

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

- 1) Να γραφεί αναλυτικά ο αλγόριθμος της αναγωγής ενός πίνακα A $n \times n$ στην άνω Hessenberg μορφή και να αποδειχθεί ότι η πολυπλοκότητα του αλγορίθμου είναι $\frac{5n^3}{3}$.
- 2) Να γραφεί αναλυτικά ο αλγόριθμος της τριδιαγώνιας αναγωγής ενός συμμετρικού πίνακα A $n \times n$ και να αποδειχθεί ότι η πολυπλοκότητά του είναι $\frac{2n^3}{3}$.
- 3) Έστω πίνακας A $n \times n$ άνω Hessenberg. Να δοθεί ο αλγόριθμος της QR παραγοντοποίησής του και να αποδειχθεί ότι η πολυπλοκότητά του είναι της τάξης $O(n^2)$.
(Υπόδειξη: Να χρησιμοποιηθεί η μέθοδος Givens).
- 4) Έστω $A_0 = A$ άνω Hessenberg πίνακας τον οποίο υποθέτουμε unreduced. Να αποδείξετε ότι κάθε μέλος της ακολουθίας $\{A_k\}$ που παράγεται με την επανάληψη QR είναι επίσης άνω Hessenberg.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

- ① Έστω H $n \times n$ unreduced Hessenberg matrix και μ ιδιοτιμή του. Έστω $H - \mu I = QR$, η QR παραγοντοποίηση του $H - \mu I$. Αποδείξτε ότι ο πίνακας R είναι ιδιόμορφος.

② Έστω

$$H = \begin{bmatrix} x & x & x & x & x \\ x & x & x & x & x \\ 0 & x & x & x & x \\ 0 & 0 & x & x & x \\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon & h_{nn} \end{bmatrix}$$

unreduced upper Hessenberg matrix

Εφαρμόζουμε σ' αυτόν τον αλγόριθμο single-shift QR :
 $QR = H - h_{nn}I$, $\bar{H} = RQ + h_{nn}I$. Μετά από $n-2$ βήματα βρίσκουμε πίνακα της μορφής

$$\begin{bmatrix} x & x & x & x & x \\ & x & x & x & x \\ & & x & x & x \\ & & & a & b \\ & & & \varepsilon & 0 \end{bmatrix}$$

Αποδείξτε ότι η $(n, n-1)$ είσοδος του $\bar{H}$ δίνεται από

$$\bar{h}_{n,n-1} = \frac{\varepsilon^2 b}{\varepsilon^2 + a^2}$$

Εάν $\varepsilon \ll a$ προσδιορίστε την τάξη του όρου $\bar{h}_{n,n-1}$.

- ③ Να ετυμηθεί η πολυπλοκότητα του αλγόριθμου εύρεσης της RSF ενός πίνακα A τάξης $n \times n$.

- ④ Να γίνει αναλυτικά η απόδειξη του Implicit-Q θεωρήματος