

2^η ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΑΚΗ ΑΣΚΗΣΗ

Δίνεται ο πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

Να δοθεί ο αλγόριθμος προσδιορισμού της RSF μορφής του χρησιμοποιώντας Implicit double-shift QR iteration. Από την RSF μορφή, να προσδιοριστούν οι ιδιοτιμές του.

Έστω

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

Παρατηρούμε ότι ο πίνακας A είναι ήδη upper Hessenberg και δεν χρειάζεται αναγωγή. Εφαρμόζουμε λοιπόν απ' ευθείας την επανάληψη QR με διπλό shift. Παρακάτω περιγράφονται τα βήματα του αλγορίθμου κατά τη διάρκεια της πρώτης επανάληψης:

ΒΗΜΑ 1: Υπολογισμός των shift:

$$t = a_{33} + a_{44} = 2$$

$$d = a_{33}a_{44} - a_{34}a_{43} = 2$$

ΒΗΜΑ 2: Υπολογισμός του πίνακα $M = A^2 - tA + dI$ (των τριών πρώτων μη μηδενικών εισόδων του)

$$x \leftarrow m_{11} = a_{11}^2 - ta_{11} + d + a_{12}a_{21} = 7$$

$$y \leftarrow m_{21} = a_{21}(a_{11} + a_{12} - t) = 3$$

$$z \leftarrow m_{31} = a_{21}a_{32} = 3$$

ΒΗΜΑ 3: Υπολογισμός των πινάκων P_0, P_1, P_2 έτσι ώστε ο τελικός πίνακας να είναι σε άνω Hessenberg μορφή (“bulge chasing”)

α) Υπολόγισε πίνακα $\hat{P}_0$ ώστε

$$\hat{P}_0 \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} * \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{ή} \quad \hat{P}_0 \cdot \begin{bmatrix} 7 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Είναι ο αλγόριθμος δημιουργίας μηδενικών εισόδων σε διάνυσμα με χρήση πινάκων Householder (house1). Το διάνυσμα u και το βαθμωτό σ δίνονται από

$$u = \begin{bmatrix} 2.1693 \\ 0.4286 \\ 0.4286 \end{bmatrix}$$

$$\sigma = -8.1854$$

Έπειτα, όρισε

$$P_0 = \begin{bmatrix} \hat{P}_0 & 0 \\ 0 & I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.8552 & -0.3665 & -0.3665 & 0 \\ -0.3665 & 0.09276 & -0.0724 & 0 \\ -0.3665 & -0.0724 & 0.9276 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

και υπολόγισε τον πίνακα $A \leftarrow P_0 A P_0^T$. Τότε

$$A = \begin{bmatrix} 4.5821 & -2.2515 & -3.1067 & -5.9863 \\ -4.4279 & 1.5528 & 2.1863 & 4.0271 \\ 1.0697 & 0.2316 & -1.1349 & -0.9729 \\ 0.7330 & 0.1448 & -1.8552 & 2.0000 \end{bmatrix}$$

Τέλος, ενημέρωσε τα στοιχεία:

$$x \leftarrow m_{11} = a_{21} = -4.4279$$

$$y \leftarrow m_{21} = a_{31} = 1.0697$$

$$z \leftarrow m_{31} = a_{41} = 0.7330$$

β) Υπολόγισε πίνακα $\hat{P}_1$ ώστε

$$\hat{P}_1 \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} * \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{ή} \quad \hat{P}_0 \cdot \begin{bmatrix} -4.4279 \\ 1.0697 \\ 0.7330 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Τώρα, το διάνυσμα u και το βαθμωτό σ δίνονται από

$$u = \begin{bmatrix} -8.4526 \\ 1.0000 \\ 0.6852 \end{bmatrix}$$

$$\sigma = 4.6139$$

Έπειτα, όρισε

$$P_1 = \begin{bmatrix} I_1 & 0 \\ 0 & \hat{P}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.9597 & 0.2318 & 0.1589 \\ 0 & 0.2318 & 0.9726 & -0.0188 \\ 0 & 0.1589 & -0.0188 & 0.9871 \end{bmatrix}$$

και υπολόγισε τον πίνακα $A \leftarrow P_1 A P_1^T$. Τότε

$$A = \begin{bmatrix} 4.5821 & 0.4894 & -3.4310 & -6.2085 \\ 4.6139 & 0.1414 & -2.8400 & -3.8987 \\ 0.0000 & -0.6973 & -0.4106 & 0.0536 \\ 0.0000 & -0.2907 & -1.3826 & 2.6871 \end{bmatrix}$$

Τέλος, ενημέρωσε τα στοιχεία:

$$x \leftarrow m_{11} = a_{32} = -0.6973$$

$$y \leftarrow m_{21} = a_{42} = -0.2907$$

γ) Υπολόγισε τέλος πίνακα $\hat{P}_2$ τάξης 2, ώστε τώρα

$$\hat{P}_2 \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} * \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{ή} \quad \hat{P}_2 \cdot \begin{bmatrix} -0.6973 \\ -0.2907 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma \\ 0 \end{bmatrix}$$

Τώρα, το διάνυσμα u και το βαθμωτό σ δίνονται από

$$u = \begin{bmatrix} 4.9982 \\ 1.0000 \end{bmatrix}$$

$$\sigma = 0.7555$$

Έπειτα, όρισε

$$P_2 = \begin{bmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & \hat{P}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0 & 1 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0 & 0 & -0.9230 & -0.3847 \\ 0 & 0 & -0.3847 & 0.9230 \end{bmatrix}$$

και υπολόγισε τον πίνακα $A \leftarrow P_1 A P_1^T$. Τότε

$$A = \begin{bmatrix} 4.5821 & 0.4894 & 5.5555 & -4.4106 \\ 4.6139 & 0.1414 & 4.1214 & -2.5059 \\ -0.0000 & 0.7555 & -0.4240 & -1.3505 \\ -0.0000 & 0.0000 & 0.0858 & 2.7005 \end{bmatrix}$$

Βλέπουμε πως στο τέλος της πρώτης επανάληψης ο πίνακας παραμένει upper Hessenberg, όπως το περιμέναμε. Αν παρακολουθήσουμε την σύγκλιση του πίνακα A μέσω των στοιχείων του a_{21}, a_{32}, a_{43} καταγράφοντας τις τιμές αυτών των στοιχείων, λαμβάνουμε τον εξής πίνακα:

Επανάληψη	a_{21}	a_{32}	a_{43}
1	4.6139	0.7555	0.0858
2	-0.9458	0.4936	-0.0186
3	0.6311	0.5381	0.0087
4	-0.8399	0.4926	-0.0036
5	0.6566	0.5411	0.0017
6	-0.9171	0.4902	-0.0007
7	0.7216	0.5461	0.0003
8	-1.0497	0.4871	-0.0001
9	0.7982	0.5522	0.0001

Δηλαδή μετά από σχεδόν εννέα επαναλήψεις εμφανίζεται η πρώτη (πραγματική, $\lambda_1=2.7060$) ιδιοτιμή του πίνακα A . Έπειτα, εφαρμόζοντας deflation στον πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 5.0781 & 3.5741 & 7.2040 & -4.8858 \\ 0.7982 & -0.2071 & -0.1729 & -0.7952 \\ -0.0000 & 0.5522 & -0.5770 & -1.5386 \\ -0.0000 & 0.0000 & 0.0001 & 2.7060 \end{bmatrix},$$

αναζητούμε ιδιοτιμές στον 3x3 upper Hessenberg πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 5.0781 & 3.5741 & 7.2040 \\ 0.7982 & -0.2071 & -0.1729 \\ -0.0000 & 0.5522 & -0.5770 \end{bmatrix}$$

Επαναλαμβάνοντας τον αλγόριθμο της implicit double-shift QR iteration, μετά από έξι επαναλήψεις η τιμή του στοιχείου a_{21} είναι τώρα 'μηδέν', που σημαίνει πως ο πίνακας A έχει και μιγαδικές ιδιοτιμές. Αναλυτικότερα:

Επανάληψη	a_{21}	a_{32}
1	-0.5966	-0.4999
2	0.2108	0.5288
3	-0.0820	-0.5393
4	0.0193	0.5676
5	-0.0027	-0.6039
6	0.0001	0.6516

Ο πίνακας A έχει τώρα τη μορφή

$$A = \begin{bmatrix} 5.6506 & -1.0280 & 7.5055 \\ 0.0001 & -0.4180 & -1.0037 \\ 0.0000 & 0.6516 & -0.9387 \end{bmatrix}$$

Οι μιγαδικές ιδιοτιμές $\lambda_2, \lambda_3 = \bar{\lambda}_2$ του 2x2 πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 5.6506 & -1.0280 & 7.5055 \\ 0.0001 & -0.4180 & -1.0037 \\ 0.0000 & 0.6516 & -0.9387 \end{bmatrix}$$

μπορούν να υπολογισθούν είτε απ' ευθείας, είτε λαμβάνοντας υπ' όψην ότι για τα shift της τελευταίας επανάληψης ισχύει:

$$t = \lambda_2 + \lambda_3 = \lambda_2 + \bar{\lambda}_2 = 2 \operatorname{Re}(\lambda_2) \Rightarrow \operatorname{Re}(\lambda_2) = \frac{t}{2}$$

$$d = \lambda_2 \cdot \lambda_3 = \lambda_2 \cdot \bar{\lambda}_2 = \operatorname{Re}(\lambda_2)^2 + \operatorname{Im}(\lambda_2)^2 \Rightarrow \operatorname{Im}(\lambda_2) = \sqrt{d + \operatorname{Re}(\lambda_2)^2}$$

Με χρήση των παραπάνω τύπων λαμβάνουμε τις εξής προσεγγίσεις:

$$\operatorname{Re}(\lambda_2) = \frac{t}{2} = -0.6784$$

$$\operatorname{Im}(\lambda_2) = \sqrt{d + \operatorname{Re}(\lambda_2)^2} = 0.7669$$

Επομένως, οι ιδιοτιμές είναι $\lambda_2 = -0.6784 + 0.7669i$ και $\lambda_3 = -0.6784 - 0.7669i$. Εφαρμόζοντας εκ' νέου deflation λαμβάνουμε πίνακα-στοιχείο με προφανή ιδιοτιμή $\lambda_4 = 5.6506$.

Παρατήρηση: Για τον πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

η εντολή `eig(A)` της MATLAB δίνει τις εξής ιδιοτιμές:

$$\lambda_1 = 5.6506$$

$$\lambda_2 = -0.6783 + 0.7657i$$

$$\lambda_3 = -0.6783 - 0.7657i$$

$$\lambda_4 = 2.7060$$

Η διαφορά οφείλεται στο γεγονός ότι η σύγκλιση μέσω του υπολογιστικού πακέτου γίνεται με ακρίβεια μεγαλύτερης τάξης.