

## Εργασία

Έστω  $a(x), b(x) \in \mathbb{R}[x]$ , δύο πολυώνυμα βαθμού  $n$  και  $p$  αντίστοιχα με  $p \leq n$ , όπου

$$a(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

και

$$b(x) = b_p x^p + b_{p-1} x^{p-1} + \dots + b_1 x + b_0.$$

Ο πίνακας Sylvester  $S \in \mathbb{R}^{(n+p) \times (n+p)}$  των δύο παραπάνω πολυωνύμων είναι ο ακόλουθος:

$$S = \begin{bmatrix} a_n & a_{n-1} & \dots & \dots & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \dots & a_0 & 0 & \dots & \cdot & 0 \\ 0 & a_n & \ddots & & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \dots & a_1 & a_0 & \dots & \cdot & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & a_n & \dots & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \dots & a_1 & a_0 \\ b_p & b_{p-1} & \dots & \dots & \cdot & \cdot & \dots & b_0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & \cdot & 0 \\ 0 & b_p & \ddots & \dots & \cdot & \cdot & \dots & b_1 & b_0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \cdot & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \dots & \cdot & \cdot & \dots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & \ddots & b_p & b_{p-1} & b_{p-2} & \dots & \cdot & \cdot & \ddots & b_0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \cdot & 0 & 0 & b_p & b_{p-1} & \dots & \cdot & \cdot & \dots & b_1 & b_0 \end{bmatrix}$$

Εάν εφαρμόσουμε την παραγοντοποίηση QR στον πίνακα  $S$

$$S = QR$$

η τελευταία μη μηδενική γραμμή του πίνακα  $R$  δίνει τους συντελεστές του μέγιστου κοινού διαιρέτη (ΜΚΔ) των δύο πολυωνύμων  $a(x), b(x)$  σε αντίστροφη σειρά. Εάν η τάξη του πίνακα  $S$  είναι  $r$ , βαθμός του ΜΚΔ των πολυωνύμων ισούται με  $n + p - r$ .

- (i) Να φτιάξετε function στη Matlab που να δέχεται δύο διανύσματα  $a, b$  με τους συντελεστές δύο πολυωνύμων  $a(x), b(x) \in \mathbb{R}[x]$  και να επιστρέφει τον πίνακα Sylvester  $S$  των πολυωνύμων αυτών.
- (ii) Να φτιάξετε πρόγραμμα που να υλοποιεί την παραγοντοποίηση QR με οδήγηση κατά στήλες (QRCP) υπολογίσετε την τάξη του πίνακα  $S$ .
- (iii) Να φτιάξετε πρόγραμμα που να υλοποιεί την παραγοντοποίηση QR.
- (iv) Να υπολογίσετε το ΜΚΔ των πολυωνύμων:

$$\begin{aligned}
a(x) = & x^{16} - 30x^{15} + 435x^{14} - 4060x^{13} + 27337x^{12} - 140790x^{11} \\
& + 573105x^{10} - 1877980x^9 + 4997798x^8 - 10819380x^7 \\
& + 18959460x^6 - 26570960x^5 + 29153864x^4 - 24178800x^3 \\
& + 14280000x^2 - 5360000 * x + 960000
\end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned}
b(x) = & x^{14} - 140x^{12} + 7462x^{10} - 191620x^8 + 2475473x^6 \\
& - 15291640x^4 + 38402064x^2 - 25401600
\end{aligned}$$

Ο ΜΚΔ των παραπάνω πολυωνύμων είναι:

$$g(x) = x^4 - 10x^3 + 35x^2 - 50x + 24.$$

Το βαθμό του ΜΚΔ θα τον υπολογίσετε μέσω της QRCP τους συντελεστές του ΜΚΔ από την παραγοντοποίηση QR του πίνακα  $S$ :  $S = QR$ .

Η γραμμή του πίνακα  $R$  η οποία δίνει τους συντελεστές του ΜΚΔ σε αντίστροφη σειρά είναι η  $n + p - r$  και είναι η τελευταία μη μηδενική γραμμή του  $R$ . Λόγω σφαλμάτων στρογγύλευσης κατά τη διάρκεια των υπολογισμών σε αριθμητική κινητής υποδιαστολής, ενδέχεται η επόμενη ή κάποιες από τις επόμενες γραμμές από την  $n + p - r$  του πίνακα  $R$ , να μην είναι μηδενικές. Για το λόγω αυτό προτείνεται η χρήση της QRCP για τον υπολογισμό της τάξης του πίνακα  $S$ . Να προσθέσετε μια ακρίβεια  $\text{tol}$  για το φράξιμο της νόρμας του κάτω δεξιού μπλοκ  $R_{22}$  κατά την υλοποίηση της QRCP για τον υπολογισμό του “numerical rank” (βλ. διαφάνεια 14). Ξεκινώντας από  $\text{tol} = 10^{-16}$  και αυξάνοντας το  $\text{tol}$  ( $10^{-15}, 10^{-14}, \dots, 10^{-1}$ ) διερευνήστε για ποιες τιμές του  $\text{tol}$  το numerical rank του πίνακα συμπίπτει με το θεωρητικό (θεωρητικό rank=26).

- (v) Στο πρόγραμμα υλοποίησης της παραγοντοποίησης QR ενδέχεται να χρειαστεί να προσθέσετε μια εσωτερική ακρίβεια (inner tolerance)  $\text{tol}_2$ , μηδενίζοντας σε κάθε πράξη οποιοδήποτε αποτέλεσμα είναι κατά απόλυτη τιμή μικρότερο του  $\text{tol}_2$ . Ξεκινώντας από  $\text{tol}_2 = 10^{-16}$  και αυξάνοντας το  $\text{tol}_2$  ( $10^{-15}, 10^{-14}, \dots, 10^{-1}$ ) διερευνήστε για ποιες τιμές του  $\text{tol}$  η παραγοντοποίηση QR δίνει σωστό αποτέλεσμα.