

Κεφάλαιο 1

Μετασχηματισμοί Givens

Ορισμός 1.1. Ένας πίνακας της μορφής

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & & \vdots \\ & & & \text{\scriptsize (i,i)-στοιχείο} & \text{\scriptsize (i,j)-στοιχείο} & \\ 0 & 0 & \cdots & \underbrace{\cos \vartheta}_c & \underbrace{\sin \vartheta}_s & 0 \\ & & & \text{\scriptsize (j,i)-στοιχείο} & \text{\scriptsize (j,j)-στοιχείο} & \\ \vdots & \vdots & & \underbrace{\sin \vartheta}_{-s} & \underbrace{\cos \vartheta}_c & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

ονομάζεται **πίνακας Givens** και συμβολίζεται $J(i, j, \vartheta)$ ή $J(i, j, c, s)$. Τα c, s λέγονται **παράμετροι Givens**

Παρατήρηση. 1. Ισχύει ότι $J^T \cdot J = I$ άρα J : ορθογώνιος.

2. Έστω $x \in \mathbb{R}^2$. Θέλουμε

$$J(1, 2, \vartheta) \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} * \\ 0 \end{bmatrix}$$

Αν

$$J(1, 2, \vartheta) = \begin{bmatrix} \cos \vartheta & \sin \vartheta \\ -\sin \vartheta & \cos \vartheta \end{bmatrix}$$

όπου $\cos \vartheta = \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}$, $\sin \vartheta = \frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}$ έχουμε ότι:

$$\begin{bmatrix} \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} & \frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} \\ -\frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} & \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \|x\|_2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Λήμμα 1.2. Έστω $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$ με $x \neq 0, x \neq e_1$. Έστω $c = \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}$, $s = \frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}$ οι παράμετροι Givens. Τότε $J(1, 2, c, s) \cdot x = \text{span}\{e_1\} = \begin{bmatrix} \|x\|_2 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Απόδειξη. Αν $J(1, 2, c, s) = \begin{bmatrix} \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} & \frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} \\ -\frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} & \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} \end{bmatrix}$ τότε $J(1, 2, c, s) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \|x\|_2 \\ 0 \end{bmatrix} = \text{span}\{e_1\}$

Παρατηρούμε ότι έτσι μπορούμε να μηδενίζουμε εισόδους σε διανύσματα. Κάθε φορά επιλέγουμε την προς μηδενισμό συντεταγμένη (έστω j) και δημιουργούμε τον **core Givens matrix** διάστασης 2×2 $J(i, j, c, s)$. Επιλέγοντας $i < j$ θέση καθώς και τις c, s ο core Givens matrix με κατάλληλα c, s θα είναι της μορφής:

$$\begin{bmatrix} c & s \\ -s & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \|x\|_2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

και μετά θα γίνεται **expanded** σε

$$J(i, j, c, s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \underbrace{c}_{(i,i)\text{-στοιχείο}} & \underbrace{s}_{(i,j)\text{-στοιχείο}} & 0 \\ \vdots & \vdots & & \underbrace{-s}_{(j,i)\text{-στοιχείο}} & \underbrace{c}_{(j,j)\text{-στοιχείο}} & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

□

Παράδειγμα 1.3. Να μηδενιστεί η τρίτη συντεταγμένη του διανύσματος $x =$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} \text{ με διαδικασία ορθογώνιου μετασχηματισμού.}$$

Λύση. Για μηδενισμό της x_3 συντεταγμένης, επιλέγω $i < 3$ και υπολογίζω τον πίνακα Givens $J(i, 3, c, s)$ αφού πρώτα προσδιορίσω τα c, s .

1. *Αν επιλέξω $i = 1$*

Θέλω να μηδενίσω τη x_2 συντεταγμένη του διανύσματος $x = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$. Υπολογίζω τις παραμέτρους Givens:

$$c = \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+9}} = \frac{1}{\sqrt{10}}$$

$$s = \frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} = \frac{3}{\sqrt{1+9}} = \frac{3}{\sqrt{10}}$$

core Givens:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{3}{\sqrt{10}} \\ -\frac{3}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{10}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{10} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Άρα ο πίνακας Givens είναι ο

$$J(1, 3, c, s) = \begin{bmatrix} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{10}}}_{(1,1)\text{-στοιχείο}} & 0 & \underbrace{\frac{3}{\sqrt{10}}}_{(1,3)\text{-στοιχείο}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \underbrace{-\frac{3}{\sqrt{10}}}_{(3,1)\text{-στοιχείο}} & 0 & \underbrace{\frac{1}{\sqrt{10}}}_{(3,3)\text{-στοιχείο}} \end{bmatrix}$$

$$\text{και τότε } J(1, 3, c, s) \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{10}{\sqrt{10}} \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{10} \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

2. *Αν επιλέξω $i = 2$*

Θέλω να μηδενίσω τη x_2 συντεταγμένη του διανύσματος $x = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$. Υπολογίζω τις παραμέτρους Givens:

$$c = \frac{-1}{\sqrt{(-1)^2 + 3^2}} = \frac{-1}{\sqrt{10}}$$

$$s = \frac{3}{\sqrt{(-1)^2 + 3^2}} = \frac{3}{\sqrt{10}}$$

Άρα ο πίνακας Givens είναι ο

$$J(2, 3, c, s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \underbrace{\frac{-1}{\sqrt{10}}}_{(2,2)\text{-στοιχείο}} & \underbrace{\frac{3}{\sqrt{10}}}_{(2,3)\text{-στοιχείο}} \\ 0 & \underbrace{\frac{3}{\sqrt{10}}}_{(3,2)\text{-στοιχείο}} & \underbrace{\frac{-1}{\sqrt{10}}}_{(3,3)\text{-στοιχείο}} \end{bmatrix}$$

$$\text{και } J(2, 3, c, s) \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{10}{\sqrt{10}} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{10} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ο παρακάτω αλγόριθμος υπολογίζει για δοσμένο $x \in \mathbb{R}^2$ τις παραμέτρους Givens c, s και $\|x\|_2$. Το καινούργιο x θα είναι $x = J(1, 2, c, s) \cdot x$. **Αλγόριθμος μηδενισμού εισόδου διανύσματος με πίνακα Givens:** Διάβασε

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

$$nx = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$$

$$c = \frac{x_1}{nx} \rightarrow 2 \text{ flops}$$

$$s = \frac{x_2}{nx} \rightarrow 2 \text{ flops}$$

Πολυπλοκότητα: $O(4)$

Παρατήρηση. Ο αλγόριθμος αυτός μπορεί να επεκταθεί για διαδοχικό μηδενισμό εισόδων διανύσματος $x \in \mathbb{R}^n$ ώστε να γίνει $\text{span}\{e_1\}$ ως εξής:

for $i = 2, \dots, n$

$$x = J(1, i, c, s) \cdot x \rightarrow 4 \text{ flops}$$

end

Πολυπλοκότητα: $O(4n)$

Γνωρίζουμε ότι η εισαγωγή μηδενικών σε διάνυσμα ώστε να γίνει $\text{span}\{e_1\}$ με τη μέθοδο Householder απαιτεί $O(2n)$ flops. Επομένως η διαδικασία Givens απαιτεί διπλάσια πολυπλοκότητα από τη Householder. Όμως μπορεί να πετύχει **επιλεκτικό μηδενισμό εισόδων του διανύσματος, πράγμα που της δίνει πλεονέκτημα έναντι της Householder.**

Παράδειγμα 1.4. Δίνεται $x = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$. Να γίνει $\text{span}\{e_1\}$.

Λύση. Βήμα 1ο: Μηδενισμός της x_2 συντεταγμένη του διανύσματος x .

$$x^{(1)} = J(1, 2, c, s) \cdot x.$$

Υπολογίζω τα c, s :

$$\begin{bmatrix} c & s \\ -s & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} * \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$-s - c = 0, \quad s^2 + c^2 = 1 \Rightarrow c = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad s = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\text{ή άμεσα από: } c = \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad s = \frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}. \text{ Άρα } x^{(1)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Βήμα 2ο: Μηδενισμός της x_3 συντεταγμένη του διανύσματος $x^{(1)}$.

$$i = 1, k = 3$$

Υπολογίζω τα c, s :

$$\begin{bmatrix} c' & s' \\ -s' & c' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} * \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$-\sqrt{2}s' + 2c' = 0, \quad s'^2 + c'^2 = 1 \Rightarrow c' = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad s' = \frac{2}{\sqrt{6}}$$

$$\text{ή άμεσα: } c' = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad s' = \frac{2}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

$$\text{Άρα } x^{(2)} = J(1, 3, c', s') \cdot x = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{\sqrt{6}}{3} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{\sqrt{6}}{3} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{6} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Έτσι $x^{(2)} = P \cdot x$, όπου $P = J(1, 3, c', s') \cdot J(1, 2, c, s)$.

$$\text{Επαλήθευση: } P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{\sqrt{6}}{3} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{\sqrt{6}}{3} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{\sqrt{6}}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{-\sqrt{6}}{3\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{6}}{3\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}.$$

$$P \cdot x = \begin{bmatrix} \sqrt{6} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

1.1 Επίδραση πίνακα Givens σε πίνακα $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$

Έστω $A = \begin{bmatrix} r_1^t \\ \vdots \\ r_i^t \\ \vdots \\ r_n^t \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ όπου $r_i^t \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ οι γραμμές του πίνακα.

Ο εξ αριστερών πολλαπλασιασμός του A με ένα πίνακα Givens $J(i, j, c, s)$ (δηλαδή $J(i, j, c, s) \cdot A$) θα επηρεάσει **μόνο** τις i, j γραμμές του A , δηλαδή

$$r_i^t = c \cdot r_i^t + s \cdot r_j^t \rightarrow 2n \text{ flops}$$

$$r_j^t = -s \cdot r_i^t + c \cdot r_j^t \rightarrow 2n \text{ flops}$$

επειδή έχουμε

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \underbrace{(i,i)\text{-στοιχείο}}_{\textcolor{red}{c}} & \underbrace{(i,j)\text{-στοιχείο}}_{\textcolor{red}{s}} & 0 \\ \vdots & \vdots & & \underbrace{(j,i)\text{-στοιχείο}}_{\textcolor{red}{-s}} & \underbrace{(j,j)\text{-στοιχείο}}_{\textcolor{red}{c}} & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} r_1^t \\ \vdots \\ r_i^t \\ \vdots \\ r_j^t \\ \vdots \\ r_n^t \end{bmatrix}$$

Η πολυπλοκότητα είναι $O(4n)$ flops

Η διαδικασία αυτή μπορεί να χρησιμοποιηθεί για επιλεκτικό μηδενισμό εισόδων πίνακα, αλλά και για άνω τριγωνοποίηση του πίνακα.

Παράδειγμα 1.5. Να μηδενιστεί η a_{21} συντεταγμένη του πίνακα

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \textcolor{red}{3} & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

Λύση. Προσδιορίζουμε τις παραμέτρους Givens c, s

$$\begin{bmatrix} c & s \\ -s & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$c = \frac{1}{\sqrt{10}}, \quad s = \frac{3}{\sqrt{10}}$$

$$J(1, 2, c, s) \cdot A = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{3}{\sqrt{10}} & 0 \\ -\frac{3}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{10}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot A = \begin{bmatrix} \frac{10}{\sqrt{10}} & \frac{11}{\sqrt{10}} & \frac{15}{\sqrt{10}} \\ 0 & -\frac{3}{\sqrt{10}} & \frac{-5}{\sqrt{10}} \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

Παράδειγμα 1.6. Δίνεται ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$. Να μηδενισθεί η είσοδος a_{12} με μετασχηματισμούς Givens.

Λύση. Ορίζουμε τις παραμέτρους Givens για το $x = [1 \ 2]^T$. Πολλαπλασιάζοντας εκ δεξιών με μετασχηματισμό Givens θα έχουμε

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} c & -s \\ s & c \end{bmatrix}}_{J^T} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{-2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \sqrt{5} & 0 \\ \frac{11}{\sqrt{5}} & \frac{-2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$$

Παραγοντοποίηση Givens-QR

Θεώρημα 1.7. Έστω $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $m \geq n$. Πάντοτε υπάρχουν $s = \min(n, m-1)$ ορθογώνιοι πίνακες $Q_1, \dots, Q_s$ με $Q_i = J(i, m, \vartheta) \cdot J(i, m-1, \vartheta) \cdots J(i, i+1, \vartheta)$ έτσι ώστε εάν $Q = Q_1^T \cdot Q_2^T \cdots Q_s^T$ έχουμε $A = Q \cdot R$ όπου $Q \in \mathbb{R}^{m \times m}$ ορθογώνιος και $R \in \mathbb{R}^{n \times n}$ άνω τριγωνικός.

Απόδειξη. Έστω $A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \cdots & \alpha_{mn} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Θα αποδείξουμε ότι

πάντοτε υπάρχει ορθογώνιος πίνακας $Q \in \mathbb{R}^{m \times m}$ έτσι ώστε να επιτυγχάνεται η επιθυμητή παραγοντοποίηση.

Βήμα 1: Διαμορφώνουμε τον πίνακα $Q_1 = J(1, m, \vartheta) \cdot J(1, m-1, \vartheta) \cdots J(1, 2, \vartheta)$ έτσι ώστε:

$$Q_1 \cdot A = \begin{pmatrix} \alpha_{11}^{(1)} & \alpha_{12}^{(1)} & \cdots & \alpha_{1n}^{(1)} \\ 0 & \alpha_{22}^{(1)} & \cdots & \alpha_{2n}^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \alpha_{m2}^{(1)} & \cdots & \alpha_{mn}^{(1)} \end{pmatrix} = A^{(1)}$$

Ο πίνακας $Q_1 \in \mathbb{R}^{m \times m}$ είναι ορθογώνιος ως γινόμενο ορθογωνίων πινάκων.

Βήμα 2: Διαμορφώνουμε τον πίνακα $Q_2 = J(2, m, \vartheta) \cdot J(2, m-1, \vartheta) \cdots J(2, 3, \vartheta)$ έτσι ώστε:

$$Q_2 \cdot A^{(1)} = \begin{pmatrix} \alpha_{11}^{(2)} & \alpha_{12}^{(2)} & \cdots & & \alpha_{1n}^{(2)} \\ 0 & \alpha_{22}^{(2)} & \cdots & & \alpha_{2n}^{(2)} \\ \vdots & 0 & \alpha_{33}^{(2)} & \cdots & \alpha_{3n}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \alpha_{m3}^{(2)} & \cdots & \alpha_{mn}^{(2)} \end{pmatrix} = A^{(2)}$$

Βήμα k : Διαμορφώνουμε τον πίνακα $Q_k = J(k, m, \vartheta) \cdots J(k, k+1, \vartheta)$ έτσι ώστε:

$$Q_k \cdot A^{(k-1)} = \begin{pmatrix} \alpha_{11}^{(k)} & \alpha_{12}^{(k)} & \cdots & & \cdots & \alpha_{1n}^{(k)} \\ 0 & \alpha_{22}^{(k)} & \cdots & & \cdots & \alpha_{2n}^{(k)} \\ \vdots & 0 & \alpha_{33}^{(k)} & \cdots & & \alpha_{3n}^{(k)} \\ \vdots & \vdots & 0 & \alpha_{kk}^{(k)} & \cdots & \alpha_{kn}^{(k)} \\ \vdots & \vdots & 0 & 0 & \alpha_{k+1,k+1}^{(k)} & \cdots \alpha_{k+1,n}^{(k)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha_{k+1,n}^{(k)} & \cdots \alpha_{mn}^{(k)} \end{pmatrix} = A^{(k)}$$

Τελικά μετά από $s = \min(n, m-1)$ βήματα ο πίνακας $A^{(s)}$ θα είναι της μορφής:

$$A^{(s)} = \begin{pmatrix} \alpha_{11}^{(s)} & \alpha_{12}^{(s)} & \cdots & & \cdots & \alpha_{1n}^{(s)} \\ 0 & \alpha_{22}^{(s)} & \cdots & & \cdots & \alpha_{2n}^{(s)} \\ \vdots & 0 & \alpha_{33}^{(s)} & \cdots & & \alpha_{3n}^{(s)} \\ \vdots & \vdots & 0 & 0 & \cdots & \alpha_{n,n}^{(s)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots 0 \end{pmatrix}$$

Παρατηρούμε ότι $R = A^{(s)} = Q_s A^{(s-1)} = Q_s Q_{s-1} A^{(s-2)} = \dots = \underbrace{Q_s Q_{s-1} \cdots Q_1}_Q A \Rightarrow$

$$Q^T R = A \Rightarrow \boxed{A = Q^T \cdot R}$$

□

Αλγόριθμος Givens-QR:

for $k = 1, 2, \dots, \min(n, m-1)$

for $l = k+1, 2, \dots, m$

Διαμορφώσε “core” 2×2 πίνακα Givens τ.ώ.

$$J(k, l, c, s) \begin{bmatrix} a_{kk} \\ a_{lk} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow 4\text{flops}$$

Κάνε expand σε $m \times m$ $J(k, l, c, s)$

$A = J(k, l, c, s) \cdot A \rightarrow 4(n - k) \text{ flops}$ (σε κάθε επανάληψη
ενημερώνονται $n - k$ στήλες των k, l γραμμών)

Συνολική Πολυπλοκότητα (Υποθέτουμε ότι $m > n$)

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^n \{4(m - k) + 4(n - k)(m - k)\} &= \sum_{k=1}^n \{4m - 4k + 4nm - 4nk - 4mk + 4k^2\} = \\
 &= 4mn - 4\left(\sum_{k=1}^n k\right) + 4n^2m - 4n\left(\sum_{k=1}^n k\right) - 4m\left(\sum_{k=1}^n k\right) + 4\left(\sum_{k=1}^n k^2\right) = \\
 &= 4mn - 4\frac{n(n+1)}{2} + 4n^2m - 4n\frac{n(n+1)}{2} - 4mn\frac{n(n+1)}{2} + 4\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \\
 &= 4mn - 2n(n+1) + 4n^2m - 2n^2(n+1) - 2mn(n+1) + 2\frac{n(n+1)(2n+1)}{3} = \\
 &= 4mn - 2n^2 - 2n + 4n^2m - 2n^3 - 2n^2 - 2mn^2 - 2mn + \frac{2n}{3}(2n^2 + n + 2n + 1) = \\
 &= 2n^2m - 2n^2 - 2n^3/3 - 4n/3 + 2mn = O(2n^2m - 2n^2/3)
 \end{aligned}$$

Διπλάσια πολυπλοκότητα από της Householder

Παράδειγμα 1.8. Να προσδιορισθεί η QR παραγοντοποίηση του πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

με μετασχηματισμούς Givens.

Λύση. Βήμα 1 Προσδιόρισε τις παραμέτρους Givens c, s :

$$\begin{bmatrix} c & s \\ -s & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} * \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$a_{11} = 0, a_{21} = 1, c = 0, s = 1$$

$$J(1, 2, \vartheta) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
A^{(1)} &= J(1, 2, \vartheta) \cdot A = \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Βρες c, s τέτοια ώστε:

$$\begin{bmatrix} c & s \\ -s & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} * \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$a_{11} = 1, c = \frac{1}{\sqrt{2}}, s = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$J(1, 3, \vartheta) = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
A^{(1)} &= J(1, 3, \vartheta) \cdot A = \\
&= \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \sqrt{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 2\sqrt{2} \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\sqrt{2} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Βήμα 2 Προσδιόρισε τις παραμέτρους Givens c, s :

$$\begin{bmatrix} c & s \\ -s & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{22} \\ a_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} * \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$a_{22} = -1, a_{32} = -\frac{1}{\sqrt{2}}, c = -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, s = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\begin{aligned} A^{(2)} &= J(2, 3, \vartheta) \cdot A^{(1)} = \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{2} & \frac{3}{\sqrt{2}} & 2\sqrt{2} \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\sqrt{2} \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \sqrt{2} & \frac{3}{\sqrt{2}} & 2\sqrt{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} & \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 1.4142 & 2.1213 & 2.8284 \\ 0 & 1.2247 & 1.6330 \\ 0 & 0 & 0.5774 \end{bmatrix} = R \end{aligned}$$

με 4 ψηφία ακρίβειας.

Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} R &= A^{(2)} = J(2, 3, \vartheta) \cdot A^{(1)} = \\ &= \underbrace{J(2, 3, \vartheta)}_{Q_2} \cdot \underbrace{J(1, 3, \vartheta)J(1, 2, \vartheta)}_{Q_1} \cdot A \Rightarrow \\ &\quad \underbrace{\hspace{1.5cm}}_Q \\ R &= Q \cdot A \Rightarrow \boxed{A = Q^T \cdot R} \end{aligned}$$

Παρατήρηση. Αν $A \in \mathbb{R}^{m \times m}$ μη-ιδιάζων τότε η QR είναι “σχεδόν” μοναδική. Εάν οι διαγώνιοι είσοδοι του R είναι θετικές, τότε είναι ίδιες. Οι πίνακες Q, R που προκύπτουν από την παραγοντοποίηση με μετασχηματισμούς Givens διαφέρουν μόνο στα πρόσημα από αυτήν που προκύπτει με Householder. Πιο συγκεκριμένα στον παραπάνω πίνακα A αν εφαρμόσουμε μετασχηματισμούς Householder βλέπουμε ότι βρίσκουμε $A = Q_1 \cdot R_1$ όπου

$$Q_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0.8165 & 0.5774 \\ -0.7071 & 0.4082 & -0.5774 \\ -0.7071 & -0.4082 & 0.5774 \end{bmatrix} R_1 = \begin{bmatrix} -1.4142 & -2.1213 & -2.8284 \\ 0 & 1.2247 & 1.6330 \\ 0 & 0 & -0.5774 \end{bmatrix}$$

ενώ με Givens έχουμε $A = Q \cdot R$ όπου

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & 0.8165 & -0.5774 \\ 0.7071 & 0.4082 & 0.5774 \\ 0.7071 & -0.4082 & -0.5774 \end{bmatrix}$$

και R ο παραπάνω πίνακας. Βλέπουμε δηλαδή ότι $Q_1 = Q \cdot C$ και $R_1 = C \cdot R$ με

$$C = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Θεώρημα 1.9 (μοναδικότητα της QR παραγοντοποίησης). Αν $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ($m \geq n$) και έχει γραμμικά ανεξάρτητες στήλες, τότε υπάρχει μοναδικός $m \times n$ πίνακας Q με ορθοκανονικές στήλες και μοναδικός $n \times n$ άνω τριγωνικός πίνακας R με θετικά διαγώνια στοιχεία τέτοιος ώστε:

$$A = Q \cdot R$$

Παράδειγμα 1.10. Βρείτε παραγοντοποίηση QR του πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}$$

χρησιμοποιώντας τον αλγόριθμο της Gram-Schmidt.

Λύση. $k = 1$ $r_{11} = \|q_1\|_2 = \|a_1\|_2 = 6.4031$

$$q_1 = \frac{a_1}{r_{11}} = (0.1562, 0.3123, 0.9370)$$

$$r_{12} = q_1^T a_2 = q_1^T a_2 = 7.8087$$

$$q_2 \equiv q_2 - r_{12}q_1 = a_2 - r_{12}q_1 = \begin{bmatrix} 0.7805 \\ 0.5610 \\ -0.3171 \end{bmatrix}$$

$$k = 2$$
 $r_{22} = 1.0121$

$$q_2 \equiv \frac{q_2}{r_{22}} = (0.7711, 0.5543, -0.3133)^T$$

Συνεπώς

$$Q_1 = (q_1, q_2) = \begin{bmatrix} 0.1562 & 0.7711 \\ 0.3123 & 0.5543 \\ 0.9370 & -0.3133 \end{bmatrix}_{3 \times 2}$$

$$R_1 = \begin{bmatrix} 6.4031 & 7.8087 \\ 0 & 1.0121 \end{bmatrix}_{2 \times 2}$$

(Άσκηση) Επιβεβαιώστε ότι η skinny QR με τη χρήση του αλγορίθμου Householder δίνει:

$$Q = \begin{bmatrix} -0.1562 & -0.7711 & -0.6172 \\ -0.3123 & -0.5543 & 0.7715 \\ -0.9370 & 0.3133 & -0.5143 \end{bmatrix}_{3 \times 3}$$

1.2. ΤΡΟΠΟΠΟΙΗΜΕΝΗ ΜΕΘΟΔΟΣ GRAM-SCHMIDT VS ΚΛΑΣΙΚΗ GRAM-SCHMIDT13

και

$$R = \begin{bmatrix} -6.4031 & -7.8087 \\ 0 & -1.0121 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{3 \times 2}$$

όπου $A = (-Q) \cdot (-R) = Q_1 \cdot R_1$

1.2 Τροποποιημένη μέθοδος Gram-Schmidt vs Κλασική Gram-Schmidt

Η τροποποιημένη μέθοδος Gram-Schmidt (Modified Gram-Schmidt-MGS) και η κλασική Gram-Schmidt (Classical Gram-Schmidt-CGS) (μαθηματικά μιλώντας) είναι ισοδύναμες. Ωστόσο, όπως παρατηρήσαμε παραπάνω, οι αριθμητικές του ιδιότητες διαφέρουν. Για παράδειγμα, θεωρήστε τον υπολογισμό του q_2 με CGS, δεδομένου ότι q_1 με $\|q_1\|_2 = 1$. Έχουμε έτσι:

$$q_2 \equiv q_2 - r_{12}q_1 \text{ όπου } r_{12} = q_1^T a_2.$$

Μπορεί να αποδειχθεί ότι (Björck 1994b):

$$\|fl(q_2) - q_2\| < (1.06)(2m + 3) \underbrace{\mu}_{\approx u} \|a_2\|_2$$