άλγεβρα από την τ.μ. X

Θέλω να εξετάσω ποιά από τα παρακάτω ενδεχόμενα $\in \sigma(X)$.

$$\left.\begin{array}{l} A_1 = \{(1,1)\} \subseteq \{\omega \in \Omega : f(i,j) = 2\} = \{f \in (1,3)\} \Rightarrow A_1 \subseteq f^{-1}((1,3)) \\ (i,j) \in f^{-1}((1,3)) \Rightarrow f(i,j) = 2 \Rightarrow (i,j) \in \{(1,1)\} \Rightarrow f^{-1}(1,3) \subseteq A_1 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\underline{\underline{A_1 = f^{-1}(1,3) \in \sigma(f)}}$$

$A_2 = \{(1,2), (2,1), (2,2)\} \subseteq \{\omega \in \Omega : f(i,j) = 3 \text{ ή } 4\} = \{f \in [3,4]\} = \{f \in \{3\} \cup \{4\}\}$

$\cancel{\supseteq}$? Όχι γιατί $f(3,1) = 4$ ενώ το $(3,1) \notin A_2$ άρα $A_2 \notin \sigma(f)$

$A_3 = \{(5,6),(6,6),(6,5)\} \subseteq \{\omega \in \underline{\Omega} : f(\omega)=11 \text{ ή } f(\omega)=12\} = \{f \in [11,12]\}$

$(i,j) \in \{f \in [11,12]\} = \{(i,j) : f(i,j) = 11 \text{ ή } 12\} \subseteq A_3$ και μάλιστα

$$A_3 = \{f \in [11,12]\} \in \sigma(f).$$

$A_4 = \{(5,3),(4,4),(3,5)\} \notin \sigma(f)$; γιατί $f(2,6)=8$ και $(2,6) \notin A_4$.

Για τα δύο σύνολα θα πρέπει να εξετάσετε τα

$A_1 = \{(1,1)\}$, $A_2 = \{(6,6)\}$, $A_3 = \{(1,2),(2,1),(2,2)\}$, $A_4 = \{(5,6),(6,6),(6,5)\}$

$A_5 = \{(5,3),(4,4),(3,5)\}$ αν ανήκουν στην $\sigma(g)$

όπου τ.μ. $g : \underline{\Omega} \to \mathbb{R}$ με $g(i,j) = \max\{i,j\}$.

<u>Ανεξαρτησία Τ.Μ.</u> Έστω $(\underline{\Omega}, \mathcal{F}, P)$ χ.π. και $\mathcal{G}, \mathcal{H} \subseteq \mathcal{F}$ σ-άλγεβρες στον $\underline{\Omega}$.

1) Οι σ-άλγεβρες $\mathcal{G}, \mathcal{H}$ καλούνται ανεξάρτητες, αν για κάθε ενδεχόμενο $A \in \mathcal{G}$ και $B \in \mathcal{H}$ ισχύει $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

2) Αν $X : \underline{\Omega} \to \mathbb{R}$ τ.μ. και $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ σ-άλγεβρα στον $\underline{\Omega}$, λέμε ότι η X είναι ανεξάρτητη της σ-άλγεβρας αν για κάθε $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ και $B \in \mathcal{G}$ ισχύει ότι $P(\{X \in A\} \cap B) = P(\{X \in A\}) \cdot P(B)$ δηλ. αν οι $\sigma(X), \mathcal{G}$ είναι ανεξάρτητες σ-άλγεβρες.

3) Αν $X, Y : \underline{\Omega} \to \mathbb{R}$ τ.μ. τότε η X ανεξάρτητη της Y αν για κάθε $A, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ ισχύει ότι $P(\{X \in A\} \cap \{Y \in B\}) = P(\{X \in A\}) \cdot P(\{Y \in B\})$ δηλ. αν οι $\sigma(X), \sigma(Y)$ είναι ανεξάρτητες σ-άλγεβρες

Ολοκληρώματα Μετρήσιμων Συναρτήσεων - Ολοκλήρωμα Lebesgue.

Έστω $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ χώρος μέτρου και μια $\mathcal{F}$-μετρήσιμη συνάρτηση $f : \Omega \to \mathbb{R}$.

Θέλω να ορίσω το $\int f \, d\mu$. (ολοκλήρωμα Lebesgue της f ως προς το μέτρο μ)

Αν έχω $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ χ.π. και τ.μ. $f : \Omega \to \mathbb{R}$ τότε $E[f] := \int f \, d\mu = \int f \, dP$

Ξεκινάμε να το ορίσουμε για τις διάφορες κατηγορίες μετρήσιμων συναρτ. (τ.μ.)

1. <u>Δείκτρια μετρήσιμη ή τ.μ.</u> Έστω $A \in \mathcal{F}$ και $\chi_A : \Omega \to \mathbb{R}$ μετρήσιμη (τ.μ.) όπου $\chi_A(\omega) = 1$ αν $\omega \in A$. Διαφ. $\chi_A(\omega) = 0$

Ορίζω ως $\int \chi_A \, d\mu = \int_A d\mu = \mu(A)$

άρα αν το $\mu = \lambda$ δηλ. μέτρο Lebesgue τότε $\int \chi_A \, d\lambda = \lambda(A) =$ μήκος του A.
δηλ. αν $A = (a, b)$ τότε $\int \chi_A \, d\lambda = b - a$.

αν το $\mu = P$ μ.π. και χ_A δείκτρια τ.μ. τότε $E[\chi_A] = \int \chi_A \, dP = \int_A dP = P(A)$

δηλ. μέση τιμή δείκτριας αντιστοιχεί σε πιθανότητα.

2. Απλή μη αρνητική μετρήσιμη συν. (τ.μ.)

Έστω $f : \Omega \to [0, +\infty]$ απλή, μη αρνητική, μετρήσιμη άρα έχω μια διαμέριση $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{F}$ του Ω και $\lambda_1, \dots, \lambda_n \geq 0$.
ώστε $f = \lambda_1 \chi_{A_1} + \dots + \lambda_n \chi_{A_n} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \chi_{A_i}$

Ορίζω το $\int f \, d\mu = \int \lambda_1 \chi_{A_1} + \dots + \lambda_n \chi_{A_n} \, d\mu = \int \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \chi_{A_i} \, d\mu \overset{\text{γραμμ.}}{=} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \int \chi_{A_i} \, d\mu$

Άρα $\int f\,d\mu = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \int_{A_i} d\mu = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mu(A_i)$

αν $\mu = P$ μ.π. τότε $E[f] = \int f\,dP = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i P(A_i)$

μέση τιμή διακριτής τ.μ.

<u>Σύμβαση</u> Αν $\lambda_i = 0$ και $\mu(A_i) = \infty \Rightarrow \lambda_i \mu(A_i) = 0$ $\quad E[X] = \sum x_i P[X = x_i]$

Αν $\lambda_i > 0$ και $\mu(A_i) = \infty \Rightarrow \lambda_i \mu(A_i) = 0$

Στο $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$

$f = \lambda_1 \chi_{A_1} + \lambda_2 \chi_{A_2} + \dots + \lambda_n \chi_{A_n}$

$$\int f\,d\lambda = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \lambda(A_i) = \lambda_1 (x_2 - x_1) + \lambda_2 (x_3 - x_2) + \dots = \int_{x_1}^{x_2} \lambda_1\,dx + \int_{x_2}^{x_3} \lambda_2\,dx + \dots$$

3. <u>Μη αρνητική μετρήσιμη (τ.μ.).</u>

Θεώρημα Μονότονης Σύγκλισης (ΘΜΣ)
Monotone Convergence Theorem

Έστω $f: \Omega \to [0, +\infty]$ μη αρνητική, μετρήσιμη. Το $\int f\,d\mu = \sup\{\int g\,d\mu,\ g$ απλή μη αρνητική, μετρήσιμη και $0 \le g \le f\}$.

<u>Τι γίνεται όμως;</u>

Επειδή η f ορίζεται ως $f = \lim_n f_n$ όπου $f_n: \Omega \to \mathbb{R}$ αύξουσα ακολουθία μη αρνητικών, απλών που συγκλίνουν κ.σ. στην f ισχύει ότι

$$\int f\,d\mu = \lim_n \int f_n\,d\mu.$$

4. $\mu = P$ μ.π. τότε πως γράφεται το ΘΜΣ; Αν τ.μ. $X \ge 0$ προσδιορίζεται

$X = \lim X_n$, X_n αύξουσα ακολουθία απλών, μη αρνητικών με

$$X_n \nearrow X \quad \text{κ.σ.}$$

$$\Rightarrow \quad E[X] = \lim_n E[X_n]$$

4. Μετρήσιμες (τ.μ.) μεταβλητές στο $\overline{\mathbb{R}}$

Κάθε μετρήσιμη (τ.μ.) $f : \Omega \to \mathbb{R}$ γράφεται ως $f := f^+ - f^-$ όπου $f^+, f^- \geq 0$. Άρα

$$\int f \, d\mu = \int f^+ - f^- \, d\mu = \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu.$$

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ Έστω $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ χ.μ. ή $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ χ.π.

1. Γραμμικότητα. Αν $f, g : \Omega \to \mathbb{R}$ μετρήσιμες και $\lambda, k \in \mathbb{R}$

Τότε
$$\int (\lambda f + k g) \, d\mu = \lambda \int f \, d\mu + k \int g \, d\mu.$$

$$\Rightarrow \quad E[\lambda f + k g] = \lambda E[f] + k E[g] \quad \text{σε χ.π. όπου οι } f, g \text{ τ.μ.}$$

2. Αν $f, g : \Omega \to \mathbb{R}$ μετρήσιμες τέτοιες ώστε για κάθε $\omega \in \Omega$: $f(\omega) \leq g(\omega)$ (δηλ. $f \leq g$ κ.σ.) τότε $\int f \, d\mu \leq \int g \, d\mu$

Αν X, Y τ.μ. με $X \leq Y$ κ.σ. $(X(\omega) \leq Y(\omega), \ \forall \omega \in \Omega) \Rightarrow E[X] \leq E[Y]$

3. Αν $f_1, f_2, \ldots : \Omega \to [0, +\infty]$ ακολουθία μη αρνητικών μετρήσιμων (όχι κατ' ανάγκη απλών) και $f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n : \Omega \to [0, +\infty]$ μετρήσιμη

Τότε
$$\int f \, d\mu = \int \sum_{n=1}^{\infty} f_n \, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int f_n \, d\mu$$

Θεώρημα Beppo-Levi $\quad E\left[\sum_{n=1}^{\infty} f_n\right] = \sum_{n=1}^{\infty} E[f_n]$

Πρόταση: Έστω $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ χ.π. και $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ τ.μ. ανεξάρτητες.
Τότε για κάθε $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Borel-μετρήσιμη ισχύει

$$E[f(X)g(Y)] = E[f(X)]E[g(Y)]$$

[Γενίκευση του αν X, Y ανεξάρτητες τότε $E[XY] = E[X]E[Y]$]

SOS!!! Standard Machine $\longrightarrow$ Williams
Μηχανισμός απόδειξης για αποτελέσματα στο ολοκλήρωμα.

1ο Βήμα Αποδεικνύω το αποτέλεσμα για δείκτριες

2ο Βήμα Αποδεικνύω το " για απλές χρησιμοποιώντας τη γραμμικότητα και το (1).

3ο Βήμα Αποδεικνύω το αποτέλεσμα για οποιοδήποτε μη αρνητικές τ.μ. χρησιμοποιώντας το ΘΜΣ και το (2)

4ο Βήμα Αποδεικνύω το αποτέλεσμα για οποιοδήποτε τ.μ. με τιμές στο $\mathbb{R}$ χρησιμοποιώντας τη γραμμικότητα και το (3).

Απόδειξη Θεωρώ τις τ.μ. $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ ανεξάρτητες

1ο Βήμα Δείχνω για δείκτριες

Έστω $A, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ και $f = \chi_A$, $g = \chi_B$ δηλ.
$$f(\omega) = \chi_A(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{αν } \omega \in A \\ 0 & \text{διαφ.} \end{cases}$$
$$g(\omega) = \chi_B(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{αν } \omega \in B \\ 0 & \text{διαφ.} \end{cases}$$

Τότε $f(X): \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ τ.μ. με $f(X)(\omega) = f(X(\omega)) = \begin{cases} 1, & \text{αν } X(\omega) \in A \\ 0, & \text{διαφορ.} \end{cases} = \begin{cases} 1 & \text{αν } X \in A \\ 0 & \text{διαφ.} \end{cases}$

$g(Y): \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ τ.μ. με $g(Y)(\omega) = g(Y(\omega)) = \begin{cases} 1 & \text{αν } Y(\omega) \in B \\ 0 & \text{διαφορ.} \end{cases}$

$= \begin{cases} 1 & \text{αν } Y \in B \\ 0 & \text{διαφ.} \end{cases}$

Άρα $f(X) = \chi_{[X \in A]}$ και $g(Y) = \chi_{[Y \in B]}$

$$E[f(X) \cdot g(Y)] = E[\chi_{[X \in A]} \cdot \chi_{[Y \in B]}] = E[\chi_{[X \in A] \cap [Y \in B]}]$$

$$= P([X \in A] \cap [Y \in B]) \overset{X,Y \text{ ανεξ}}{=} P([X \in A]) \cdot P([Y \in B])$$

$$= E[\chi_{[X \in A]}] \cdot E[\chi_{[Y \in B]}] = \underline{E[f(X)] \cdot E[g(Y)]}$$

άρα ισχύει το ζητούμενο όταν οι f, g είναι δείκτριες

$\chi_{[X \in A]} \cdot \chi_{[Y \in B]} = 1$ αν $X \in A$ και $Y \in B$

διαφορ. $\chi_{[X \in A]} \cdot \chi_{[Y \in B]} = 0$

άρα $\chi_{[X \in A]} \cdot \chi_{[Y \in B]} = \chi_{[X \in A] \cap [Y \in B]}$

για $A \in \mathcal{F}$

$E[\chi_A] = P(A)$

$\underline{2^{\text{ο}}\text{ Βήμα}}$ Θεωρούμε διαμερίσεις $A_1, A_2, \ldots, A_n$ και $B_1, B_2, \ldots, B_k$ του $\mathbb{R}$

και $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$, $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_k \in \mathbb{R}$ και τις Borel απλές

$$f = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \chi_{A_i} \quad \text{και} \quad g = \sum_{j=1}^{k} \mu_j \chi_{B_j}$$

Τότε $f(X) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \chi_{[X \in A_i]}$ και $g(Y) = \sum_{j=1}^{k} \mu_j \chi_{[Y \in B_j]}$

$f(\omega) = \begin{cases} \lambda_1, & \omega \in A_1 \\ \lambda_2, & \omega \in A_2 \\ \vdots \\ \lambda_n, & \omega \in A_n \end{cases} \Rightarrow f(X)(\omega) = f(X(\omega)) = \begin{cases} \lambda_1, & X(\omega) \in A_1 \\ \lambda_2, & X(\omega) \in A_2 \\ \vdots \\ \lambda_n, & X(\omega) \in A_n \end{cases} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \chi_{[X \in A_i]}$

$$E[f(X)\cdot g(Y)] = E\Big[\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \chi_{[X\in A_i]} \cdot \sum_{j=1}^{k} \mu_k \chi_{[Y\in B_j]}\Big]$$

$$\overset{\text{ιδιοτ.}}{=} E\Big[\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k} \lambda_i \mu_k \chi_{[X\in A_i]}\chi_{[Y\in B_j]}\Big]$$

$$\overset{\text{γραμ.}}{=} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k} \lambda_i \mu_k E\big[\chi_{[X\in A_i]}\chi_{[Y\in B_j]}\big]$$

$$\overset{(1)}{=} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k} \lambda_i \mu_k E\big[\chi_{[X\in A_i]}\big]E\big[\chi_{[Y\in B_j]}\big]$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i E\big[\chi_{[X\in A_i]}\big] \sum_{j=1}^{k} \mu_k E\big[\chi_{[Y\in B_j]}\big]$$

$$\overset{\text{γραμ.}}{=} E\Big[\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \chi_{[X\in A_i]}\Big] E\Big[\sum_{j=1}^{k} \mu_k \chi_{[Y\in B_j]}\Big]$$

$$= E[f(X)]\cdot E[g(Y)]$$

<u>Βήμα 3</u>: Δείχνω για μη αρνητικές

Θεωρώ $f,g:\mathbb{R}\to[0,+\infty]$ Borel μετρήσιμες οπότε

$f=\lim f_n$ κ.σ. με (f_n) αύξουσα ακολουθία μη αρνητικών απλών.

$g=\lim g_n$ κ.σ. με (g_n) αύξουσα " " "

Τότε $f(X)=\lim f_n(X)$ και $g(Y)=\lim g_n(Y)$ ιδιότητα των μετρήσιμων

ΘΜΣ $\Rightarrow E[f(X)]=\lim E[f_n(X)]$ και $E[g(Y)]=\lim E[g_n(Y)]$ (*) γιατί υπάρχουν τα όρια

Άρα $E[f(X)g(Y)] = E[\lim f_n(X)\cdot \lim g_n(Y)] \overset{(*)}{=} E[\underbrace{\lim}_{\text{ΘΜΣ}} \underbrace{f_n(X)\cdot g_n(Y)}_{(f\cdot g)_n}]$

$$= \lim E[f_n(X) g_n(Y)] \overset{(2)}{=} \lim E[f_n(X)]E[g_n(Y)]$$

$$\overset{ΘΜΣ}{=} E[\lim f_n(X)] \cdot E[\lim g_n(Y)] = E[f(X)] \cdot E[g(Y)]$$

4: Βήμα Θα αποδείξουμε για οποιεσδήποτε $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Ξέρω ότι $f = f^+ - f^-$, $f^+, f^- \geq 0$ $\quad f(X) = (f^+ - f^-)(X) = f^+(X) - f^-(X)$

$g = g^+ - g^-$, $g^+, g^- \geq 0 \Rightarrow$ $\quad g(Y) = (g^+ - g^-)(Y) = g^+(Y) - g^-(Y)$

$$E[f(X) \cdot g(Y)] = E[(f^+(X) - f^-(X))(g^+(Y) - g^-(Y))]$$

$$= E[f^+(X) g^+(Y) - f^-(X) g^+(Y) - f^+(X) g^-(Y) + f^-(X) g^-(Y)]$$

$$\overset{γραμ}{=} E[f^+(X) g^+(Y)] - E[f^-(X) g^+(Y)] - E[f^+(X) g^-(Y)] + E[f^-(X) g^-(Y)]$$

$$\overset{(3)}{=} E[f^+]E[g^+] - E[f^-]E[g^+] - E[f^+]E[g^-] + E[f^-]E[g^-]$$

$$= (E[f^+] - E[f^-])(E[g^+] - E[g^-]) \overset{γραμ}{=} E[f^+(X) - f^-(X)]E[g^+(Y) - g^-(Y)]$$

$$= E[f(X)]E[g(Y)]. \quad \blacksquare$$

Παρατήρηση Αν $f(t) = t = g(t) \Rightarrow f(X) = X$ και $g(Y) = Y$.

Άρα $E[f(X) g(Y)] = E[X \cdot Y] = E[X] \cdot E[Y]$ όταν X, Y ανεξάρτητα.