

ΥΛΗ

Από το βιβλίο

"Αριθμητική Γεωμετρική Άλγεβρα και
Επιστημονικοί Υπολογισμοί"

Κεφ 3: § 3.1, 3.3.1, 3.3.2

Κεφ 4: § 4.4, 4.5

Κεφ 5: § 5.1, 5.2, 5.3, 5.4 (Άσκηση)
5.5

Εφαρμοσμένη Γραμμική Άλγεβρα

~~Παραγοντοποίηση LU~~

ΑΣΚΗΣΗ 1

Να εξεταστεί εάν έχουν LU παραγοντοποίηση οι παρακάτω πίνακες.

$$M_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad M_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad M_4 = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$$

$$M_5 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 5 & 2 & -3 \end{bmatrix}, \quad M_6 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M_7 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Να τεκμηριωθεί πλήρως η απάντηση.

ΑΣΚΗΣΗ (2)

Να δοθεί αλγόριθμος που να υπολογίζει μέσω της απαλοιφής Gauss την παραγοντοποίηση LU ενός πίνακα

- (i) $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $m > n$, $\text{rank}(A) = n$
- (ii) $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $m < n$, $\text{rank}(A) = m$
- (iii) $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $m > n$, $\text{rank}(A) = r < n$
- (iv) $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $m < n$, $\text{rank}(A) = r < m$

Για κάθε περίπτωση να εστιμηθεί η πολυπλοκότητα του αλγορίθμου. Επίσης να ερευνηθεί η μοναδικότητα της παραγοντοποίησης. Να προσδιοριστούν κατάλληλα αριθμητικά παραδείγματα.

ΑΣΚΗΣΗ (3)

Να δοθεί αλγόριθμος που να υπολογίζει μέσω της απαλοιφής Gauss την παραγοντοποίηση LU ενός πίνακα

- (i) $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, τριδιαγώνιος
- (ii) $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, τριδιαγώνιος, συμμετρικός
- (iii) $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, αίω Hessenberg
 $a_{ij} = 0$, $\forall i > j+1$

1. Έστω $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Να αποδειχθεί ότι εάν εφαρμοσθεί η QR παραγοντοποίηση σ' αυτόν προκύπτει το εξής:

$$H_s H_{s-1} \dots H_2 H_1 A = Q^T A = \begin{cases} \begin{bmatrix} R_1 \\ 0 \end{bmatrix}, m > n, \text{ flops : } n^2 \left(m - \frac{n}{3} \right) \\ [R_1 \ s], m \leq n, \text{ flops : } m^2 \left(n - \frac{m}{3} \right) \end{cases}$$

$$s = \min\{n, m-1\}$$

2. Να αποδειχθεί ότι εάν απαιτείται ο υπολογισμός του πίνακα Q στον αλγόριθμο QR χρειάζεται επιπλέον $\frac{2}{3}n^3$ flops.
3. Να αποδειχθεί ότι η εισαγωγή μηδενικών σ' ένα διάνυσμα $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$ με τη μέθοδο Givens, έτσι ώστε αυτό να γίνεται πολλαπλάσιο του $\underline{e}_1$ είναι διπλάσια σε πολυπλοκότητα απ' ότι εάν χρησιμοποιηθούν οι πίνακες Householder.
4. Έστω $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Να δοθεί ο αλγόριθμος υπολογισμού του εκ δεξιών πολλαπλασιασμού του πίνακα A με πίνακα Givens $J(i, j, \theta)$ $1 \leq i \leq j \leq n$. Να εκτιμηθεί η υπολογιστική πολυπλοκότητα.
5. Έστω $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Να γραφεί αναλυτικά ο αλγόριθμος υπολογισμού της QR παραγοντοποίησής του με τη μέθοδο Givens. Να αποδειχθεί ότι η υπολογιστική πολυπλοκότητα του αλγόριθμου αυτού είναι $2n^2 \left(m - \frac{n}{3} \right)$ flops και να συγκριθεί με τη μέθοδο Householder. Πόσο επιπλέον θα αυξηθεί η υπολογιστική πολυπλοκότητα εάν απαιτηθεί ο αναλυτικός υπολογισμός του πίνακα Q ;

ΑΙΚΗΤΗ 6: Έστω $u \in \mathbb{R}^n$, $u \neq 0$ και
 $H_u = I - 2 \frac{u u^T}{u^T u}$ ο πίνακας Householder

Να αποδείξετε ότι:

- (i) H συμμετρικός
- (ii) H ορθογώνιος
- (iii) $H^2 = I$
- (iv) $Hu = -u$
- (v) $Hv = v$ εάν $v^T u = 0$
- (vi) Εάν το u είναι παράλληλο στο διάνυσμα $x-y$,
 όπου $y \neq x$ και $\|y\|_2 = \|x\|_2$ τότε
 $Hx = y$

Θεώρημα: Έστω $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$, $x \neq e_1$.
 Ορίζουμε $u = x \pm \|x\|_2 e_1$ και H_u
 ο πίνακας Householder αν ορίσουμε αν και
 τότε $Hx = \mp \|x\|_2 \cdot e_1$

Πορίσμα: Έστω $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$, $x \neq e_1$ και
 $u = x + \text{sign}(x_1) \|x\|_2 \cdot e_1$
 Τότε $H \cdot x = -\|x\|_2 \cdot e_1$

Άσκηση 7

(2)

Έστω $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $m \geq n$, $\text{rank}(A) = r < n$
Να γίνει η πλήρης ανάλυση του διασπλάτος
της πλήρους ορθογώνιας παραγοντοποίησης.

(2.) Να προσδιορίσετε την πλήρη ορθογώνια
παραγοντοποίηση του πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \\ 6 & 9 \end{bmatrix}$$

Άσκηση 8

Με τη βοήθεια της παραγοντοποίησης QR με
δυνατότητα κατά στήλες να προσδιορίσετε την
τάξη του πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

Να προσδιορίσετε επίσης ορθογώνια βάση για το
χώρο στήλων του A .

Άσκηση 9

Να δοθεί αλγόριθμος που να υπολογίζει
τη παραγοντοποίηση QR ενός πίνακα Hermitian
πίνακα $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

- (i) με μετασχηματισμούς Householder
- (ii) με μετασχηματισμούς Givens.

Να ευστηθεί η πομπητικότητα των μεθόδων.
Τι επαύγηση επέρχεται εάν πομπησιόζοτα
εάν αναστετα και ο πλάκας μετασχηματισμής.

Εφαρμογή:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$