Ασκήσεις Β

1. Έστω G ομάδα και X μια κλάση συζυγίας (μη τετριμένων) στοιχείων της G. με την ιδιότητα

   (α′) Δείξτε ότι $\langle X \rangle \lhd G$.

   (β′) Έστω $\vartheta \in Aut(G)$. Δείξτε ότι το $\vartheta(X)$ είναι μια κλάση συζυγίας της G.

   (γ′) Αν επιπλέον υποθέσουμε ότι η G είναι πεπερασμένη μη αβελιανή απλή ομάδα και ότι για κάθε άλλη κλάση συζυγίας Y της G είτε $\mid Y \mid \neq \mid X \mid$, είτε τα στοιχεία των X και Y έχουν διαφορετικές τάξεις, δείξτε ότι η ομάδα $Aut(G)$ εμφυτεύεται στην S_X.

   Το τελευταίο ερώτημα είναι *φορτωμένο* με πολλές υποθέσεις. Παρ' όλα ταύτα το συμπέρασμα έχει την σημασία του.

2. Μια ομάδα G ονομάζεται **τέλεια** αν δεν υπάρχει μη τετριμένη γνήσια κανονική υποομάδα της, έστω K, με το πηλίκο G/K να είναι αβελινή ομάδα.

   Έστω G τέλεια ομάδα και K κυκλική κανονική υποομάδα της. Δείξτε ότι $K \leq Z(G)$.

3. Έστω G πεπερασμένη ομάδα και p ο μικρότερος πρώτος διαιρέτης της τάξης της G. Υποθέτουμε ότι K είναι μια κανονική υποομάδα της G τάξης p. Δείξτε ότι $K \leq Z(G)$.

4. Έστω G ομάδα και $x \in G$ με την ιδιότητα $C_G(x) \lhd G$. Δείξτε ότι υπάρχει αβελιανή κανονική υποομάδα της G, στην οποία περιέχεται το x. Δείξτε (με ένα αντιπαράδειγμα), ότι το αντίστροφο δεν ισχύει.

5. Δείξτε ότι μια ομάδα G είναι ισόμορφη με την άπειρη διεδρική D_∞ αν και μόνο αν έχει μια γνήσια υπομομάδα H, η οποία είναι άπειρη κυκλική ($H = \langle h \rangle$) και $C_G(h^n) = H$, για κάθε θετικό ακέραιο n.

   (Υποτίθεται ότι γνωρίζουμε στοιχειωδώς την άπειρη διεδρική όμάδα.

6. Έστω p ένας περιττός πρώτος.

   (i) Δείξτε ότι η πολλαπλασιατική ομάδα $U(\mathbb{Z}_p)$ περιέχει ακριβώς ένα στοιχείο τάξης 2.

   (ii) Δείξτε ότι μια ομάδα G τάξης $2p$ είναι είτε κυκλική, είτε ισόμορφη με την διεδρική D_{2p}.

7. Έστω G ομάδα και $Inn(G)$ η ομάδα των εσωτερικών αυτομορφισμών της. Δείξτε ότι ένας αυτομορφισμός φ της G ανήκει στην $C_{Aut(G)}(Inn(G))$ αν και μόνο αν $\varphi(g) \cdot g^{-1} \in Z(G)$ για κάθε $g \in G$.

   Ένας τέτοιος αυτομορφισμός ονομάζεται **κεντρικός** αυτομορφισμός.

   Αποδείξτε ότι αν $Z(G) = 1$ τότε $Z(Aut(G)) = 1$.

   Ισχύει το αντίστροφο;

8. Έστω K μια πεπερασμένη κανονική υποομάδα της ομάδας G και P μια κανονική p-Sylow υποομάδα της K. Δείξτε ότι η P είναι κανονική στην G.

9. Έστω G πεπερασμένη ομάδα και $H \leq G$. Αν P_0 είναι μια p-Sylow υποομάδα της H και P μια p-Sylow υποομάδα της G με $P_0 \leq P$, δείξτε ότι $P_0 = P \cap H$.

10. Έστω G πεπερασμένη ομάδα και H, K κανονικές υποομάδες της G. Αν P είναι μια p-Sylow υποομάδα της G, δείξτε ότι $(PH) \cap (PK) = P(H \cap K)$.

11. Έστω G πεπερασμένη ομάδα και H, K υποομάδες της G έτσι ώστε $G = HK$. Δείξτε ότι αν και οι δύο υποομάδες H και K είναι κανονικές στην G, τότε για κάθε P p-Sylow υποομάδα της G ισχύει $P = (P \cap H)(P \cap K)$.

    Δείξτε, με ένα αντιπαράδειγμα, ότι αν δεν είναι και οι δύο κανονικές υποομάδες, τότε το συμπέρασμα δεν ισχύει.

    Παρ' όλα ταύτα δείξτε ότι υπάρχει τουλάχιστον μια P p-Sylow υποομάδα της G ώστε να ισχύει $P = (P \cap H)(P \cap K)$.

    Υπόδειξη: Χρησιμοποιείστε την προ-προηγούμενη άσκηση.

12. Υποθέτουμε ότι η ομάδα G έχει τις κανονικές υποομάδες L, J, H με $L < J < H$ και $\mid H/J \mid = p$, $\mid J/L \mid = q$, όπου p, q πρώτοι με $p > q$. Δείξτε ότι υπάρχει K κανονική υποομάδα της G με $L < K < H$ και $\mid H/K \mid = q$, $\mid K/L \mid = p$.

13. Δείξτε ότι κάθε ομάδα G τάξης 255 είναι κυκλική.