0.1 Μια ιδέα της Γεωμετρικής Θεωρίας Ομάδων.

Το μεγάλο άλμα στη μελέτη των ομάδων έγινε όταν οι ομάδες θεωρήθηκαν ως "γεωμετρικά αντικείμενα" και άρχισαν να μελετώνται γεωμετρικές και τοπολογικές ιδιότητες αυτών των αντικειμένων με σκοπό την μελέτη αλγεβρικών ιδιοτήτων των ομάδων.

Φυσικά ισχύει και το αντίστροφο αλγεβρικές ιδιότητες των ομάδων προσδιορίζουν τα αντίστοιχα γεωμετρικά αντικείμενα.

Στα επόμενα θα πάρουμε μια απειροελάχιστη "γεύση" από αυτή την περιοχή μελέτης των ομάδων.

0.1.1 Προγεγγιστικές ιδιότητες Ομάδων.

Έστω ότι έχουμε μια κλάση, έστω $\mathcal{P}$, ομάδων π.χ. η $\mathcal{P}$ να είναι η κλάση των πεπερασμένων ομάδων, των πεπερασμένων p-ομάδων, των μηδενοδυνάμων ομάδων κ.λ.π. Υποθέτουμε ότι έχουμε μια ομάδα G, η οποία δεν ανήκει σε μια κλάση, αλλά θέλουμε να την μελετήσουμε με την "βοήθεια" ιδιοτήτων που έχουν ομάδες, οι οποίες ανήκουν σε κλάσεις, τις οποίες "γνωρίζουμε καλά".

Ορισμός 0.1.1. *Έστω $\mathcal{P}$ μια κλάση ομάδων και G μια τυχαία ομάδα. Θέτουμε $\mathcal{C}_{\mathcal{P}}(G) = \{G/N \mid G/N \in \mathcal{P}\}$. Δηλαδή το $\mathcal{C}_{\mathcal{P}}(G)$ δεν είναι τίποτε άλλο από το σύνολο όλων των πηλίκων της G, τα οποία έχουν την ιδιότητα $\mathcal{P}$.*

Η ομάδα G θα ονομάζεται **προσεγγιστικά $\mathcal{P}$ ομάδα** *($r\mathcal{P}$ ομάδα, αν για κάθε $1 \neq g \in G$ υπάρχει $G/N \in \mathcal{C}_{\mathcal{P}}(G)$ με $g \notin N$. Δηλαδή η εικόνα του g μέσω του επιμορφισμού $G \longrightarrow G/N$ δεν είναι τετριμμένη.*

Οπότε, από την κλάση $\mathcal{P}$, δημιουργείται μια άλλη κλάση ομάδων η $r\mathcal{P}$.

Προφανώς κάθε $\mathcal{P} \subseteq r\mathcal{P}$ με τον εγκλεισμό (σχεδόν) πάντα γνήσιο. Επομένως, το πρόβλημα που τίθεται είναι μια ομάδα G, η οποία δεν ανήκει στην $\mathcal{P}$, μήπως ανήκει στην $r\mathcal{P}$; Οπότε να προσπαθήσουμε να την μελετήσουμε "καταφεύγοντας" σε ιδιότητες που έχουν οι ομάδες που ανήκουν στην κλάση $\mathcal{P}$;

Πρόταση 0.1.2. *Έστω $\mathcal{P}$ μια κλάση ομάδων και G μια ομάδα. Η ομάδα G είναι $r\mathcal{P}$ αν και μόνο αν η $\bigcap\{\, N \mid N \lhd G \text{ με } G/N \in \mathcal{P}\,\} = 1$.*

Απόδειξη. Προφανής.

□

Παραδείγματα 0.1.3.

1. *Κάθε πεπερασμένα γεννώμενη αβελιανή ομάδα είναι προσεγγιστικά πεπερασμένη (rf).*

   Υπάρχουν πάρα πολλοί τρόποι για να το αποδείξουμε.

   Θα ακολουθήσουμε έναν τρόπο, ο οποίος μας θα μας φανεί χρήσιμος στα επόμενα.

   Πρώτον, κάθε άπειρη κυκλική ομάδα είναι rf (γιατί;;).

   Δεύτερον, κάθε πεπερασμένα γεννώμενη αβελιανή ομάδα είναι της μορφής $G = (\oplus_{i=1}^{n}\langle a_i \rangle) \oplus T$, όπου οι $\langle a_i \rangle$ είναι άπειρες κυκλικές και T πεπερασμένη. Έστω ένα μη τεριμμένο $g = a_1^{k_1}, a_2^{k_2} \cdots a_n^{k_n} \cdot s$ με το $s \in T$. Αν όλα τα $k_i = 0$, τότε $g = s \in T$ και έχουμε τελειώσει (γιατί;;). Μα αφού το T είναι πεπερασμένο πηλίκο της G. Αν κάποιο $k_i \neq 0$ τότε έχουμε τον επιμορφισμό $\varphi_i : G \longrightarrow \langle a_i \rangle$ με $\varphi_i(g) = a_i^{k_i} \neq 1$. Η $\langle a_i \rangle$ είναι άπειρη κυκλική, άρα rf, οπότε, υπάρχει $\vartheta : \langle a_i \rangle \longrightarrow \Phi$ με Φ πεπερασμένη και $\vartheta(a_i^{k_i}) \neq 1$. Οπότε η σύνθεση των δύο ομομορφισμών μας δίνει την απάντηση.

2. *Η ελεύθερη ομάδα F είναι προσεγγιστικά επιλύσιμη.*

   Έστω $F = F^{(0} \rhd F^{(1)} = F' \rhd F^{(2)} \rhd \cdots$ η παράγωγος σειρά. Τότε πληρούνται οι όροι του επομέμου Λήμματος και τέλος, από την προηγουμένη πρόταση.

Λήμμα 0.1.4. *Έστω F ελεύθερη ομάδα και $F = F_0 \geq F_1 \geq F_2 \geq \cdots$ μια ακολουθία υποομάδων, όπου κάθε μια είναι γνήσια και χαρακτηριστική υποομάδα της προηγουμένης. Τότε η $\bigcap_{i=1}^{\infty} F_i = 1$.*

Απόδειξη. Η ιδέα της απόδειξης είναι απλή. Κάθε σύνολο γεννητόρων μιας ομάδας μέσω ενός αυτομορφισμού απεικονίζεται σε ένα συνολο γεννητόρων. Επειδή η F είναι ελεύθερη κάθε 1-1 και επί απεικόνιση μεταξύ δύο συνόλων γεννητόρων της επεκτείνεται σε αυτομορφισμό. Άρα αν έχουμε έναν γεννήτορα ενός όρου F_i να ανήκει στον F_{i+1}, τότε ο F_{i+1} θα περιείχε όλους τους γεννήτορες της F_i άτοπο. Επομένως δεν υπάρχει μη τετριμμένο στοιχείο που να ανήκει στην τομή $\bigcap_{i=1}^{\infty} F_i = 1$.

□

Όπως είδαμε μια ελεύθερη ομάδα είναι προσεγγιστικά επιλύσιμη, πιο κάτω θα δούμε ότι είναι προσεγγιστικά πεπερασμένη και προσεγγιστικά μηδενοδύναμη. Οι διότητες αυτές δεν "κληρονομούνται" στα πηλίκα. Δηλαδή γενικά το πηλίκο μιας $r\mathcal{P}$ ομάδας δεν είναι κατ' ανάγκη $r\mathcal{P}$. Πράγματι, αν ίσχυε αυτό, τότε θα μέναμε "άνευ αντικειμένου μελέτης", δεδομένου ότι κάθε ομάδα είναι πηλίκο μιας ελεύθερης ομάδας.

Αν η κλάση $\mathcal{P}$ είναι κλειστή ως προς τις υποομάδες, δηλαδή κάθε υποομάδα μιας ομάδας που ανήκει στην $\mathcal{P}$ ανήκει και αυτή στην $\mathcal{P}$, τότε μπορούμε να αποδείξουμε την εξής:

Πρόταση 0.1.5. *Έστω μια κλάση ομάδων $\mathcal{P}$, η οποία είναι κλειστή ως προς τις υποομάδες. Τότε κάθε υποομάδα μια $r\mathcal{P}$ ομάδας είναι και αυτή $r\mathcal{P}$.*

Απόδειξη. Έστω G μια $r\mathcal{P}$ ομάδα, από την Πρόταση 0.1.2 έχουμε ότι $\bigcap\{\, N \mid N \lhd G$ με $G/N \in \mathcal{P}\,\} = 1$. Αν H είναι μια υποομάδα της G, τότε για κάθε N κανονική υποομάδα της G με την ιδιότητα $G/N \in \mathcal{P}$ έχουμε $H/H\cap N \approx HN/N \leq G/N \in \mathcal{P}$ και τέλος (γιατί;;).

□

Επειδή τώρα οι υποομάδες πεπερασμένων, επιλυσίμων, μηδενοδυνάμων κ.λ.π. είναι πεπερασμένες, επιλύσιμες, μηδενοδύναμες.... Έχουμε το σχετικό Πόρισμα......

Πρόταση 0.1.6. *Έστω δύο κλάσεις ομάδων $\mathbb{P}$ και $\mathcal{R}$. Υποθέτουμε ότι κάθε ομάδα $G \in \mathbb{P}$ έχει την ιδιότητα να είναι $r\mathcal{R}$, τότε κάθε ομάδα, η οποία είναι $r\mathcal{P}$ είναι και $r\mathcal{R}$.*

Φορμαλιστικά: $(G \in \mathbb{P} \Rightarrow G \in r\mathcal{R}) \Rightarrow (G \in r\mathbb{P} \Rightarrow G \in r\mathcal{R})$.

Απόδειξη. Έστω G ομάδα η οποία είναι $r\mathbb{P}$ και ένα $1 \neq g \in G$, τότε, από τον ορισμό, υπάρχει $N \lhd G$ με $g \notin N$ και $G/N \in \mathbb{P}$. Τώρα από την υπόθεση έχουμε ότι $G/N \in r\mathbb{R}$, αυτό σημαίνει, από τον ορισμό, ότι υπάρχει $M/N \lhd G/N$ με $gN \notin M/N$ και $(G/N)/(M/N) \in \mathbb{R}$, δηλαδή $G/M \in \mathbb{R}$ και $g \notin M$. Συνεπώς $G \in r\mathcal{R}$.

□

Παράδειγμα: Είδαμε ότι οι πεπερασμένα γεννώμενες αβελιανές ομάδες είναι προσεγγιστικά πεπερασμένες. Άρα πεπερασμένα γεννώμενες προσεγγιστικά αβελιανές ομάδες είναι προσεγγιστικά πεπερασμένες.

Πόρισμα 0.1.7. *Έστω $\mathbb{P}$ μια κλάση ομάδων. Τότε ισχύει $r\mathbb{P} = r(r\mathbb{P})$.*

Προσεγγιστικά πεπερασμένες ομάδες.

Εδώ θα επικεντρωθούμε στις προσεγγιστικά πεπερασμένες ομάδες.

Πρώτα απ' όλα ένας ισοδύναμος ορισμός

Πρόταση 0.1.8. */Άσκηση:*

Έστω G ομάδα. Να αποδείξετε την ισοδυναμία των παρακάτω προτάσεων.

i) $\bigcap\{\, H \mid H \leq_f G \,\} = 1$.

ii) Για κάθε $g \in G$ υπάρχει M_g πεπερασμένη ομάδα και $\varphi : G \longrightarrow M_g$ ομομορφισμός έτσι ώστε $\varphi(g) \neq 1$.

iii) Για κάθε $g \in G$ υπάρχει $H_g leq_f G$ έτσι ώστε $g \notin H_g$.

Πριν προχωρήσουμε ένα κλασσικό παράδειγμα μη προσεγγιστικά πεπερασμένης ομάδας.

Ας ξεκινήσουμε με ένα απλό ερώτημα. Στην προσθετική ομάδα των ρητών $\mathbb{Q}$ για κάθε γνήσια μη τετριμμένη υποομάδα H, στο πηλίκο $\mathbb{Q}/H$ κάθε στοιχείο είναι πεπερασμένης τάξης, αλλά η ομάδα $\mathbb{Q}/H$ είναι άπειρη.

Ένα άλλο απλό ερώτημα. Στην προσθετική ομάδα των ρητών $\mathbb{Q}$ υπάρχουν $H, K \leq \mathbb{Q}$ μη τεριμμένες, ώστε $H \cap K = 0$. Προφανώς όχι (γιατί;;).

Ας δούμε και ένα άλλο (δυϊκό) ερώτημα. Στην προσθετική ομάδα των ρητών $\mathbb{Q}$ υπάρχει $\mathrm{H} \leq \mathbb{Q}$ γνήσια ώστε να είναι πεπερασμένου δείκτη; Προφανώς όχι (γιατί;;;).

Συμπέρασμα: Η προσθετική ομάδα των ρητών $\mathbb{Q}$ δεν είναι rf.

Υπάρχουν πολλές αποδείξεις ότι οι ελεύθερες ομάδες είναι rf. Θα δώσουμε μια έμμεση απόδειξη.

Πρόταση 0.1.9. *Έστω G μια πεπερασμένα γεννώμενη ομάδα, η οποία είναι rf. Τότε η ομάδα αυτομορφισμών της είναι rf.*

Απόδειξη. Η απόδειξη είναι μια σειρά και στηρίζεται σε δύο γνωστά λήμματα.

Έστω φ ένας μη τετριμμένος αυτομορφισμός της G, τότε υπάρχει ένα $g \in G$ με $\varphi(g) \neq g$, δηλαδή το $r = g^{-1}\varphi(g) \neq 1$.

Η ομάδα G έχει υποτεθεί rf, συνεπώς υπάρχει $N \lhd G$ πεπερασμένου δείκτη, με $r \notin N$.

Η ομάδα G έχει υποτεθεί πεπερασμένα γεννώμενη, επομένως υπάρχει (από το Λήμμα 1) M χαρακτηριστική υποοομάδα πεπερασμένου δείκτη στην G με $r \notin M$.

Επειδή η M είναι χαρακτηριστική ο αυτομορφισμός φ επάγει έναν αυτομορφισμό $\bar{\varphi}$ στο πεπερασμένο πηλίκο G/M μάλιστα δέ $\bar{\varphi}(rM) \neq rM$ (από το Λήμμα 2). Επειδή η G/M είναι πεπερασμένη η $Aut(G/M)$ είναι πεπερασμένη και τέλος.

□

Λήμμα 0.1.10. *Λήμμα 1. Έστω G μια πεπερασμενα γεννώμενη ομάδα, τοτε για κάθε n θετικό ακέραιο υπάρχουν πεπερασμένο το πλήθος υποομάδες της G με δείκτη τον δεδομένο n.*

Κατά συνέπεια, αν G περιέχει υποομάδες πεπερασμένου δείκτη, τότε περιέχει χαρακτηριστικές υποομάδες πεπερασμενου δείκτη.

Λήμμα 0.1.11. *Λήμμα 2. Έστω G μια ομάδα και M μια χαρακτηριστική υποομάδα της, τότε για κάθε ορίζεται ένας ομομορφισμός ομάδων $Aut(G) \longrightarrow Aut(G/M)$ με $\varphi \longrightarrow \bar{\varphi}$, όπου ο $\bar{\varphi}$ ορίζεται ως εξής: $\bar{\varphi}(gM) = \varphi(g)M$.*

Το πρώτο Λήμμα το είχαμε αποδείξει στην αρχή των μαθημάτων. Το δεύτερο, αν δεν το έχετε ξανασυναντήσει, να το αποδείξετε.

Θεώρημα 0.1.12. *Οι ελεύθερες ομάδες είναι προσεγγιστικά πεπερασμένες.*

Απόδειξη. Έστω F μια ελεύθερη ομάδα. Υποθέτουμε στην αρχή ότι είναι πεπερασμένα γεννώμενη.

Πέρνουμε το πηλίκο $G = F/\gamma_2(F)$, το οποίο είναι μια πεπερασμένα γεννώμενη ελεύθερη αβελιανή ομάδα. Επομένως από το πρώτο παράδειγμα είναι προσεγγιστικά πεπερασμένη. Συνεπώς (από την προηγουμένη προταση), η ομάδα αυτομορφισμών της $Aut(G) \approx GL(n, \mathbb{Z})$ είναι προσεγγιστικά πεπερασμένη.

Όταν πρωτομιλήσαμε για ελεύθερες ομάδες είχαμε δεί ένα παράδειγμα ελεύθερης ομάδας με στοιχεία πίνακες. Εκεί η ελεύθερη ομάδα ήταν διάστασης 2, όμως, από τον τρόπο κατασκευής, μπορούμε να δούμε ότι μπορούμε να κατασκευάσουμε ελεύθερες ομάδες οποιασδήποτε πεπερασμένης διάστασης n, οι οποίες να είναι υποομάδες της $Aut(G) \approx GL(n, \mathbb{Z})$, η οποία, μόλις αποδειξαμε ότι, είναι προσεγγιστικά πεπερασμένη. Τέλος.

Έστω τώρα η F είναι απείρως παραγώμενη από ένα σύνολο X. Αν $1 \neq w \in F$, τότε αυτό γράφεται ως μια ανηγμένη λέξη στοιχείων του X. Στην ανηγμένη αυτή γραφή εμφανίζονται πεπερασμένο το πλήθος χαρακτήρες. Έστω S το πεπερασμένο υποσύνολο του X, το οποίο περιέχει τους χαρακτήρες που εμφανίζονται στη λέξη w. Τότε πέρνουμε την κανονική υποομάδα υποομάδα την παραγόμενη από το $X \quad S$, $\mathrm{N} = \langle X \quad S \rangle$.

Το πηλίκο F/N είναι προφανώς(;;) η πεπερασμένα γεννώμενη ελεύθερη ομάδα η παραγώμενη από το S. Στο πηλίκο αυτό η εικόνα wN της w δεν είναι τεριμμένη ....και συνεχίζουμε.

$\square$

Το κρίσιμο στοιχείο στην όλη υπόθεση είναι ότι στο Λήμμα 1 η υπόθεση η ομάδα μας να είναι πεπερασμένα γεννώμμενη ήταν κρίσιμη.

Ως "αντίκτυπο" αυτής της αναγκαίας συνθήκης θα δούμε το εξής:

Αν και μια ελεύθερη ομάδας απείρου διαστάσεως είναι rf η αντίστοιχη ομάδα αυτομορφισμών της δεν είναι rf.

Πράγματι, έστω F ελεύθερη ομάδα επί ενός απείρου αριθμησίμου συνόλου $X\{x_1, x_2, ...\}$. Κάθε μετάθεση των στοιχείων του X ορίζει αυτομορφισμό της F (δεν ξεχνάμε την καθολική ιδιότητα της F). Συνεπώς $S_X \leq AuT(F)$. Η S_X περιέχει άπειρες απλές ομάδες, οι οποίες δεν είναι προσεγγιστικά πεπερασμένες, άρα η $Aut(F)$ δεν είναι προσεγγιστικά πεπερασμένη.