Συνδυαστική Θεωρία

Χ.Α. Αθανασιάδης
caath@math.uoa.gr
users.uoa.gr/~caath

Ηλεκτρονική Τάξη

eclass.uoa.gr/courses/MATH675/

Βιβλιογραφία - Πληροφορίες:

users.uoa.gr/~caath/actheory.html

Βαθμολόγηση

κατ' οίκον εργασίες

1. Απαρίθμηση και Γεννήτριες Συναρτήσεις

Ενδιαφερόμαστε να υπολογίσουμε το πλήθος, έστω a_n, των στοιχείων ενός συνόλου A_n, για κάθε $n \in \mathbb{N} := \{0, 1, 2, \dots\}$.

Παράδειγμα 1.1. Αν a_n είναι το πλήθος των υποσυνόλων του

$$[n] := \{1, 2, \dots, n\},$$

τότε $a_n = 2^n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Πράγματι, έστω $A_n = 2^{[n]}$ το σύνολο όλων των υποσυνόλων (δυναμοσύνολο) του $[n]$ και έστω

- $B_n = \{0,1\}^n$
  $= \{0,1\} \times \{0,1\} \times \cdots \times \{0,1\}$
  $= \{(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n) : \varepsilon_i \in \{0,1\}\}$.

Π.χ.

- $A_2 = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$
- $B_2 = \{(0,0), (0,1), (1,0), (1,1)\}$.

Προφανώς, $\# B_n = 2^n$. Θεωρούμε την απεικόνιση

$$\varphi_n : A_n \to B_n$$

που ορίζεται θέτοντας

$$\varphi_n(S) = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)$$

για $S \subseteq [n]$, όπου

$$\varepsilon_i = \begin{cases} 1, & \text{αν } i \in S \\ 0, & \text{αν } i \notin S \end{cases}$$

για $i \in [n]$. Π.χ. για $n=5$ και $S = \{2,3,5\}$ έχουμε $\varphi_n(S) = (0,1,1,0,1)$.

Παρατηρούμε ότι η $\varphi_n : A_n \to B_n$ είναι αμφιμονοσήμαντη (1-1 και επί) με αντίστροφη την $\psi_n : B_n \to A_n$ για την οποία

$$\psi_n(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n) = \{ i \in [n] : \varepsilon_i = 1 \}$$

για $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n \in \{0,1\}$. π.χ. για $n=2$,

- $\psi_2(0,0) = \emptyset$
- $\psi_2(0,1) = \{2\}$
- $\psi_2(1,0) = \{1\}$
- $\psi_2(1,1) = \{1,2\}$.

Από την ακόλουθη πρόταση έπεται ότι $\# A_n = \# B_n = 2^n$ για $n \in \mathbb{N}$. ■

Πρόταση 1.2. Αν $\varphi : X \to Y$ είναι αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση πεπερασμένων συνόλων, τότε

$$\# X = \# Y.$$

Παράδειγμα 1.3. Αναδιάταξη του $[n]$ λέγεται κάθε ακολουθία $(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$ στην οποία κάθε στοιχείο του $[n]$ εμφανίζεται ακριβώς μία φορά.

Έστω a_n το πλήθος των αναδιατάξεων του $[n]$. Θα δείξουμε ότι $a_n = n!$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Έστω A_n το σύνολο των αναδιατάξεων του $[n]$ και για $n \geq 1$, έστω

$$f : A_n \to A_{n-1}$$

η απεικόνιση για την οποία η $f(\sigma)$ είναι η ακολουθία που προκύπτει από τη $\sigma \in A_n$ διαγράφοντας τον όρο n. π.χ.

- $A_3 = \{(1,2,3), (1,3,2), (2,1,3), (2,3,1),$
  $(3,1,2), (3,2,1)\}$

και

- $f(1,2,3) = f(1,3,2) = f(3,1,2) = (1,2)$
- $f(2,1,3) = f(2,3,1) = f(3,2,1) = (2,1)$.

Παρατηρούμε ότι για κάθε $\tau \in A_{n-1}$ υπάρχουν ακριβώς n σε πλήθος $\sigma \in A_n$ τέτοιες ώστε $f(\sigma) = \tau$, δηλαδή ότι

$$\# f^{-1}(\{\tau\}) = n.$$

Από αυτό και την ακόλουθη πρόταση έπεται ότι

$$a_n = \# A_n = n(\# A_{n-1}) = n a_{n-1}$$

από όπου ο τύπος $a_n = n!$ προκύπτει άμεσα με επαγωγή στο n.

Πρόταση 1.4. Έστω $m \in \mathbb{N}$. Αν $f : X \to Y$ είναι απεικόνιση πεπερασμένων συνόλων και

$$\# \{ x \in X : f(x) = y \} = m$$

για κάθε $y \in Y$, τότε $\# X = m(\# Y)$.

■

Άσκηση 1.5. Έστω A_n το σύνολο των αναδιατάξεων του $[n]$, όπως στο Παράδειγμα 1.3. Βρείτε μία αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση

$$\varphi : A_n \to [1] \times [2] \times \cdots \times [n].$$

Παράδειγμα 1.6. Έστω a_n το πλήθος των υποσυνόλων του $[n]$ που **δεν** περιέχουν δύο διαδοχικούς ακεραίους. Έτσι, $a_0 = 1$, $a_1 = 2$, $a_2 = 3$, $a_3 = 5$, $a_4 = 8$. Π.χ. για $n=4$ έχουμε τα οκτώ υποσύνολα

- $\emptyset$, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{4\}$, $\{1,3\}$, $\{1,4\}$, $\{2,4\}$

του $\{1,2,3,4\}$ που δεν περιέχουν δύο διαδοχικούς ακεραίους.

Υπάρχουν

- a_{n-1} τέτοια υποσύνολα $S \subseteq [n]$ με $n \notin S$
- a_{n-2} τέτοια υποσύνολα $S \subseteq [n]$ με $n \in S$

και συνεπώς

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \qquad (1.1)$$

για $n \geq 2$, όπου $a_0 = 1$, $a_1 = 2$. ■

Χρήσιμο εργαλείο σε τέτοιες περιστάσεις αποτελεί η έννοια της γεννήτριας συνάρτησης.

Ορισμός 1.7. Δίνεται ακολουθία $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ μιγαδικών αριθμών. Η τυπική δυναμοσειρά

$$\sum_{n \geq 0} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$$

λέγεται (συνήθης) γεννήτρια συνάρτηση της (a_n). Η

$$\sum_{n\geq 0} a_n \frac{x^n}{n!} = a_0 + a_1 x + a_2 \frac{x^2}{2!} + \cdots$$

λέγεται εκθετική γεννήτρια συνάρτηση της (a_n).

Π.χ. για τις (a_n) και (b_n) με

- $a_n = 2^n$
- $b_n = n!$

για $n \in \mathbb{N}$ έχουμε

- $\displaystyle\sum_{n\geq 0} a_n x^n = \sum_{n\geq 0} (2x)^n = \frac{1}{1-2x}$
- $\displaystyle\sum_{n\geq 0} b_n \frac{x^n}{n!} = \sum_{n\geq 0} x^n = \frac{1}{1-x}$.

Έστω τώρα η ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ του Παραδείγματος 1.6, οπότε $a_0=1$, $a_1=2$ και

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \qquad (1.1)$$

για $n \geq 2$. Θέτοντας

- $$F(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n =$$
$$= 1 + 2x + 3x^2 + 5x^3 + 8x^4 + \cdots$$

υπολογίζουμε ότι

- $$F(x) = a_0 + a_1 x + \sum_{n\geq 2} a_n x^n$$

$$= 1 + 2x + \sum_{n \geq 2} (a_{n-1} + a_{n-2}) x^n$$

$$= 1 + 2x + x \sum_{n \geq 2} a_{n-1} x^{n-1}$$

$$+ x^2 \sum_{n \geq 2} a_{n-2} x^{n-2}$$

$$= 1 + 2x + x (F(x) - 1) + x^2 F(x)$$

$$= 1 + x + (x + x^2) F(x)$$

από όπου προκύπτει ο τύπος

$$F(x) = \frac{1+x}{1-x-x^2}. \qquad (1.2)$$

Χρησιμοποιούμε την παραγοντο-
ποίηση

$$1-x-x^2=(1-\tau x)(1-\bar{\tau}x),$$

όπου

$$\tau=\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \quad \bar{\tau}=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

και διασπούμε το δεξιό μέλος της (1.2) όπως στον απειροστικό λογισμό. Βρίσκουμε ότι

$$F(x)=\frac{1+x}{(1-\tau x)(1-\bar{\tau}x)}=\frac{\alpha}{1-\tau x}+\frac{\beta}{1-\bar{\tau}x}$$

όπου $\alpha=\tau^2/\sqrt{5}$ και $\beta=-\bar{\tau}^2/\sqrt{5}$.

Αναπτύσσοντας

- $$\frac{1}{1-\tau x} = \sum_{n\geq 0} \tau^n x^n$$

- $$\frac{1}{1-\bar{\tau} x} = \sum_{n\geq 0} \bar{\tau}^n x^n$$

καταλήγουμε στον τύπο

- $$F(x) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\sum_{n\geq 0} \tau^{n+2} x^n - \sum_{n\geq 0} \bar{\tau}^{n+2} x^n\right)$$

$$= \sum_{n\geq 0} \frac{\tau^{n+2} - \bar{\tau}^{n+2}}{\sqrt{5}} x^n$$

και συμπεραίνουμε ότι

$$a_n = \frac{\tau^{n+2} - \bar{\tau}^{n+2}}{\sqrt{5}} \qquad (1.3)$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αφού $|\bar{\tau}| < 1$, προκύπτει ο ασυμπτωτικός τύπος

$$a_n \sim \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n$$

για $n \to \infty$. ■

Παράδειγμα 1.8. Ας βρούμε έναν τύπο για το γενικό όρο της ακολουθίας (a_n) που ορίζεται αναδρομικά από τις $a_0 = 1$ και

$$\sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k} = 1 \qquad (1.4)$$

για $n \geq 1$. Θέτουμε

$$F(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$$

και βρίσκουμε ότι

- $$(F(x))^2 = (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots)\cdot (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots)$$
  $$= a_0^2 + (a_0 a_1 + a_1 a_0)x + (a_0 a_2 + a_1^2 + a_2 a_0)x^2 + \cdots$$

$$= \sum_{n \geq 0} (a_0 a_n + a_1 a_{n-1} + \cdots + a_n a_0) x^n$$

$$= \sum_{n \geq 0} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k} \right) x^n$$

$$\overset{(1.4)}{=\!=} \sum_{n \geq 0} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$$

$$= 1/(1-x)$$

οπότε

- $F(x) = \sqrt{1/(1-x)} = (1-x)^{-1/2}$.

Από το Διωνυμικό θεώρημα

$$(1+x)^{\alpha} = \sum_{n\geq 0} \binom{\alpha}{n} x^n,$$

όπου

- $$\binom{\alpha}{n} = \begin{cases} 1, & n=0 \\ \dfrac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}, & n\geq 1 \end{cases}$$

προκύπτει ότι

$$F(x) = \sum_{n\geq 0} \binom{-1/2}{n} (-x)^n$$

και συνεπώς ότι

- $$a_n = (-1)^n \binom{-1/2}{n}$$

$$= \frac{(-1)^n}{n!} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\cdots\left(-\frac{2n-1}{2}\right)$$

$$= \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2^n \cdot n!}$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$. ∎

2. Τυπικές Δυναμοσειρές

Συμβολίζουμε με $\mathbb{C}[[x]]$ το σύνολο

$$\left\{ \sum_{n \geq 0} a_n x^n : a_n \in \mathbb{C} \right\}$$

των τυπικών δυναμοσειρών με συντελεστές $a_n \in \mathbb{C}$. Εξ' ορισμού, στο

$\mathbb{C}[[x]]$

- $\sum_{n\geq 0} a_n x^n = \sum_{n\geq 0} b_n x^n \iff$

$\iff a_n = b_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Γράφουμε

- $a_n = [x^n]\ F(x)$
- $a_0 = F(0)$ (σταθερός όρος της $F(x)$)

αν $F(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n \in \mathbb{C}[[x]]$.

Στο σύνολο $\mathbb{C}[[x]]$ ορίζουμε πρό-

σθεση και πολλαπλασιασμό θέτο-
ντας

- $\left(\sum_{n\geq 0} a_n x^n\right) + \left(\sum_{n\geq 0} b_n x^n\right) =$

$$= \sum_{n\geq 0} (a_n + b_n)\, x^n$$

- $\left(\sum_{n\geq 0} a_n x^n\right)\left(\sum_{n\geq 0} b_n x^n\right) =$

$$= a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0)\, x + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0)\, x^2 + \cdots$$

$$= \sum_{n\geq 0} c_n x^n,$$

όπου

- $c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0$

$$= \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$$

για $n \in \mathbb{N}$. π.χ. αν

- $F(x) = \sum_{n \geq 0} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots$

- $G(x) = \sum_{n \geq 0} (n+1) x^n = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots$

τότε

- $F(x) + G(x) = 2 + 3x + 4x^2 + \cdots$
- $F(x) G(x) = 1 + 3x + 6x^2 + \cdots$

Με τις πράξεις αυτές το $\mathbb{C}[[x]]$ καθίσταται μεταθετικός δακτύλιος με μηδενικό στοιχείο και μονάδα

- $0 = 0 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 + \dots$
- $1 = 1 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 + \dots$

Η $F(x) \in \mathbb{C}[[x]]$ είναι αντιστρέψιμο στοιχείο του $\mathbb{C}[[x]]$ αν υπάρχει $G(x) \in \mathbb{C}[[x]]$ τέτοια ώστε $F(x)G(x) = 1$. Τότε, γράφουμε

$$G(x) = (F(x))^{-1} = \frac{1}{F(x)}.$$

Π.χ. για $a \in \mathbb{C}$,

- $$\sum_{n\geq 0} \alpha^n x^n = 1 + \alpha x + \alpha^2 x^2 + \cdots$$
$$= \frac{1}{1-\alpha x} \qquad (2.1)$$

διότι

- $$(1-\alpha x)\cdot(1+\alpha x+\alpha^2x^2+\cdots)$$
$$= 1 + (\alpha-\alpha)x + (\alpha^2 - \alpha\cdot\alpha)x^2 + \cdots = 1$$

στο $\mathbb{C}[[x]]$.

Πρόταση 2.1. Η $F(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n \in \mathbb{C}[[x]]$ είναι αντιστρέψιμη εάνν $a_0 \neq 0$ (δηλαδή $F(0)\neq 0$).

Απόδειξη. Για $G(x) = \sum_{n\geq 0} b_n x^n \in \mathbb{C}[[x]]$ έχουμε

- $F(x)G(x) = 1 \iff$

$$\iff a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0 = \begin{cases} 1, & n=0 \\ 0, & n\geq 1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a_0 b_0 = 1 \\ a_0 b_1 + a_1 b_0 = 0 \\ a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0 = 0 \\ \vdots \end{cases} \qquad (2.2)$$

Επομένως, η $F(x)$ είναι αντιστρέψιμη στο $\mathbb{C}[[x]]$ εάνν το σύστημα (2.2) με αγνώστους $b_0, b_1, b_2, \ldots$

έχει λύση. Αυτό συμβαίνει εάνν $a_0 \neq 0$ αφού $a_0 b_0 = 1 \Rightarrow a_0 \neq 0$ και αντιστρόφως, αν $a_0 \neq 0$, τότε το (2.2) έχει μοναδική λύση

$$\begin{cases} b_0 = 1/a_0 \\ b_1 = -a_1 b_0 / a_0 \\ b_2 = -(a_1 b_1 + a_2 b_0)/a_0 \\ \qquad \vdots \end{cases}$$

■

Πρόταση 2.1. Για $F(x), G(x) \in \mathbb{C}[[x]]$ έχουμε

$$F(x)G(x) = 0 \iff F(x) = 0 \text{ ή } G(x) = 0.$$

Απόδειξη. Έστω ότι $F(x), G(x) \neq 0$ και έστω $H(x) = F(x)G(x)$. Θα δείξουμε ότι $H(x) \neq 0$. Παρατηρούμε ότι $H(0) = F(0)G(0)$. Άρα, αν $F(0), G(0) \neq 0$, τότε $H(0) \neq 0$.

Στη γενική περίπτωση έχουμε

$$\begin{cases} F(x) = x^m F_0(x) \\ G(x) = x^n G_0(x) \end{cases}$$

για κάποια $m, n \in \mathbb{N}$ και κάποια $F_0(x), G_0(x) \in \mathbb{C}[[x]]$ με $F_0(0), G_0(0) \neq 0$. Τότε

$$F(x)G(x) = x^{m+n} F_0(x) G_0(x)$$

με $F_0(0), G_0(0) \neq 0$, οπότε

$$[x^{m+n}] F(x)G(x) \neq 0$$

και συνεπώς $F(x)G(x) \neq 0$.

Άσκηση 2.3. Για τις ακολουθίες $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ και $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ γνωρίζουμε ότι

$$\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = n \cdot 2^{n-1}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Αν

$$\sum_{n\geq 0} a_n x^n = \frac{1}{(1+x)(1-2x)}$$

υπολογίστε το b_n για $n \in \mathbb{N}$.

Υπόδειξη.

- $$\sum_{n\geq 0} n x^{n-1} = \sum_{n\geq 1} n x^{n-1} = \sum_{n\geq 0} (n+1) x^n =$$

$$= (1+x+x^2+\cdots)(1+x+x^2+\cdots)$$

$$= \frac{1}{(1-x)^2}. \qquad (2.3)$$

Λύση. Έστω

- $$F(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n \in \mathbb{C}[[x]]$$

- $G(x) = \sum_{n\geq 0} b_n x^n \in \mathbb{C}[[x]]$.

Τότε,

- $$F(x)G(x) = \sum_{n\geq 0}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right)x^n$$
$$= \sum_{n\geq 0} n 2^{n-1} x^n$$
$$= x\sum_{n\geq 1} n(2x)^{n-1}$$
$$\overset{(2.3)}{=\!=} \frac{x}{(1-2x)^2}.$$

Αφού $F(x) = 1/(1+x)(1-2x)$, συμπεραίνουμε ότι

$$G(x) = (1+x)(1-2x)\frac{x}{(1-2x)^2}$$

$$= \frac{x(1+x)}{1-2x}$$

$$= (x+x^2)\sum_{n\geq 0} 2^n x^n$$

$$= \sum_{n\geq 1} n\,2^{n-1} x^n + \sum_{n\geq 2} n\,2^{n-2} x^n$$

οπότε $b_0 = 0$, $b_1 = 1$ και $b_n = 2^{n-1} + 2^{n-2}$ $= 3\cdot 2^{n-2}$ για $n \geq 2$. ■

Άσκηση 2.4. Για μη μηδενικούς μιγαδικούς $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s$ δίνεται ότι

$$\sum_{i=1}^{r} \alpha_i^n = \sum_{j=1}^{s} \beta_j^n \qquad (2.4)$$

για κάθε $n \in \{1, 2, 3, \dots\}$.

Δείξτε ότι $r = s$ και ότι τα $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ αποτελούν αναδιάταξη των $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$.

Λύση. Πολλαπλασιάζουμε τη (2.4) με x^n και αθροίζουμε για $n \in \mathbb{Z}_{>0}$. Λόγω της (2.1) παίρνουμε

$$\sum_{i=1}^{r} \frac{\alpha_i x}{1-\alpha_i x} = \sum_{j=1}^{s} \frac{\beta_j x}{1-\beta_j x} \qquad (2.5)$$

στο $\mathbb{C}[[x]]$. Για τυχαίο $\gamma \in \mathbb{C}$, πολλαπλασιάζουμε τη (2.5) με $1-\gamma x$ και θέτουμε $x = 1/\gamma$. Αφού

$$(1-\gamma x)\,\frac{\delta x}{1-\delta x}\bigg|_{x=1/\gamma} = \begin{cases} 1, & \text{αν } \delta = \gamma \\ 0, & \text{αν } \delta \neq \gamma \end{cases}$$

για $\delta \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, έπεται ότι η πολλαπλότητα με την οποία εμφανίζεται το γ ανάμεσα στα $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ είναι ίση με εκείνη με την οποία εμφανίζεται ανάμεσα στα $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$. Έπεται το ζητούμενο. ∎

2. Τυπικές Δυναμοσειρές (συνέχεια)

Υπενθυμίζουμε ότι

$$\mathbb{C}[[x]] = \left\{ \sum_{n\geq 0} a_n x^n : a_n \in \mathbb{C} \right\}$$

είναι ο δακτύλιος των τυπικών δυναμοσειρών με συντελεστές από το $\mathbb{C}$.

Ορισμός 2.4. Για $F_0(x), F_1(x), F_2(x), \ldots \in \mathbb{C}[[x]]$ το άπειρο άθροισμα

$$\sum_{k\geq 0} F_k(x) \qquad (2.2)$$

ορίζεται στο $\mathbb{C}[[x]]$ από την ισότητα

$$[x^n] \sum_{k \geq 0} F_k(x) = \sum_{k \geq 0} [x^n] F_k(x),$$

και λέμε ότι η σειρά (2.2) συγκλίνει στο $\mathbb{C}[[x]]$, αν για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε $[x^n] F_k(x) \neq 0$ για πεπερασμένου πλήθους δείκτες $k \in \mathbb{N}$.

Π.χ. το

- $$\sum_{k \geq 0} (x^k + x^{k+1} + \cdots) = \begin{array}{l} 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + \\ \phantom{1 +{}} x + x^2 + x^3 + \cdots + \\ \phantom{1 + x +{}} x^2 + x^3 + \cdots + \\ \qquad\qquad \vdots \end{array}$$

$$= 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots$$

$$= \sum_{n \geq 0} (n+1) x^n$$

ορίζεται στο $\mathbb{C}[[x]]$, ενώ το

- $$\sum_{k\geq 0}(1+x^k+x^{2k}+\cdots) = \begin{array}{l} 1+x+x^2+x^3+\cdots+ \\ 1 \quad\;\; +x^2+\cdots+ \\ 1 \qquad\quad\;\; +x^3+\cdots+ \\ \qquad\qquad \vdots \end{array}$$

όχι.

Παρατήρηση 2.5. Για $F(x)=\sum_{n\geq 0} a_n x^n \in \mathbb{C}[[x]]$ συμβολίζουμε με

$$\deg F(x)$$

το ελάχιστο $n\in\mathbb{N}$ για το οποίο $a_n \neq 0$ (οπότε $\deg F(x)=\infty$ αν $F(x)=0$). Τότε, η σειρά (2.2) συγκλίνει στο

$\mathbb{C}[[x]]$ εάνν $\deg F_k(x) \to \infty$ για $k \to \infty$.

■

Ειδικότερα, αν $F(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n \in \mathbb{C}[[x]]$ και $G(x) \in \mathbb{C}[[x]]$ με $G(0) = 0$, τότε ορίζεται στο $\mathbb{C}[[x]]$ η σύνθεση

- $$F(G(x)) = \sum_{n \geq 0} a_n (G(x))^n$$
$$= a_0 + a_1 G(x) + a_2 (G(x))^2 + \cdots$$

Παράδειγμα 2.6. Αν $G(x) \in \mathbb{C}[[x]]$ με $G(0) = 0$, τότε ορίζεται η $\sum_{k \geq 0} (G(x))^k$ στο $\mathbb{C}[[x]]$ και

$$\sum_{k\geq 0}(G(x))^k = \frac{1}{1-G(x)}.$$

Ο πρώτος ισχυρισμός έπεται από την Παρατήρηση 2.5 για $F(x)=\sum_{n\geq 0} x^n$. Για το δεύτερο παρατηρούμε ότι για $n\in\mathbb{N}$, $[x^n](G(x))^k = 0$ για $k>n$ και συνεπώς

- $[x^n]\,(1-G(x))\sum_{k\geq 0}(G(x))^k =$

$$[x^n]\,(1-G(x))\sum_{k=0}^{n}(G(x))^k =$$

$$[x^n]\,(1-G(x)^{n+1}) =$$

$$= \begin{cases} 1, & \text{αν } n=0 \\ 0, & \text{αν } n \geq 1. \end{cases}$$

Αυτό δείχνει ότι

$$(1-G(x)) \sum_{k \geq 0} (G(x))^k = 1. \quad \blacksquare$$

Ανάλογες παρατηρήσεις ισχύουν για άπειρα γινόμενα. Π.χ. αν $F_1(x), F_2(x), \ldots \in \mathbb{C}[[x]]$ και $F_k(0) = 0$ για κάθε k, τότε το άπειρο γινόμενο

$$\prod_{k \geq 1} (1 + F_k(x))$$

ορίζεται στο $\mathbb{C}[[x]]$ όταν $\deg(F_k(x)) \to \infty$ για $k \to \infty$. Υπό αυτήν την προϋπόθεση

- $$[x^n] \prod_{k \geq 1} (1 + F_k(x)) = $$

$$= [x^n] \prod_{k=1}^{N} (1 + F_k(x))$$

όπου $[x^n] F_k(x) = 0$ για $k > N$. Π.χ.

- $$\prod_{k \geq 1} (1 + x^k) = (1+x)(1+x^2)(1+x^3) \cdots$$

$$= 1 + x + x^2 + 2x^3 + 2x^4 + \cdots$$

$$\in \mathbb{C}[[x]]$$

αλλά

- $\prod_{k\geq 1}(1+x) = (1+x)(1+x)(1+x)\cdots \notin \mathbb{C}[[x]]$.

Άσκηση 2.7. Για ποιες τυπικές δυναμοσειρές $F(x) \in \mathbb{C}[[x]]$ υπάρχει $G(x) \in \mathbb{C}[[x]]$ με $G(0)=0$, τέτοια ώστε

$$\sum_{k\geq 1}(G(x))^k = F(x) \;;$$

Λύση. Προφανώς, θα πρέπει $F(0)=0$. Αντιστρόφως, έστω ότι $F(0)=0$. Λόγω του Παραδείγματος 2.6,

- $\sum_{k\geq 1}(G(x))^k = G(x)\cdot\sum_{k\geq 1}(G(x))^{k-1}$

$$= G(x) \cdot \sum_{k \geq 0} (G(x))^k$$

$$= \frac{G(x)}{1 - G(x)}$$

και η δοσμένη ισότητα γράφεται

- $F(x) = \dfrac{G(x)}{1 - G(x)} \Leftrightarrow G(x) = \dfrac{F(x)}{1 + F(x)}.$

Άρα, αν $F(0) = 0$, η $G(x) \in \mathbb{C}[[x]]$ ορίζεται μοναδικά και δίνεται από τον τύπο

- $G(x) = \dfrac{F(x)}{1 + F(x)} = F(x) \cdot \sum_{k \geq 0} (-F(x))^k$

$$= \sum_{k \geq 1} (-1)^{k-1} (F(x))^k. \blacksquare$$

Ορισμός 2.8. Έστω $\alpha \in \mathbb{C}$ και τυπική δυναμοσειρά $F(x) \in \mathbb{C}[[x]]$ με $F(0) = 0$. Η διωνυμική σειρά $(1+F(x))^\alpha \in \mathbb{C}[[x]]$ ορίζεται από τον τύπο

$$(1+F(x))^\alpha = \sum_{n \geq 0} \binom{\alpha}{n} (F(x))^n$$

όπου

$$\binom{\alpha}{n} = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ \dfrac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}, & n \geq 1. \end{cases}$$

π.χ.

- $$(1+x+x^2)^{-3/2} = \sum_{n\geq 0} \binom{-3/2}{n} (x+x^2)^n$$

$$\in \mathbb{C}[[x]].$$

Παρατήρηση 2.9. Επαληθεύεται ότι ισχύουν οι γνωστοί κανόνες

- $(1+F(x))^{\alpha}(1+F(x))^{\beta} = (1+F(x))^{\alpha+\beta}$
- $(1+F(x))^{\alpha}(1+G(x))^{\alpha}$

$$= (1+F(x)+G(x)+F(x)G(x))^{\alpha}$$

- $((1+F(x))^{\alpha})^{\beta} = (1+F(x))^{\alpha\beta}$

όταν $F(0)=G(0)=0$. ■

Παράδειγμα 2.10. Ας αποδείξουμε την ταυτότητα

$$\sum_{n\geq 0}\binom{2n}{n}x^n = \frac{1}{\sqrt{1-4x}}.$$

Για $a=-1/2$,

- $$\binom{a}{n}=\binom{-1/2}{n}$$

$$=\frac{1}{n!}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\cdots\left(-\frac{2n-1}{2}\right)$$

$$=\frac{(-1)^n}{n!}\cdot\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2^n}$$

$$=(-1)^n\cdot\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdots(2n)}{2\cdot 4\cdots(2n)\,2^n\cdot n!}$$

$$= (-1)^n \cdot \frac{(2n)!}{(n!)^2 4^n}$$

$$= (-1)^n \cdot \frac{1}{4^n} \binom{2n}{n}.$$

Συνεπώς,

- $$\frac{1}{\sqrt{1-4x}} = (1-4x)^{-1/2} = \sum_{n \geq 0} \binom{-1/2}{n} (-4x)^n$$

$$= \sum_{n \geq 0} \binom{2n}{n} x^n. \blacksquare$$

Άσκηση 2.11. Υπολογίστε το άθροισμα

$$\sum_{k=0}^{n} c_k c_{n-k}$$

για $n \in \mathbb{N}$, όπου $c_0 = 1$ και

$$c_n = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n+1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)}$$

για $n \geq 1$.

Λύση. Παρατηρούμε ότι το δοσμένο άθροισμα ισούται με το συντελεστή του x^n στο τετράγωνο της $\sum_{n \geq 0} c_n x^n$ και ότι

- $$c_n = \frac{1}{2^n n!} \cdot (1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n+1))$$

$$= \frac{1}{n!} \left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{5}{2}\right) \cdots \left(\frac{2n+1}{2}\right)$$

$$= \frac{(-1)^n}{n!} \cdot \left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)\cdots\left(-\frac{2n+1}{2}\right).$$

$$= (-1)^n \cdot \binom{-3/2}{n}.$$

Άρα,

$$\sum_{n\geq 0} c_n x^n = \sum_{n\geq 0} \binom{-3/2}{n} (-x)^n = (1-x)^{-3/2}$$

οπότε

$$\left(\sum_{n\geq 0} c_n x^n\right)^2 = (1-x)^{-3} = \sum_{n\geq 0} \binom{-3}{n} (-x)^n$$

και

- $$\sum_{k=0}^{n} c_k c_{n-k} = [x^n](1-x)^{-3} = (-1)^n \binom{-3}{n}$$

$$= (-1)^n \cdot \frac{(-3)(-4)\cdots(-2-n)}{n!}$$

$$= \frac{(n+1)(n+2)}{2}. \quad \blacksquare$$

Ορισμός 2.12. Για $F(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n \in \mathbb{C}[[x]]$ ορίζουμε την παράγωγο

- $$F'(x) = \sum_{n\geq 1} n a_n x^{n-1}$$

$$= a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \cdots \in \mathbb{C}[[x]].$$

Π.χ. αν

- $$F(x) = \sum_{n\geq 0} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots = \frac{1}{1-x}$$

τότε

- $$F'(x) = \sum_{n\geq 1} nx^{n-1} = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

Παρατήρηση 2.13. Επαληθεύεται ότι στο $\mathbb{C}[[x]]$ ισχύουν οι γνωστοί κανόνες παραγώγισης

- $(F(x)+G(x))' = F'(x) + G'(x)$
- $(F(x)G(x))' = F'(x)G(x) + F(x)G'(x)$
- $(1/F(x))' = -F'(x)/(F(x))^2$
- $(F\circ G)'(x) = F'(G(x))\cdot G'(x)$

όταν τα αριστερά μέλη ορίζονται στο $\mathbb{C}[[x]]$.

Παράδειγμα 2.14. Θεωρούμε την ισότητα

$$\sum_{n \geq 0} x^n = \frac{1}{1-x}.$$

Παραγωγίζοντας k φορές προκύπτουν οι ισοδύναμες ταυτότητες

- $$\sum_{n \geq k} n(n-1)\cdots(n-k+1)\, x^{n-k} = \frac{k!}{(1-x)^{k+1}}$$
- $$\sum_{n \geq k} \binom{n}{k} x^{n-k} = \frac{1}{(1-x)^{k+1}}$$

- $$\sum_{n \geq 0} \binom{n+k}{k} x^n = \frac{1}{(1-x)^{k+1}}$$

για $k \in \mathbb{N}$. ∎

3. Υποσύνολα, συνθέσεις, διαμερίσεις

Πόσα υποσύνολα του $[n] := \{1, 2, \ldots, n\}$ έχουν ακριβώς k στοιχεία; Ας συμβολίσουμε με $C(n,k)$ το πλήθος αυτό.

Πρόταση 3.1. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^{n} C(n,k)\, x^k = (1+x)^n.$$

Πρώτη Απόδειξη. Θεωρούμε την αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση

$$\varphi_n : 2^{[n]} \to \{0,1\}^n$$

του Παραδείγματος 1.1. Για $S \subseteq [n]$ έχουμε $\varphi_n(S) = (r_1, r_2, \dots, r_n)$, όπου

$$r_i = \begin{cases} 1, & \text{αν } i \in S \\ 0, & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

Παρατηρούμε ότι $\#S = r_1 + r_2 + \cdots + r_n$ και συμπεραίνουμε ότι

- $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} C(n,k)\, x^k = \sum_{S \subseteq [n]} x^{\#S}$

$$= \sum_{(r_1,\dots,r_n)\in\{0,1\}^n} x^{r_1+r_2+\dots+r_n}$$

$$= \sum_{(r_1,\dots,r_n)\in\{0,1\}^n} x^{r_1}\cdot x^{r_2}\cdots x^{r_n}$$

$$= \prod_{i=1}^{n}\Bigl(\sum_{r_i\in\{0,1\}} x^{r_i}\Bigr)$$

$$= \prod_{i=1}^{n}(1+x) = (1+x)^n.$$

Δεύτερη Απόδειξη. Θεωρούμε μεταβλητές $x_1, x_2, \dots, x_n$ που ανά δύο μετατίθενται (δηλαδή, $x_i x_j = x_j x_i$).

Με επαγωγή στο n δείχνει κανείς ότι

$$(1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_n) = \sum_{S\subseteq[n]} x_S \quad (3.1)$$

όπου

$$x_S = \prod_{i\in S} x_i$$

για $S\subseteq[n]$. Π.χ. για $n=2$,

$$(1+x_1)(1+x_2) = 1 + x_1 + x_2 + x_1 x_2 .$$

Θέτουμε $x_1 = \cdots = x_n = x$ στην (3.1) και, αφού $x_S = x^{\#S}$, παίρνουμε ότι

$$(1+x)^n = \sum_{S\subseteq[n]} x_S = \sum_{k=0}^{n} C(n,k)\, x^k . \quad \blacksquare$$

Από την Πρόταση 3.1 και το διωνυμικό τύπο

$$(1+x)^{\alpha} = \sum_{n\geq 0} \binom{\alpha}{n} x^n$$

προκύπτει το εξής.

Πόρισμα 3.2. Το πλήθος $C(n,k)$ των υποσυνόλων του $[n]$ με k στοιχεία δίνεται από τον τύπο

- $$C(n,k) = \binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}$$

$$= \frac{n!}{k!\,(n-k)!}. \quad \blacksquare$$

Ας δώσουμε μια ευθεία απόδειξη του Πορίσματος 3.2. Αρκεί να δείξουμε ότι

$$n! = k!\,(n-k)!\; C(n,k).$$

Έστω X_n το σύνολο των αναδιατάξεων του $[n]$ και έστω

$$\binom{[n]}{k}$$

το σύνολο των k-υποσυνόλων του $[n]$ (υποσύνολα με k στοιχεία). Θεωρούμε την απεικόνιση

$$f : X_n \longrightarrow \binom{[n]}{k}$$

που ορίζεται θέτοντας

$$f(\sigma) = \{\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_k\}$$

για κάθε $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n) \in X_n$. Παρατηρούμε ότι για κάθε $S \in \binom{[n]}{k}$ υπάρχουν ακριβώς $m := k!(n-k)!$ αναδιατάξεις $\sigma \in X_n$ τέτοιες ώστε $f(\sigma) = S$. Από αυτό και την Πρόταση 1.4 συμπεραίνουμε ότι

- $$n! = \# X_n = m \cdot \# \binom{[n]}{k} = k!(n-k)!\, C(n,k).$$

Μπορούμε τώρα να αντικαταστήσουμε το $C(n,k)$ με το διωνυμικό συντελεστή $\binom{n}{k}$, οπότε η Πρόταση 3.1 παίρνει τη συνήθη μορφή του Διωνυμικού Θεωρήματος

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k. \qquad (3.2)$$

Από την (3.2) προκύπτουν εύκολα γνωστές ταυτότητες για τους διωνυμικούς συντελεστές. Π.χ. αν εξισώσουμε τους συντελεστές του x^k στην ταυτότητα

• $(1+x)^n = (1+x)(1+x)^{n-1}$

$$= (1+x)^{n-1} + x(1+x)^{n-1}$$

προκύπτει ο αναδρομικός τύπος

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}.$$

Θέτοντας $x=1$ και $x=-1$ στην (3.2) παίρνουμε

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$

και

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = \begin{cases} 1, & \text{αν } n=0 \\ 0, & \text{αν } n \geq 1 \end{cases}$$

αντίστοιχα. Κατά συνέπεια,

- $\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \cdots$

$$= \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \binom{n}{5} + \cdots = 2^{n-1}$$

για κάθε $n \in \mathbb{Z}_{>0}$.

Επίσης, παραγωγίζοντας την (3.2) και θέτοντας $x=1$ παίρνουμε ότι

$$\sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k} = n \cdot 2^{n-1}.$$

Η (3.2) μπορεί να γραφεί στην ομογενοποιημένη μορφή

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}.$$

Ας αποδείξουμε την εξής γενίκευση.

Πρόταση 3.3. Για θετικούς ακεραίους n, r και μεταβλητές $x_1, x_2, \dots, x_r$ που ανά δύο μετατίθενται

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_r)^n = \sum \binom{n}{n_1\, n_2 \cdots n_r} x_1^{n_1} \cdots x_r^{n_r}$$

όπου το άθροισμα διατρέχει όλα τα διανύσματα $(n_1, n_2, \dots, n_r) \in \mathbb{N}^r$ τέτοια ώστε $n_1 + n_2 + \cdots + n_r = n$ και

$$\binom{n}{n_1\, n_2 \cdots n_r} := \frac{n!}{n_1!\, n_2! \cdots n_r!}$$

είναι ο αντίστοιχος πολυωνυμικός

συντελεστής.

Απόδειξη (ΣΧΕΔΙΟ). Παρατηρούμε (με επαγωγή στο n) ότι

- $$(x_1+x_2+\cdots+x_r)^n = (x_1+x_2+\cdots+x_r)\cdots(x_1+x_2+\cdots+x_r)$$

$$= \sum_{f:[n]\to[r]} x_{f(1)}x_{f(2)}\cdots x_{f(n)}.$$

Έστω $B_n(r)$ το σύνολο όλων των r^n απεικονίσεων $f:[n]\to[r]$ και έστω $A_n(r)$ το σύνολο των ακολουθιών

$$(S_1, S_2, \ldots, S_r)$$

ξένων ανά δύο υποσυνόλων $S_1,\ldots,S_r$

του $[n]$ με $S_1 \cup S_2 \cup \cdots \cup S_r = [n]$. Θεωρούμε την απεικόνιση

$$\varphi : A_n(r) \longrightarrow B_n(r)$$

που ορίζεται θέτοντας $\varphi(\sigma) = f$ για $\sigma = (S_1, S_2, \ldots, S_r) \in A_n(r)$, όπου $f \in B_n(r)$ είναι η απεικόνιση $f : [n] \to [r]$ για την οποία $f(i) = j \Leftrightarrow i \in S_j$.

Η απεικόνιση φ είναι αμφιμονοσήμαντη και έχει την ιδιότητα ότι

$$x_{f(1)} x_{f(2)} \cdots x_{f(n)} = x_1^{\# S_1} x_2^{\# S_2} \cdots x_r^{\# S_r}$$

αν $f = \varphi(S_1, S_2, \ldots, S_r)$. Από αυτά συ-

συμπεραίνουμε ότι

- $$(x_1+x_2+\cdots+x_r)^n = \sum_{f\in B_n(r)} x_{f(1)}\cdots x_{f(n)}$$

$$= \sum_{(S_1,\ldots,S_r)\in A_n(r)} x_1^{\#S_1}\, x_2^{\#S_2}\cdots x_r^{\#S_r}$$

$$= \sum_{n_1+\cdots+n_r=n} \binom{n}{n_1\, n_2 \cdots n_r} x_1^{n_1} x_2^{n_2}\cdots x_r^{n_r}$$

όπου το $\binom{n}{n_1\, n_2\cdots n_r}$ ορίζεται ως το πλήθος των $\sigma=(S_1,S_2,\ldots,S_r)\in A_n(r)$ με $\#S_j=n_j$ για $1\leq j\leq r$. Με μια απλή εφαρμογή της Πρότασης 1.4 βρίσκουμε ότι

- $$\binom{n}{n_1\, n_2 \cdots n_r} = \binom{n}{n_1}\binom{n-n_1}{n_2}\cdots\binom{n-n_1-\cdots-n_{r-1}}{n_r}$$

$$= \frac{n!}{n_1!\,(n-n_1)!}\cdot\frac{(n-n_1)!}{n_2!\,(n-n_1-n_2)!}\cdots$$

$$= \frac{n!}{n_1!\, n_2! \cdots n_r!}. \quad \blacksquare$$

3. Υποσύνολα, συνθέσεις, διαμερίσεις (συνέχεια)

Συνθέσεις ακεραίων. Έστω $n \in \mathbb{Z}_{>0}$.

Ορισμός 3.4. Σύνθεση του n λέγεται κάθε διάνυσμα

$$\rho = (r_1, r_2, \dots, r_k)$$

όπου $r_1, r_2, \dots, r_k$ είναι θετικοί ακέραιοι με $r_1 + r_2 + \cdots + r_k = n$. Οι r_i λέγονται μέρη της ρ.

Π.χ. το $n=3$ έχει τις συνθέσεις

$$(3),\ (2,1),\ (1,2),\ (1,1,1)$$

οι οποίες γράφονται και ως

$$3, \quad 2+1, \quad 1+2, \quad 1+1+1.$$

Πρόταση 3.5. Το πλήθος των συνθέσεων του n είναι ίσο με 2^{n-1}. Το πλήθος εκείνων με k μέρη είναι ίσο με $\binom{n-1}{k-1}$.

Πρώτη Απόδειξη. Έστω c_n το πλήθος των συνθέσεων του n. Έχουμε

- $$\sum_{n\geq 1} c_n x^n = \sum_{k\geq 1} \sum_{r_i \in \mathbb{Z}_{>0}} x^{r_1+r_2+\cdots+r_k}$$

$$= \sum_{k\geq 1} \sum_{r_i \in \mathbb{Z}_{>0}} x^{r_1} \cdot x^{r_2} \cdots x^{r_k}$$

$$= \sum_{k\geq 1} \prod_{i=1}^{k} \left(\sum_{r_i \in \mathbb{Z}_{>0}} x^{r_1} \right)$$

$$= \sum_{k\geq 1} \prod_{i=1}^{k} (x + x^2 + x^3 + \cdots)$$

$$= \sum_{k\geq 1} (x + x^2 + x^3 + \cdots)^k$$

$$= \frac{x + x^2 + \cdots}{1 - (x + x^2 + \cdots)} = \frac{x/(1-x)}{1 - x/(1-x)} = \frac{x}{1-2x}$$

$$= x \sum_{n\geq 0} (2x)^n = \sum_{n\geq 1} 2^{n-1} x^n$$

και συνεπώς $c_n = 2^{n-1}$ για κάθε $n \in \mathbb{Z}_{>0}$.

Ομοίως, αν $c_{n,k}$ είναι το πλήθος των συνθέσεων του n με k μέρη, τότε

- $$\sum_{n \geq 1} c_{n,k} x^n = \sum_{r_i \in \mathbb{Z}_{>0}} x^{r_1 + r_2 + \cdots + r_k}$$

$$= \prod_{i=1}^{k} \left(\sum_{r_i \in \mathbb{Z}_{>0}} x^{r_1} \right)$$

$$= (x + x^2 + x^3 + \cdots)^k = \left(\frac{x}{1-x} \right)^k$$

$$= x^k (1-x)^{-k} = x^k \sum_{n \geq 0} \binom{-k}{n} (-x)^n$$

$$= \sum_{n \geq 0} (-1)^n \cdot \frac{(-k)(-k-1)\cdots(-k-n+1)}{n!} x^{k+n}$$

$$= \sum_{n \geq 0} \frac{k(k+1)\cdots(k+n-1)}{n!} x^{k+n}$$

$$= \sum_{n \geq 0} \binom{k+n-1}{k-1} x^{k+n} = \sum_{n \geq k} \binom{n-1}{k-1} x^n$$

και συνεπώς $c_{n,k} = \binom{n-1}{k-1}$ για $n \in \mathbb{N}$.

Δεύτερη Απόδειξη. Αρκεί να βρεθεί μια 1–1 αντιστοιχία

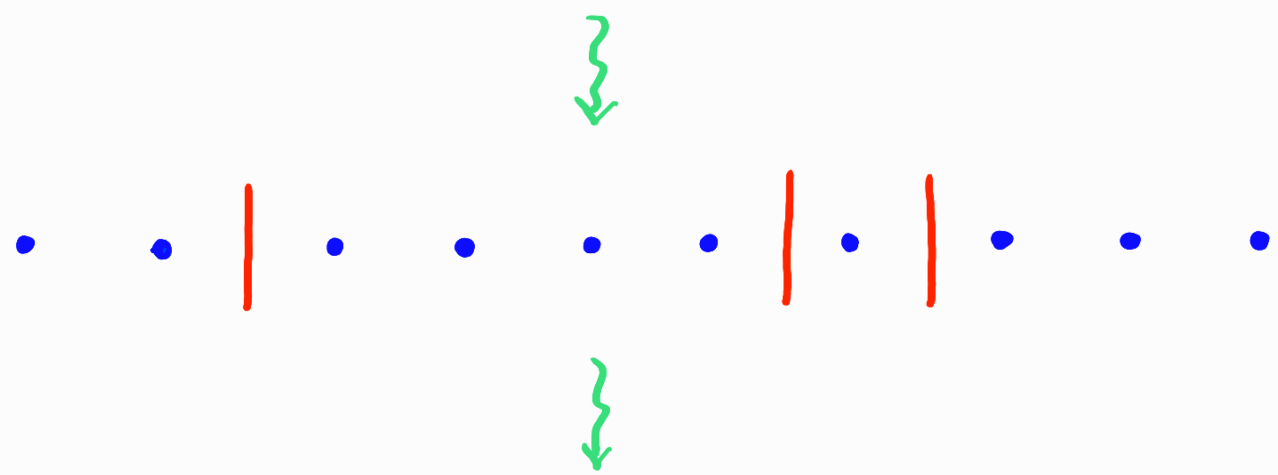
$$\theta = \theta_{n,k} : A_{n,k} \to \binom{[n-1]}{k-1}$$

όπου $A_{n,k}$ είναι το σύνολο των συνθέσεων του n με k μέρη. Πράγματι, για τη σύνθεση $\rho=(r_1, r_2, \ldots, r_k)$ του n με k μέρη θέτουμε

$$\theta(\rho) = \{r_1, r_1+r_2, \ldots, r_1+r_2+\cdots+r_{k-1}\}.$$

Π.χ. αν $n=10$, $k=4$ και $\rho=(2,4,1,3)$, τότε $\theta(\rho)=\{2,6,7\}$. Σχηματικά,

$$2+4+1+3$$



$$\{2,6,7\}$$

Προφανώς, $\theta(\rho) \in \binom{[n-1]}{k-1}$ και η θ είναι αντιστρέψιμη. Η αντίστροφη απεικόνιση στέλνει το

$$\{s_1, s_2, \ldots, s_{k-1}\} \in \binom{[n-1]}{k-1}$$

με $s_1 < s_2 < \cdots < s_{k-1}$ στη σύνθεση

$$(s_1, s_2 - s_1, \ldots, n - s_{k-1})$$

του n. Έπεται ότι

$$\# A_{n,k} = \# \binom{[n-1]}{k-1} = \binom{n-1}{k-1}. \blacksquare$$

Οι συνθέσεις του n με k μέρη συμπίπτουν με τις λύσεις της εξίσωσης

$$r_1 + r_2 + \cdots + r_k = n \tag{3.3}$$

στο $\mathbb{Z}_{>0}$. Έστω $\left(\!\binom{n}{k}\!\right)$ το πλήθος των λύσεων της

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = k \tag{3.4}$$

στο $\mathbb{N}$. Ισοδύναμα, $\left(\!\binom{n}{k}\!\right)$ είναι το πλήθος των μονωνύμων

$$x_1^{a_1} x_2^{a_2} \cdots x_n^{a_n}$$

στις μεταβλητές $x_1, x_2, \ldots, x_n$ βαθμού $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = k$.

π.χ. $\left(\!\binom{4}{2}\!\right) = 10$ αφού υπάρχουν τα μονώνυμα

- $x_1^2, x_2^2, x_3^2, x_4^2$
- $x_1x_2, x_1x_3, x_1x_4, x_2x_3, x_2x_4, x_3x_4$

βαθμού 2 στις μεταβλητές x_1, x_2, x_3, x_4.

Πρόταση 3.6. $\left(\!\binom{n}{k}\!\right) = \binom{n+k-1}{k}$.

Πρώτη Απόδειξη. Εργαζόμαστε όπως προηγουμένως και βρίσκουμε ότι

- $$\sum_{k\geq 0} \left(\!\binom{n}{k}\!\right) x^k = \sum_{a_i \in \mathbb{N}} x^{a_1+a_2+\cdots+a_n}$$

$$= \prod_{i=1}^{n} \Big(\sum_{a_i \in \mathbb{N}} x^{a_i} \Big)$$

$$= \prod_{i=1}^{n} (1 + x + x^2 + \cdots)$$

$$= \left(\frac{x}{1-x} \right)^n = (1-x)^{-n} = \sum_{k \geq 0} \binom{-n}{k} (-x)^k$$

και συμπεραίνουμε ότι

- $$\left(\!\binom{n}{k}\!\right) = (-1)^k \binom{-n}{k}$$

$$= (-1)^k \cdot \frac{(-n)(-n-1)\cdots(-n-k+1)}{k!}$$

$$= \binom{n+k-1}{k}.$$

Δεύτερη Απόδειξη. Θέτουμε $r_i = a_i + 1$ για $1 \leq i \leq n$. Η (3.4) μετασχηματίζεται στην εξίσωση

$$r_1 + r_2 + \cdots + r_n = k + n \qquad (3.5)$$

με αγνώστους $r_1, r_2, \ldots, r_n \in \mathbb{Z}_{>0}$. Έτσι ορίζεται μια 1-1 αντιστοιχία από το σύνολο των λύσεων της (3.4) σε εκείνο της (3.5), δηλαδή στο σύνολο των συνθέσεων του $n+k$ με n μέρη. Από αυτό και την Πρόταση 3.5 προκύπτει ότι

$$\left(\!\!\binom{n}{k}\!\!\right) = \binom{n+k-1}{n-1} = \binom{n+k-1}{k}. \quad \blacksquare$$

Παράδειγμα 3.7. Αν $f(n)$ είναι το πλήθος των λύσεων της

$$a_1 + a_2 + a_3 = n$$

στο $\mathbb{N}^3$ με $a_1 \geq 2$, $a_2 \in 2\mathbb{N}$ και $a_3 - 1 \in 2\mathbb{N}$ τότε

- $$\sum_{n\geq 0} f(n) x^n = \sum_{\substack{a_1 \geq 2 \\ a_2 \in 2\mathbb{N} \\ a_3 \in 1+2\mathbb{N}}} x^{a_1+a_2+a_3}$$

$$= (x^2 + x^3 + x^4 + \cdots)(1 + x^2 + x^4 + \cdots)$$
$$(x + x^3 + x^5 + \cdots)$$

$$= \frac{x^2}{1-x} \cdot \frac{1}{1-x^2} \cdot \frac{x}{1-x^2}$$

$$= \frac{x^3}{(1-x)(1-x^2)^2} = \frac{x^3(1+x)}{(1-x^2)^3}$$

$$= (x^3+x^4)\sum_{m\geq 0}\binom{m+2}{2}x^{2m}$$

$$= \sum_{m\geq 0}\binom{m+2}{2}x^{2m+3} + \sum_{m\geq 0}\binom{m+2}{2}x^{2m+4}$$

$$= \sum_{m\geq 2}\binom{m}{2}x^{2m} + \sum_{m\geq 1}\binom{m+1}{2}x^{2m+1}.$$

Άρα,

$$f(n) = \begin{cases} \binom{(\lfloor n+1 \rfloor)/2}{2}, & \text{αν } n\geq 3 \\ 0, & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$ ■

Άσκηση 3.8. Πόσες συνθέσεις του n έχουν μέρη περιττούς ακεραίους;

Λύση. Αν b_n είναι το πλήθος αυτό, τότε

- $$\sum_{n\geq 0} b_n x^n = \sum_{k\geq 0} \sum_{a_i \in 1+2\mathbb{N}} x^{a_1+a_2+\cdots+a_k}$$

$$= \sum_{k\geq 0} \prod_{i=1}^{k} \Big(\sum_{a_i \in 1+2\mathbb{N}} x^{a_i} \Big)$$

$$= \sum_{k\geq 0} (x + x^3 + x^5 + \cdots)^k$$

$$= \sum_{k\geq 0} \left(\frac{x}{1-x^2} \right)^k$$

$$= \frac{1}{1 - x/(1-x^2)} = \frac{1-x^2}{1-x-x^2}$$

$$= 1 + \frac{x}{1-x-x^2}$$

$$= 1 + \sum_{n \geq 1} F_n x^n,$$

όπου $F_1 = F_2 = 1$ και $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ για $n \geq 3$ και $b_0 := 1$. Έπεται ότι $b_n = F_n$ για κάθε $n \in \mathbb{Z}_{>0}$.

Διαμερίσεις ακεραίων. Έστω $n \in \mathbb{Z}_{>0}$.

Ορισμός 3.9. Διαμέριση του n λέγεται κάθε ακολουθία $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k)$ θετικών ακεραίων με

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_k$$

και $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_k = n$.

Τα $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ λέγονται μέρη της λ. Γράφουμε $\lambda \vdash n$ και $|\lambda| = n$.

Π.χ. οι ακολουθίες

- (5)
- $(4,1)$
- $(3,2)$
- $(3,1,1)$
- $(2,2,1)$
- $(2,1,1,1)$
- $(1,1,1,1,1)$

είναι οι διαμερίσεις του $n=5$, ενώ η $(5,3,3,2)$ είναι διαμέριση του 13 με τέσσερα μέρη.

Οι διαμερίσεις παριστάνονται συνήθως με τα διαγράμματα Young/Ferrers.

διαγράμματα Young και Ferres της $(5,3,3,2)$

Έστω $p(n)$ το πλήθος των διαμερίσεων του n, όπου $p(0):=1$. Έχουμε

- $$\sum_{n\geq 0} p(n)x^n = 1+x+2x^2+3x^3+5x^4+7x^5+11x^6+\cdots$$

Πρόταση 3.10.

- $$\sum_{n\geq 0} p(n)x^n = \prod_{i\geq 1}\frac{1}{1-x^i} = \frac{1}{1-x}\cdot\frac{1}{1-x^2}\cdot\frac{1}{1-x^3}\cdots$$

Απόδειξη. Έστω $m_i = m_i(\lambda)$ η πολλαπλότητα με την οποία εμφανίζεται το i ως μέρος της λ. Π.χ. αν $\lambda =$

$(5,3,3,2,1,1,1,1)$, τότε $m_1(\lambda)=4$, $m_2(\lambda)=m_5(\lambda)=1$, $m_3(\lambda)=2$ και $m_i(\lambda)=0$ για τις υπόλοιπες τιμές του i. Παρατηρούμε ότι η απεικόνιση

$$\lambda \rightsquigarrow (m_1(\lambda), m_2(\lambda), m_3(\lambda), \dots)$$

είναι 1-1 αντιστοιχία από το σύνολο των διαμερίσεων φυσικών αριθμών στο σύνολο των ακολουθιών $(m_1, m_2, m_3, \dots)$ φυσικών αριθμών με $m_i = 0$ για $i \gg 0$ και ότι

- $|\lambda|$ = άθροισμα των μερών της λ

$$= m_1(\lambda) + 2m_2(\lambda) + 3m_3(\lambda) + \cdots$$

επομένως

$$\sum_{n \geqslant 0} p(n) x^n = \sum_{\text{διαμερίσεις } \lambda} x^{|\lambda|}$$

$$= \sum_{m_i \in \mathbb{N}} x^{m_1 + 2m_2 + \cdots}$$

$$= \Big(\sum_{m_1 \geqslant 0} x^{m_1} \Big) \Big(\sum_{m_2 \geqslant 0} x^{2m_2} \Big) \cdots$$

$$= \frac{1}{1-x} \cdot \frac{1}{1-x^2} \cdot \frac{1}{1-x^3} \cdots$$

Με το ίδιο σκεπτικό αποδεικνύεται η εξής γενίκευση.

Πρόταση 3.11. Έστω σύνολα $S_1, S_2, S_3, \ldots \subseteq \mathbb{N}$. Αν $q(n)$ είναι το πλήθος των διαμερίσεων λ του n με την ιδιότητα $m_i(\lambda) \in S_i$ για $i \in \mathbb{Z}_{>0}$, τότε

$$\sum_{n \geq 0} q(n) x^n = \Big(\sum_{m_1 \in S_1} x^{m_1} \Big) \Big(\sum_{m_2 \in S_2} x^{2m_2} \Big) \cdots$$

$$= \prod_{i \geq 1} \Big(\sum_{j \in S_i} x^{ij} \Big). \quad \blacksquare$$

Παράδειγμα 3.12. (α) Αν $S_1 = S_2 = \cdots = \{0,1\}$, τότε το $q(n)$ ισούται με το πλήθος των διαμερίσεων του n με διακεκριμένα μέρη και

- $$\sum_{n\geq 0} q(n)x^n = \prod_{i\geq 1}(1+x^i)$$

$$= (1+x)(1+x^2)(1+x^3)\cdots$$

(β) Αν

$$S_i = \begin{cases} \{0\}, & i \in 2\mathbb{N} \\ \mathbb{N}, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

τότε το $q(n)$ ισούται με το πλήθος των διαμερίσεων του n με μέρη περιττούς αριθμούς και

- $$\sum_{n\geq 0} q(n)x^n = \prod_{i\in 1+2\mathbb{N}} (1+x^i+x^{2i}+\cdots)$$

$$= \frac{1}{1-x}\cdot\frac{1}{1-x^3}\cdot\frac{1}{1-x^5}\cdots$$

$$= \frac{(1-x^2)(1-x^4)(1-x^6)\cdots}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\cdots}$$

$$= (1+x)(1+x^2)(1+x^3)\cdots$$

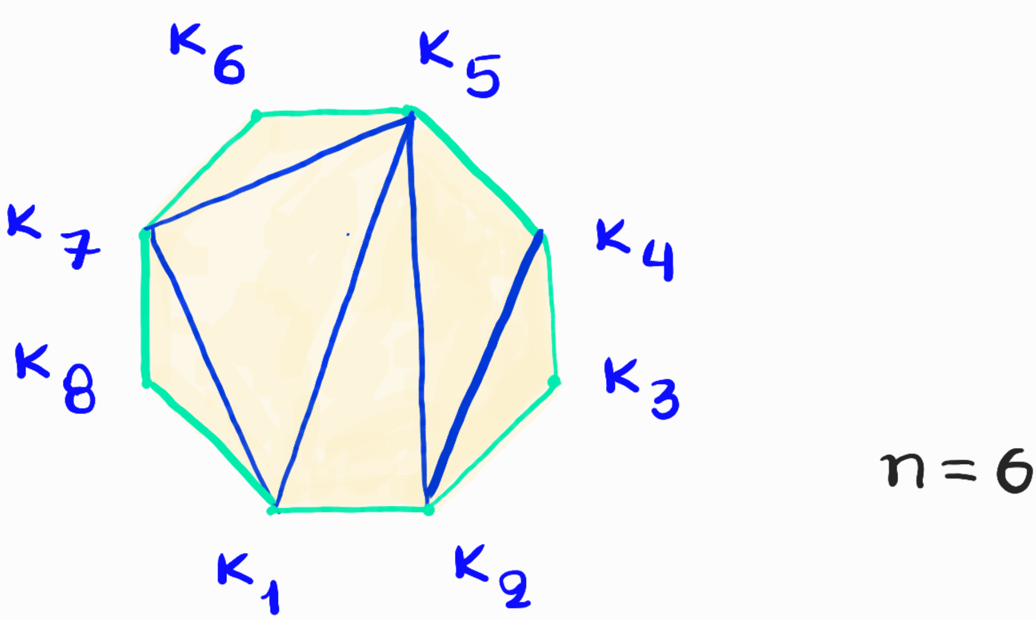
Άρα, το πλήθος των διαμερίσεων του n με περιττά μέρη είναι ίσο με το πλήθος των διαμερίσεων του n με διακεκριμένα μέρη για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Π.χ. για $n=6$ έχουμε τις διαμερίσεις

$$\left\{\begin{array}{l}(6)\\(5,1)\\(4,2)\\(3,2,1)\end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l}(5,1)\\(3,3)\\(3,1,1,1)\\(1,1,1,1,1,1).\end{array}\right.$$

Άσκηση 3.13. Βρείτε μια 1-1 αντιστοιχία μεταξύ του συνόλου των διαμερίσεων του n με περιττά μέρη και εκείνων με διακεκριμένα μέρη.

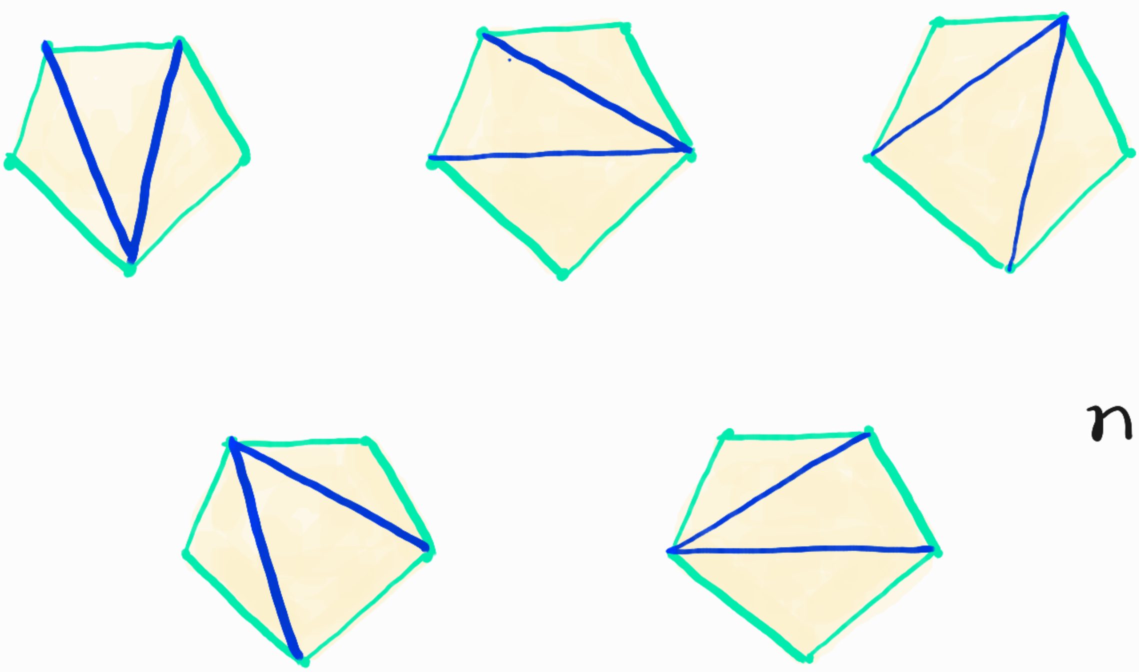
Παράδειγμα 3.14. Έστω a_n το πλήθος των τριγωνισμών ενός κυρτού πολυγώνου Π με $n+2$ κορυφές.



Έχουμε $a_0 = a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 5$,

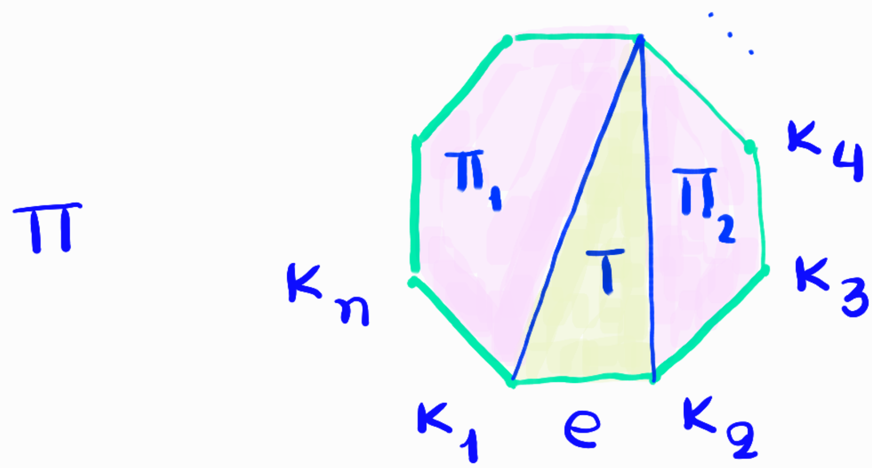
$a_4 = 14, \quad a_5 = 42, \quad a_6 = 132.$

$n = 1, 2$



$n = 3$

Έστω e μια ακμή του πολυγώνου Π. Σε κάθε τριγωνισμό τ του Π, η e περιέχεται σε μοναδικό τρίγωνο T του τ.



Για να τριγωνοποιήσουμε το Π, επιλέγουμε το T και τριγωνίζουμε τα δύο πολύγωνα Π_1 και Π_2 που προκύπτουν. Έπεται ότι

$$a_n = \sum_{k=0}^{n-1} a_k a_{n-1-k}, \quad n \geq 1.$$

Ας πολλαπλασιάσουμε με x^n και ας αθροίσουμε για $n \geq 1$. Θέτοντας $F(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$ παίρνουμε

- $$F(x) - 1 = \sum_{n\geq 1} a_n x^n$$

$$= \sum_{n\geq 1} \left(\sum_{k=0}^{n-1} a_k a_{n-1-k} \right) x^n$$

$$= x \sum_{n\geq 0} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k} \right) x^n$$

$$= x(F(x))^2$$

ή, ισοδύναμα,

$$x(F(x))^2 - F(x) + 1 = 0.$$

Η λύση είναι μοναδική και δίνεται από τον τύπο

$$F(x) = \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}.$$

Αφού

- $$\sqrt{1-4x} = (1-4x)^{1/2}$$
$$= 1 + \sum_{n\geq 1} \binom{1/2}{n} (-4x)^n$$

Βρίσκουμε ότι

- $$F(x) = \frac{1}{2} \sum_{n \geq 1} (-1)^{n-1} \cdot 4^n \binom{1/2}{n} x^{n-1}$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{n \geq 0} (-1)^n \cdot 4^{n+1} \binom{1/2}{n+1} x^n$$

και συμπεραίνουμε ότι

- $$a_n = (-1)^n \cdot 2^{2n+1} \binom{1/2}{n+1}$$

$$= \cdots$$

$$= \frac{(2n)!}{n!\,(n+1)!}$$

$$= \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}.$$

Ο ακέραιος αυτός είναι γνωστός ως ο n-στός αριθμός Catalan και συμβολίζεται με C_n.

4. Μεταθέσεις

Μετάθεση του $[n]$ λέγεται κάθε αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση $w : [n] \to [n]$. Το σύνολο $\mathfrak{S}_n$ των μεταθέσεων του $[n]$ αποτελεί ομάδα με πράξη τη σύνθεση απεικονίσεων (συμμετρική ομάδα).

Μια μετάθεση $w \in \mathfrak{S}_n$ παριστάνεται ως η διάταξη

$$w = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ w(1) & w(2) & \cdots & w(n) \end{pmatrix},$$

ή ως η αναδιάταξη $(w(1), w(2), \ldots,$

$w(n)$, ή ως η λέξη $w(1)w(2)\cdots w(n)$, ή με την κυκλική της μορφή (γινόμενο ξένων κύκλων), καθώς και με πολλούς άλλους τρόπους. Ειδικότερα,

$$\# \mathfrak{S}_n = n!$$

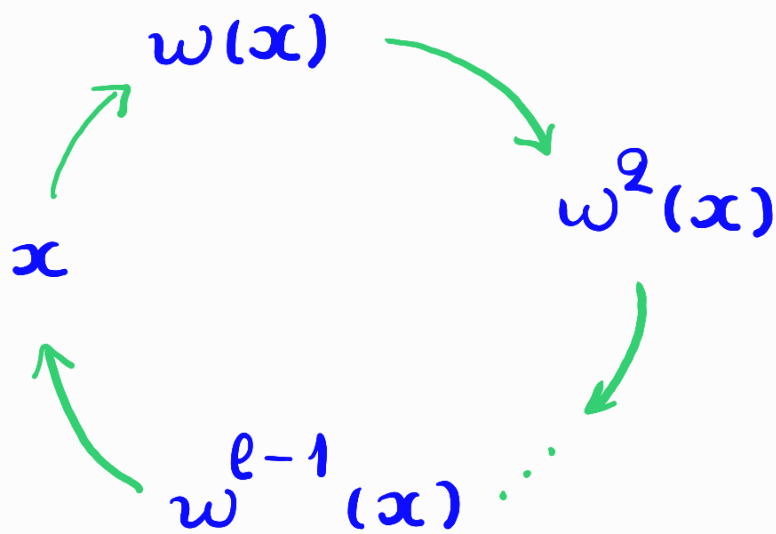
για κάθε $n \in \mathbb{Z}_{>0}$.

Κυκλική μορφή. Για κάθε $x \in [n]$ και $w \in \mathfrak{S}_n$ η ακολουθία

$$x,\ w(x),\ w^2(x) = w(w(x)),\ w^3(x), \ldots$$

λαμβάνει πεπερασμένου πλήθους τιμές. Επομένως, $w^i(x) = w^j(x)$

για κάποιους δείκτες $0 \leq i < j$ και συνεπώς $\omega^{\ell}(x) = x$ για $\ell = j - i \geq 1$. Αν ℓ είναι ο ελάχιστος θετικός ακέραιος με $\omega^{\ell}(x) = x$,



ονομάζουμε την ακολουθία

$$(x, \omega(x), \ldots, \omega^{\ell-1}(x))$$

κύκλο (μήκους ℓ) της ω. Η ω εί-

ναι ίση με το γινόμενο των (ξέ-
νων ανά δύο) κύκλων της. Π.χ.
αν $n=7$ και

$$w = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 2 & 7 & 1 & 3 & 6 & 5 \end{pmatrix},$$

δηλαδή $w(1)=4$, $w(2)=2$, κ.ο.κ.,
τότε

$$w = (1\,4)(2)(3\,7\,5)(6)$$

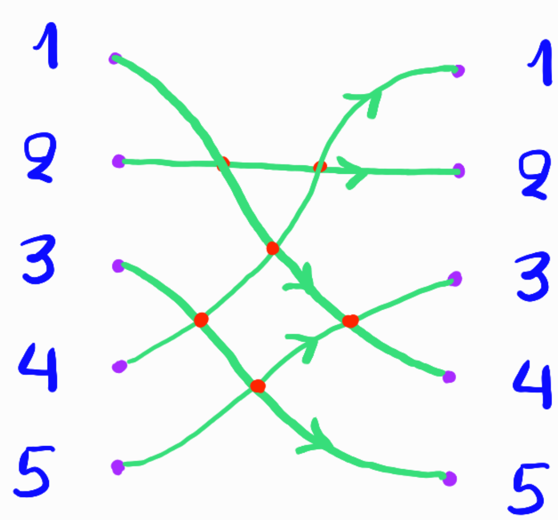
είναι η κυκλική μορφή της w. Φυ-
σικά έχουμε επίσης

- $w = (4\,1)(2)(3\,7\,5)(6)$
  $= (2)(1\,4)(3\,7\,5)(6)$
  $= (1\,4)(2)(6)(7\,5\,3) = \ldots$

Έστω $w \in \mathfrak{S}_n$.

Ορισμός 4.1. Αντιστροφή της w λέγεται κάθε ζεύγος $(i,j) \in \mathbb{N}^2$ με $1 \leq i < j \leq n$ και $w(i) > w(j)$.

Συμβολίζουμε με $\mathrm{inv}(w)$ το πλήθος των αντιστροφών της w.



Π.χ. αν $n=5$ και $w = 42513$, τότε $\mathrm{inv}(w) = 6$.

Παρατήρηση 4.2. Για κάθε $w \in \mathfrak{S}_n$:

(α) $0 \le \mathrm{inv}(w) \le \binom{n}{2}$

(β) $\mathrm{inv}(w^{-1}) = \mathrm{inv}(w)$.

Άσκηση 4.3. Δείξτε ότι για κάθε $w \in \mathfrak{S}_n$ το $\mathrm{inv}(w)$ ισούται με το ελάχιστο $k \in \mathbb{N}$ για το οποίο η w μπορεί να γραφεί ως γινόμενο k γειτονικών αντιμεταθέσεων $(i\ i+1)$.

Ερώτημα. Πόσες μεταθέσεις $w \in \mathfrak{S}_n$ έχουν ακριβώς k αντιστροφές;

$w \in \mathfrak{S}_2$	12	21
$\mathrm{inv}(w)$	0	1

$w \in \mathfrak{S}_3$	123	132	213	312	231	321
$\mathrm{inv}(w)$	0	1	1	2	2	3

Από τους παραπάνω πίνακες προκύπτει ότι

$$\sum_{w \in \mathfrak{S}_n} x^{\mathrm{inv}(w)} = \begin{cases} 1, & n=1 \\ 1+x, & n=2 \\ (1+x)(1+x+x^2), & n=3. \end{cases}$$

Πρόταση 4.4. Για κάθε $n \geq 1$,

$$\sum_{w \in \mathfrak{S}_n} x^{\mathrm{inv}(w)} = (1+x)(1+x+x^2)\cdots(1+x+\cdots+x^{n-1}).$$

Απόδειξη. Θέτουμε

- $\mathcal{B}_n = \{0\} \times \{0,1\} \times \cdots \times \{0,1,\ldots,n-1\}$
$$= \{(a_1,a_2,\ldots,a_n) \in \mathbb{N}^n : 0 \leq a_i < i\}$$

και ορίζουμε μια απεικόνιση

$$\varphi : \mathfrak{S}_n \longrightarrow \mathcal{B}_n$$

ως εξής. Για $w \in \mathfrak{S}_n$ θέτουμε $\varphi(w) = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ όπου για $1 \leq t \leq n$, το a_t είναι το πλήθος των $1 \leq s < t$ τα οποία βρίσκονται στα δεξιά του

t στην ακολουθία $(w(1), w(2), \dots, w(n))$. Π.χ. αν $n=8$ και

$$w = (2,7,4,8,6,3,1,5)$$

ως αναδιάταξη, τότε

$$\varphi(w) = (0,1,1,2,0,3,5,4).$$

Παρατηρούμε ότι $\varphi(w) \in \mathcal{B}_n$ για κάθε $w \in \mathfrak{S}_n$ και ότι για κάθε $\sigma \in \mathcal{B}_n$ υπάρχει μοναδική $w \in \mathfrak{S}_n$ τέτοια ώστε $\varphi(w) = \sigma$. Π.χ. αν $n=8$ και

$$\sigma = (0,1,1,2,0,3,5,4) \in \mathcal{B}_8$$

τότε η μοναδική $w \in \mathfrak{S}_n$ με $\varphi(w) =$

$= \sigma$ κατασκευάζεται από τη διαδι-
κασία

- (1)

  $(2,1)$

  $(2,3,1)$

  $(2,4,3,1)$

  $(2,4,3,1,5)$

  $(2,4,6,3,1,5)$

  $(2,7,4,6,3,1,5)$

  $(2,7,4,8,6,3,1,5) = w$

ως αναδιάταξη, δηλαδή $w(1) = 2$, $w(2) = 7$, $w(3) = 4$, κ.ο.κ.

Αφού $inv(w) = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ αν

$\varphi(w) = (a_1, a_2, \dots, a_n)$, συμπεραίνουμε ότι

$$\sum_{w \in \mathfrak{S}_n} x^{inv(w)} = \sum_{(a_1,\dots,a_n)\in \mathcal{B}_n} x^{a_1+a_2+\cdots+a_n}$$

$$= \sum_{0 \leq a_i \leq i-1} x^{a_1+a_2+\cdots+a_n}$$

$$= \prod_{i=1}^{n} (1+x+x^2+\cdots+x^{i-1}).$$

■

Έστω τώρα $c(w)$ το πλήθος των κύκλων της $w \in \mathfrak{S}_n$. Πόσες μεταθέσεις $w \in \mathfrak{S}_n$ έχουν δοσμένο πλήθος κύκλων;

Για $n \leq 3$,

$w \in \mathfrak{S}_2$	12	21
$c(w)$	2	1

$w \in \mathfrak{S}_3$	123	132	213	312	231	321
$c(w)$	3	2	2	1	1	2

και συνεπώς

$$\sum_{w \in \mathfrak{S}_n} x^{c(w)} = \begin{cases} x, & n=1 \\ x^2+x, & n=2 \\ x^3+3x^2+2x, & n=3. \end{cases}$$

Πρόταση 4.5. Για κάθε $n \geq 1$,

$$\sum_{w \in \mathfrak{S}_n} x^{c(w)} = x(x+1)(x+2)\cdots(x+n-1). \tag{4.1}$$

Ισοδύναμα,

$$\sum_{k=1}^{n} c(n,k)\, x^{k} = x(x+1)(x+2)\cdots(x+n-1),$$

όπου $c(n,k)$ είναι το πλήθος των $w \in \mathfrak{S}_n$ με $c(w) = k$.

Απόδειξη. Αρκεί να δείξουμε την (4.1) για $x \in \mathbb{Z}_{>0}$, αφού αποτελεί ισότητα μεταξύ δύο πολυωνύμων.

Έστω $x \in \mathbb{Z}_{>0}$. Το αριστερό μέλος της (4.1) απαριθμεί τους τρόπους να επιλεγεί μία μετάθεση $w \in \mathfrak{S}_n$ και να χρωματιστεί κάθε κύκλος της με ένα από τα χρώματα $1, 2, \ldots, x$. Κάθε τέτοια επιλογή προκύπτει από μια ανάλογη επιλογή μετάθεσης $u \in \mathfrak{S}_{n-1}$ και χρωματισμού των κύκλων της

- είτε προσθέτοντας στη u τον κύκλο (n) χρωματισμένο με ένα από τα χρώματα $1, 2, \ldots, x$
- είτε παρεμβάλλοντας το n σε κάποιον από τους κύκλους της u με έναν από $n-1$ δυνατούς τρόπους.

Άρα, με κατάλληλη εφαρμογή της Πρότασης 1.4 παίρνουμε

$$\sum_{w \in \mathfrak{S}_n} x^{c(w)} = (x+n-1) \sum_{u \in \mathfrak{S}_{n-1}} x^{c(u)}$$

από όπου η (4.1) προκύπτει άμεσα με επαγωγή στο n. ■

Παράδειγμα 4.6. Για $n \geq 2$,

- $$c(n,2) = [x^2]\, x(x+1)(x+2)\cdots(x+n-1)$$
$$= [x]\ (x+1)(x+2)\cdots(x+n-1)$$
$$= (n-1)!\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n-1}\right).$$

Κάθοδοι. Έστω πάλι $w \in \mathfrak{S}_n$.

Ορισμός 4.7. Κάθοδος της w λέγεται κάθε $i \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ τέτοιο ώστε $w(i) > w(i+1)$.

Γράφουμε

- $\mathrm{Des}(w) = \{1 \le i \le n-1 : w(i) > w(i+1)\}$
- $\mathrm{des}(w) = \# \mathrm{Des}(w)$

για το σύνολο και το πλήθος των καθόδων της $w \in \mathfrak{S}_n$, αντίστοιχα.

Π.χ. αν

$$w = 5 \ 7 \bullet 3 \bullet 2 \ 8 \bullet 1 \ 4 \ 6$$

ως αναδιάταξη, τότε $\mathrm{Des}(w) = \{2,3,5\}$ και $\mathrm{des}(w) = 3$.

$w \in \mathfrak{S}_2$	12	21
$\mathrm{Des}(w)$	$\emptyset$	$\{1\}$
$\mathrm{des}(w)$	0	1

$w \in \mathfrak{S}_3$	123	132	213	312	231	321
$\mathrm{Des}(w)$	$\emptyset$	$\{2\}$	$\{1\}$	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{1,2\}$
$\mathrm{des}(w)$	0	1	1	1	1	2

Ορισμός 4.8. Το

$$A_n(x) = \sum_{w \in \mathfrak{S}_n} x^{\mathrm{des}(w)}$$

λέγεται πολυώνυμο Euler τάξης n.

Π.χ.

$$A_n(x) = \begin{cases} 1, & n=1 \\ 1+x, & n=2 \\ 1+4x+x^2, & n=3 \\ 1+11x+11x^2+x^3, & n=4 \\ 1+26x+66x^2+26x^3+x^4, & n=5 \end{cases}$$

και $A_0(x) = 1$ κατά σύμβαση.

Πρόταση 4.9. Για $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{m \geq 1} m^n x^{m-1} = \frac{A_n(x)}{(1-x)^{n+1}}$$

στο $\mathbb{C}[[x]]$.

Η πρόταση αυτή γενικεύει τις γνωστές ταυτότητες

- $$\sum_{m \geq 0} x^m = \frac{1}{1-x}$$

$$\sum_{m \geq 1} m x^{m-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$$

$$\sum_{m \geq 1} m^2 x^{m-1} = \frac{1+x}{(1-x)^3}$$

$$\sum_{m\geq 1} m^3 x^{m-1} = \frac{1+4x+x^2}{(1-x)^4}$$

κ.ο.κ.

Απόδειξη της Πρότασης 4.9. Θεωρούμε τις αναδιατάξεις της συλλογής με στοιχεία $1,2,\ldots,n$ και $m-1$ αντιτύπων του συμβόλου $\circ$, όπως η

$$2 \circ \circ 4\ 1 \circ 5 \circ \circ \circ 6 \circ 3 \circ$$

για $n=6$ και $m=9$. Έστω $\Gamma(m,n)$ το σύνολο εκείνων χωρίς καθόδους, δηλαδή χωρίς να υπάρχει ζεύγος

(i,j) με $1 \leq i < j \leq n$, με το i να εμφανίζεται ακριβώς δίπλα και στα δεξιά του j.

$$\underbrace{\circ \quad \circ \quad \circ \; \cdots \; \circ}_{m-1}$$

Αν αρχίσουμε πρώτα με τα $m-1$ σύμβολα $\circ$ και παρεμβάλλουμε έπειτα ανάμεσά τους τα $1, 2, \ldots, n$ βρίσκουμε ότι

$$\# \Gamma(m,n) = m^n. \tag{4.2}$$

Από την άλλη, μπορούμε να επιλέξουμε πρώτα μια αναδιάταξη $\omega = (\omega(1), \omega(2), \dots, \omega(n))$ του $\{1, 2, \dots, n\}$ και να παρεμβάλλουμε έπειτα ανάμεσά τους τα σύμβολα $\circ$.

$$\underbrace{\qquad}_{a_0}\ \omega(1)\ \underbrace{\qquad}_{a_1}\ \omega(2)\ \cdots\ \omega(n)\ \underbrace{\qquad}_{a_n}$$

$$\circ\ \circ\ \cdots\ \circ$$

Το πλήθος των $\sigma \in \Gamma(m,n)$ που αντιστοιχούν στη ω είναι ίσο με το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης

$$a_0 + a_1 + \cdots + a_n = m-1$$

όπου

$$a_i \in \begin{cases} \mathbb{Z}_{>0}, & \text{αν } w(i) > w(i+1) \\ \mathbb{N}, & \text{διαφορετικά.} \end{cases} \qquad (4.3)$$

Άρα,

$$\sum_{m\geq 1} m^n x^{m-1} \overset{(4.2)}{=\!=} \sum_{m\geq 1} \#\Gamma(m,n)\, x^{m-1}$$

$$= \sum_{w\in \mathfrak{S}_n} \sum_{(4.3)} x^{a_0+a_1+\cdots+a_n}$$

$$= \sum_{w\in \mathfrak{S}_n} \Big(\sum_{k\geq 1} x^k\Big)^{des(w)} \Big(\sum_{k\geq 0} x^k\Big)^{n+1-des(w)}$$

$$= \sum_{w\in \mathfrak{S}_n} \Big(\frac{x}{1-x}\Big)^{des(w)} \Big(\frac{1}{1-x}\Big)^{n+1-des(w)}$$

$$= \frac{1}{(1-x)^{n+1}} \sum_{w \in \mathfrak{S}_n} x^{\mathrm{des}(w)}.$$

$$= \frac{A_n(x)}{(1-x)^{n+1}}. \quad \blacksquare$$

Παρατήρηση 4.10. Τα πολυώνυμα του Euler εμφανίζονται σε διάφορα μαθηματικά προβλήματα. Π.χ. είναι γνωστό (από την εποχή του Laplace) ότι αν

- $R_{n,k} = \{ (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n :$
  $0 \le x_i \le 1$ για $1 \le i \le n$
  $k \le x_1 + x_2 + \cdots + x_n \le k+1 \}$

τότε

$$\mathrm{vol}(R_{n,k}) = \frac{1}{n!}[x^k]A_n(x)$$

για κάθε $k \in \{0,1,\ldots,n-1\}$. ∎

Θα περιγράψουμε μια ακόμα σημαντική συνδυαστική ερμηνεία του $A_n(x)$ ως εξής.

Έστω $w \in \mathfrak{S}_n$.

Ορισμός 4.11. Υπέρβαση της w λέγεται κάθε $i \in \{1,2,\ldots,n\}$ τέτοιο ώστε $w(i) > i$.

Γράφουμε

- $\mathrm{Exc}(w) = \{1 \leqslant i \leqslant n : w(i) > i\}$
- $\mathrm{exc}(w) = \# \mathrm{Exc}(w)$.

$w \in \mathfrak{S}_2$	12	21
$\mathrm{Exc}(w)$	$\emptyset$	$\{1\}$
$\mathrm{exc}(w)$	0	1

$w \in \mathfrak{S}_3$	123	132	213	312	231	321
$\mathrm{Exc}(w)$	$\emptyset$	$\{2\}$	$\{1\}$	$\{1\}$	$\{1,2\}$	$\{1\}$
$\mathrm{exc}(w)$	0	1	1	1	2	1

οπότε $\displaystyle\sum_{w \in \mathfrak{S}_n} x^{\mathrm{exc}(w)} = A_n(x)$ για $n \leqslant 3$.

Πρόταση 4.12. Για κάθε $n \geq 1$,

$$\sum_{w \in \mathfrak{S}_n} x^{\mathrm{exc}(w)} = \sum_{w \in \mathfrak{S}_n} x^{\mathrm{des}(w)} = A_n(x).$$

Λήμμα 4.13. Για $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$,

$$[x^k]\, A_n(x) = [x^{n-1-k}]\, A_n(x).$$

Απόδειξη. Η αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση $i : \mathfrak{S}_n \to \mathfrak{S}_n$ με

$$i(w) = (w_n, w_{n-1}, \ldots, w_1)$$

για $w = (w_1, w_2, \ldots, w_n) \in \mathfrak{S}_n$ επάγει μια 1-1 αντιστοιχία από το σύνολο των $w \in \mathfrak{S}_n$ με $\mathrm{des}(w) = k$ σε εκείνο των $u \in \mathfrak{S}_n$ με $\mathrm{des}(u) = n-1-k$.

■

Απόδειξη της Πρότασης 4.12. Θεωρούμε $w \in \mathfrak{S}_n$ και τη γράφουμε σε κυκλική μορφή, έτσι ώστε το ελάχιστο στοιχείο κάθε κύκλου να εμφανίζεται πρώτο από αριστερά και τα ελάχιστα στοιχεία των κύκλων να εμφανίζονται σε φθίνουσα διάταξη. Π.χ. αν $n = 9$ και $w = (9, 8, 4, 1, 7, 6, 5, 2, 3)$ ως αναδιάταξη,

τότε

$$w = (6)(57)(28)(1934)$$

σε αυτή τη μορφή. Συμβολίζουμε με $\varphi(w) \in \mathfrak{S}_n$ την αναδιάταξη που προκύπτει διαγράφοντας τις παρενθέσεις των κύκλων και παρεμβάλλοντας κόμματα ανάμεσα στα $1, 2, \ldots, n$. Για το προηγούμενο παράδειγμα,

$$\varphi(w) = (6,5,7,2,8,1,9,3,4).$$

Παρατηρούμε ότι για κάθε $u \in \mathfrak{S}_n$ υπάρχει μοναδική $w \in \mathfrak{S}_n$ με $\varphi(w) = u$: ένας κύκλος της w αποτελείται από τους ακεραίους ασθενώς στα δεξιά του 1 στη u, όταν αυτή παριστάνεται ως αναδιάταξη, και οι υπόλοιποι κύκλοι της w καθορίζονται παρόμοια. Άρα, η $\varphi: \mathfrak{S}_n \to \mathfrak{S}_n$ είναι αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση.

Παρατηρούμε τέλος ότι για $u, w \in \mathfrak{S}_n$ με $\varphi(w) = u$ έχουμε $w(j) > j$ εάνν η u έχει άνοδο στη θέση στην οποία βρίσκεται το j. Έπεται ότι

- $\#\{w \in \mathfrak{S}_n : \mathrm{exc}(w) = k\} =$

  $\#\{u \in \mathfrak{S}_n : \mathrm{des}(u) = n-k-1\} =$

  $\#\{u \in \mathfrak{S}_n : \mathrm{des}(u) = k\}$

για κάθε $k \in \{0, 1, \dots, n\}$. ■

Άσκηση 4.14. Έστω $k \in [n]$. Επιλέγουμε τυχαία και ομοιόμορφα μια μετάθεση $w \in \mathfrak{S}_n$. Ποια είναι η πιθανότητα να έχει μήκος k ο κύκλος της w που περιέχει το 1;

Πρώτη Λύση. Ας απαριθμήσουμε τις μεταθέσεις με την επιθυμητή ιδιότητα. Υπάρχουν $\binom{n-1}{k-1}$ τρόποι να επιλέξει κανείς τα στοιχεία του κύκλου που περιέχει το 1, $(k-1)!$ τρόποι να σχηματίσει αυτόν τον κύ-

κλο και $(n-k)!$ τρόποι να μετα-
θέσει τα υπόλοιπα στοιχεία του $[n]$ ώστε να σχηματισθούν οι υπόλοιποι κύκλοι. Άρα, το ζητούμενο πλήθος ισούται με

$$\binom{n-1}{k-1}(k-1)!\,(n-k)! = (n-1)!$$

και η ζητούμενη πιθανότητα με $(n-1)!/n! = 1/n$ (ανεξάρτητη του k).

Δεύτερη Λύση. Η αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση της απόδειξης της Πρότασης 4.12 δείχνει ότι

η ζητούμενη πιθανότητα ισού-
ται με εκείνη να ισχύει $\sigma_{n-k+1} = 1$ όταν η

$$\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$$

επιλέγεται τυχαία και ομοιόμορφ- ανάμεσα στις $n!$ αναδιατάξεις του $[n]$. Η πιθανότητα αυτή εί- ναι προφανώς ίση με $1/n$ για κάθε $k \in [n]$. ■

Πρόταση 4.15. Το πολυώνυμο $A_n(x)$ έχει μόνο πραγματικές ρίζες για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Απόδειξη. Παρατηρούμε ότι

- $$\frac{d}{dx}\left(x \sum_{m \geq 1} m^n x^{m-1} \right) =$$

$$= \sum_{m \geq 1} m^{n+1} x^{m-1}.$$

Λόγω της Πρότασης 4.9, η ισότητα αυτή γράφεται ισοδύναμα ως

$$\frac{d}{dx} \cdot \frac{x A_n(x)}{(1-x)^{n+1}} = \frac{A_{n+1}(x)}{(1-x)^{n+2}}. \qquad (4.4)$$

Εφαρμόζουμε επαγωγή στο n. Έστω ότι το $A_n(x)$ έχει μόνο απλές πραγματικές ρίζες $\zeta_{n-1} <$ $\zeta_{n-2} < \cdots < \zeta_1 < 0$. Τότε, η

$$\frac{x A_n(x)}{(1-x)^{n+1}}$$

έχει ρίζες

$$\zeta_{n-1} < \zeta_{n-2} < \cdots < \zeta_1 < \zeta_0 = 0.$$

Αφού

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x A_n(x)}{(1-x)^{n+1}} = 0$$

από το Θεώρημα του Rolle συμπεραίνουμε ότι το αριστερό μέλος της (4.4), άρα και το $A_{n+1}(x)$, έχει ρίζες $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ με

$$\xi_n < \zeta_{n-1} < \xi_{n-1} < \cdots < \zeta_1 < \xi_1 < 0,$$

άρα η απλές (αρνητικές) πραγματικές ρίζες. ■

Παρατήρηση 4.16. Η (4.4) γράφεται ισοδύναμα

- $$A_{n+1}(x) = (1+nx)A_n(x) + x(1-x)\frac{d}{dx}A_n(x).$$

5. Εκθετικές Γεννήτριες Συναρτήσεις

Για $f : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ (ισοδύναμα, για ακολουθία $f(0), f(1), f(2), \ldots$ μιγαδικών αριθμών γράφουμε

$$E_f(x) = \sum_{n \geq 0} f(n) \frac{x^n}{n!} \in \mathbb{C}[[x]]$$

για την εκθετική γεννήτρια συνάρτηση της f. Π.χ. αν $f(n) = 2^n$, $g(n) = n!$ και $h(n) = 2^n n!$ για $n \in \mathbb{N}$, τότε

- $E_f(x) = \sum_{n \geq 0} 2^n \frac{x^n}{n!} = e^{2x}$

- $E_g(x) = \sum_{n \geq 0} n! \frac{x^n}{n!} = \frac{1}{1-x}$

- $E_h(x) = \sum_{n \geq 0} 2^n n! \frac{x^n}{n!} = \sum_{n \geq 0} (2x)^n$

$$= \frac{1}{1-2x}.$$

Υπενθυμίζουμε ότι

$$\left(\sum_{n \geq 0} a_n x^n \right) \left(\sum_{n \geq 0} b_n x^n \right) = \sum_{n \geq 0} c_n x^n$$

στο $\mathbb{C}[[x]]$, όπου

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}.$$

θέτοντας

$$\begin{cases} a_n = f(n)/n! \\ b_n = g(n)/n! \end{cases}$$

για $n \in \mathbb{N}$ προκύπτει ο κανόνας

$$E_f(x)\,E_g(x) = \sum_{n\geq 0} h(n)\,\frac{x^n}{n!}$$

όπου

- $$h(n) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f(k)}{k!} \cdot \frac{g(n-k)}{(n-k)!}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f(k)\,g(n-k) \qquad (5.1)$$

Πρόταση 5.1. Δοσμένων των $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ ορίζουμε την $h : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ με

$$h(\# X) = \sum_{(S,T)} f(\# S)\, g(\# T),$$

όπου X είναι πεπερασμένο σύνολο και το άθροισμα στο δεξιό μέλος διατρέχει τις ασθενείς διατεταγμένες διαμερίσεις (S,T) του X, δηλαδή τα ζεύγη (S,T) με $S, T \subseteq X$, $S \cap T = \emptyset$ και $S \cup T = X$. Τότε,

$$E_h(x) = E_f(x)\, E_g(x).$$

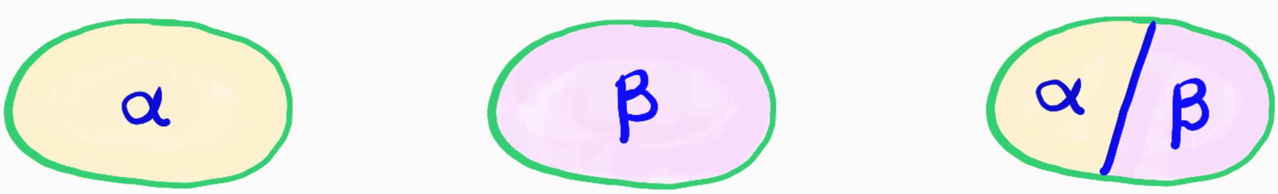
Απόδειξη. Έστω $\# X = n$. Υπάρχουν

$\binom{n}{k}$ ζεύγη (S,T) με $\#S = k$ και $\#T = n-k$, οπότε

$$h(n) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f(k)\, g(n-k),$$

σε συμφωνία με την (5.1). ■

Σχηματικά,



"α δομές" "β δομές" "α/β δομές"

αν οι f και g απαριθμούν κάποιες α και β δομές στο X, αντίστοιχα, τότε η h απαριθμεί α/β δομές, δηλαδή ασθενείς διαμερίσεις (S,T) του X με μια α δομή στο S και μια β δομή στο T.

Παράδειγμα 5.2. Για σύνολο X με $\#X = n$, έστω $h(n)$ το πλήθος των τρόπων να χωριστεί το X σε υποσύνολα S, T με $S \cap T = \emptyset$ και $S \cup T = X$ και να επιλεγεί μια αναδιάταξη του S και ένα υποσύνολο του T.

Υπάρχουν $f(k) = k!$ τρόποι να αναδιατάξει κανείς ένα σύνολο με k στοιχεία και $g(k) = 2^k$ τρόποι να επιλέξει ένα υποσύνολό του. Από αυτά και την Πρόταση 5.1 έπεται ότι

- $$\sum_{n\geq 0} h(n)\frac{x^n}{n!} =$$

$$= \left(\sum_{n\geq 0} f(n)\frac{x^n}{n!}\right)\left(\sum_{n\geq 0} g(n)\frac{x^n}{n!}\right)$$

$$= \left(\sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!}\right)\left(\sum_{n\geq 0} 2^n\frac{x^n}{n!}\right)$$

$$= \frac{e^{2x}}{1-x}.$$

Παράδειγμα 5.3. Για απεικόνιση φ: $X \to X$ συμβολίζουμε με

$$\mathrm{Fix}(\varphi) = \{x \in X : \varphi(x) = x\}$$

το σύνολο των σταθερών σημείων της φ. Θα υπολογίσουμε το πλήθος των μεταθέσεων $w \in \mathfrak{S}_n$ με $\mathrm{Fix}(w) = \emptyset$.

Παρατηρούμε ότι κάθε $w \in \mathfrak{S}_n$ ορίζει την ασθενή διαμέριση (S, T) του $[n]$ με

- $S = \{i \in [n] : w(i) \neq i\}$
- $T = \{j \in [n] : w(j) = j\}$.

Ορίζουμε τις $f, g, h : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ έτσι ώστε για κάθε πεπερασμένο σύνολο X

- $f(\#X) = \#\{\omega \in \mathfrak{S}(X) : \mathrm{Fix}(\omega) = \varnothing\}$
- $g(\#X) = \#\{\omega : X \to X, \ \mathrm{Fix}(\omega) = X\}$
- $h(\#X) = \#\mathfrak{S}(X)$,

όπου $\mathfrak{S}(X)$ είναι το σύνολο όλων των μεταθέσεων $\omega : X \to X$. Για τις f, g, h ισχύει η υπόθεση της Πρότασης 5.1, οπότε

$$E_h(x) = E_f(x)\, E_g(x).$$

Αφού $g(n) = 1$ και $h(n) = n!$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, έχουμε

- $$E_g(x) = \sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!} = e^x$$

- $$E_h(x) = \sum_{n \geq 0} n! \frac{x^n}{n!} = \frac{1}{1-x}$$

οπότε

$$\sum_{n \geq 0} f(n) \frac{x^n}{n!} = E_f(x) = \frac{e^{-x}}{1-x}.$$

Γράφοντας

$$\frac{e^{-x}}{1-x} = \left(\sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{x^n}{n!} \right) \left(\sum_{n \geq 0} n! \frac{x^n}{n!} \right)$$

προκύπτει ο γνωστός τύπος

- $$g(n) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k (n-k)!$$

$$= n! \left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \cdots + \frac{(-1)^n}{n!} \right)$$

για το πλήθος των $\omega \in \mathfrak{S}_n$ χωρίς σταθερά σημεία.

Πρόταση 5.4. Δοσμένων των $f_1, f_2, \ldots, f_k : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$, ορίζουμε την $h : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ με

$$h(\#X) = \sum_{(S_1, \ldots, S_k)} f_1(\#S_1) \cdots f_k(\#S_k)$$

για πεπερασμένο σύνολο X, όπου το άθροισμα στο δεξιό μέλος διατρέχει τις ασθενείς διατεταγμένες διαμερίσεις $(S_1, \dots, S_k)$ του X, δηλαδή $S_i \cap S_j = \emptyset$ για $i \neq j$ και $X = S_1 \cup S_2 \cup \dots \cup S_k$. Τότε,

$$E_h(x) = \prod_{i=1}^{k} E_{f_i}(x).$$

Απόδειξη. Άμεση με επαγωγή στο k, δεδομένης της Πρότασης 5.1 (περίπτωση $k=2$). ■

Π.χ. αν $f_i(n) = 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και κάθε $i \in [k]$, τότε $E_{f_i}(x) = e^x$ για κάθε i και συνεπώς

- $$\sum_{n \geq 0} h(n) \frac{x^n}{n!} = \prod_{i=1}^{k} E_{f_i}(x) = e^{kx}$$

$$= \sum_{n \geq 0} \frac{k^n x^n}{n!}.$$

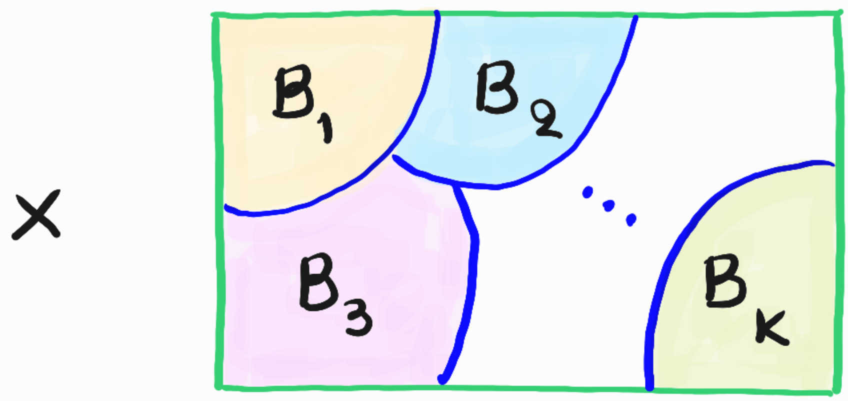
Άρα, $h(n) = k^n$ για $n \in \mathbb{N}$, όπως θα περίμενε κανείς.

Ορισμός 5.5. Διαμέριση συνόλου X λέγεται κάθε σύνολο

$$\pi = \{B_1, B_2, \ldots, B_k\}$$

ξένων ανά δύο, μη κενών υποσυνόλων του X με $B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_k = X$.

Τα υποσύνολα B_i λέγονται μέρη της π. Συμβολίζουμε με $\Pi(X)$ το σύνολο όλων των διαμερίσεων του X.



Π.χ. για $X = \{a, b, c\}$ έχουμε τις διαμερίσεις

- $\{abc\}$
- $\{ab, c\}$, $\{ac, b\}$, $\{bc, a\}$
- $\{a, b, c\}$,

όπου $abc\cdots = \{a, b, c, \ldots\}$ για συντομία.

Συμβολίζουμε με $B(n)$ και $S(n,k)$ το πλήθος των διαμερίσεων του $[n]$ και εκείνων με k μέρη, αντίστοιχα (αριθμοί Bell και Stirling του δεύτερου είδους). Π.χ.

- $B(3) = 5$
- $S(3,1) = 1$, $S(3,2) = 3$, $S(3,3) = 1$.

Πρόταση 5.6. Έχουμε

$$\sum_{n \geq 0} S(n,k) \frac{x^n}{n!} = \frac{1}{k!} (e^x - 1)^k \qquad (5.2)$$

για $k \in \mathbb{N}$ και

$$\sum_{n\geq 0} B(n)\frac{x^n}{n!} = e^{e^x-1}. \qquad (5.3)$$

Απόδειξη. Θεωρούμε τις $f_1, f_2, \dots, f_k : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ με

$$f_i(n) = \begin{cases} 0, & n=0 \\ 1, & n\geq 1 \end{cases}$$

για $n \in \mathbb{N}$ και $i \in [k]$. Από την Πρόταση 5.4 παίρνουμε

$$E_h(x) = \prod_{i=1}^{k} E_{f_i}(x)$$

όπου

- $h(n) := \sum_{(S_1,\ldots,S_k)} f_1(\# S_1) \cdots f_k(\# S_k)$

$= k! \, \#\{$ διαμερίσεις $\{S_1,\ldots,S_k\}$ του $[n]\}$

$= k! \, S(n,k).$

Αφού

$$E_{f_i}(x) = \sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n!} = e^x - 1$$

για κάθε $i \in [k]$, έπεται ότι

$$\sum_{n \geq 0} k! \, S(n,k) \frac{x^n}{n!} = (e^x - 1)^k,$$

δηλαδή η (5.2). Κατά συνέπεια,

- $$\sum_{n\geq 0} B(n)\frac{x^n}{n!} = \sum_{n\geq 0}\Big(\sum_{k\geq 0} S(n,k)\Big)\frac{x^n}{n!}$$

$$= \sum_{k\geq 0}\Big(\sum_{n\geq 0} S(n,k)\Big)\frac{x^n}{n!}$$

$$= \sum_{k\geq 0}\frac{1}{k!}(e^x-1)^k$$

$$= \exp(e^x-1). \quad \blacksquare$$

Πόρισμα 5.7.

$$S(n,k) = \frac{1}{k!}\sum_{i=0}^{k}(-1)^{k-i}\binom{k}{i} i^n.$$

Απόδειξη. Παρατηρούμε ότι

- $$(e^x-1)^k = \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} \binom{k}{i} e^{ix}$$

$$= \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} \binom{k}{i} \sum_{n\geq 0} \frac{i^n x^n}{n!}$$

και εξισώνουμε τους συντελεστές του $x^n/n!$ στα δύο μέλη της (5.2). ■

Θεώρημα 5.8 (Τύπος Συνθέσεως)
Δοσμένων των $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ με $f(0)=0$ και $g(0)=1$, ορίζουμε την $h : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ θέτοντας $h(0)=1$ και

$$h(\# X) = \sum_{\{B_1,\dots,B_k\}\in \Pi(X)} f_1(\# B_1)\cdots f_k(\# B_k)\, g(k) \qquad (5.4)$$

όπου $\Pi(X)$ είναι το σύνολο των διαμερίσεων $\pi = \{B_1, \ldots, B_k\}$ του πεπερασμένου συνόλου X. Τότε,

$$E_h(x) = E_g(E_f(x)).$$

Απόδειξη. Έστω $\# X = n$ και έστω $h_k(n)$ το δεξιό μέλος της (5.4). για σταθερό k. Αφού τα $B_1, \ldots, B_k$ είναι μη κενά, άρα διαφορετικά ανά δύο, από την Πρόταση 5.4 παίρνουμε

$$k!\, E_{h_k}(x) = g(k)\,(E_f(x))^k.$$

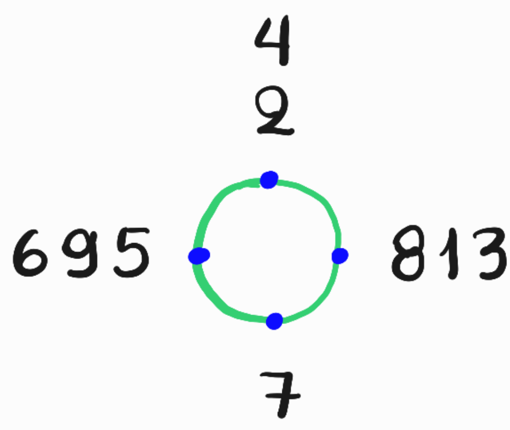
Έπεται ότι

- $$E_h(x) = \sum_{k \geq 0} E_{h_k}(x)$$

$$= \sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!} g(k) (E_f(x))^k$$

$$= E_g(E_f(x)). \blacksquare$$

Παράδειγμα 5.9. Έστω $h(n)$ το πλήθος των τρόπων με τους οποίους n μαθητές μπορούν να χωριστούν σε μη κενές γραμμές και μετά οι γραμμές να διαταχθούν σε κυκλική διάταξη. Π.χ. για $n=9$



Υπάρχουν $f(k) = k!$ τρόποι να διαταχθούν γραμμικά k μαθητές και $g(k) = (k-1)!$ τρόποι να διαταχθούν κυκλικά k διαφορετικά αντικείμενα. Συνεπώς, σύμφωνα με την Πρόταση 5.8

$$E_h(x) = E_g(E_f(x)),$$

όπου

$$E_f(x) = \sum_{n \geq 1} n! \frac{x^n}{n!} = \frac{x}{1-x}$$

και

- $$E_g(x) = 1 + \sum_{n \geq 1} (n-1)! \frac{x^n}{n!}$$

$$= 1 + \sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n}$$

$$= 1 + \log \frac{1}{1-x}.$$

Άρα,

- $$\sum_{n \geq 0} h(n) \frac{x^n}{n!} = E_h(x) = E_g(E_f(x))$$

$$= 1 + \log \frac{1}{1 - x/(1-x)}$$

$$= 1 + \log \frac{1-x}{1-2x}$$

$$= 1 + \log \frac{1}{1-2x} - \log \frac{1}{1-x}$$

$$= 1 + \sum_{n \geq 1} \frac{(2x)^n}{n} - \sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n}$$

$$= 1 + \sum_{n \geq 1} (2^n - 1)(n-1)! \frac{x^n}{n!}$$

και συνεπώς $h(n) = (2^n - 1)(n-1)!$ για κάθε $n \in \mathbb{Z}_{>0}$. ■

Πόρισμα 5.10 (Εκθετικός Τύπος)

Δοσμένης της $f : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ με $f(0) = 0$ ορίζουμε την $h : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ θέτοντας $h(0) = 1$ και

$$h(\#X) = \sum_{\{B_1, \ldots, B_k\} \in \Pi(X)} f_1(\#B_1) \cdots f_k(\#B_k) \quad (5.5)$$

για μη κενό, πεπερασμένο σύνολο X. Τότε,

$$E_h(x) = \exp(E_f(x)).$$

Απόδειξη. Είναι η ειδική περίπτωση $g(n)=1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ή, ισοδύναμα, $E_g(x) = e^x$, του Θεωρήματος 5.8.

■

Παράδειγμα 5.11. Έστω ότι $f(0)=0$ και $f(n) = (n-1)!\,t$ για $n \geq 1$. Από την (5.5) παίρνουμε

- $$h(n) = \sum_{w \in \mathfrak{S}_n} t^{c(w)} = \sum_{k=1}^{n} c(n,k)\,t^k$$
$$:= C_n(t)$$

και συνεπώς

$$E_h(x) = 1 + \sum_{n\geq 1} c_n(t) \frac{x^n}{n!}.$$

Επίσης,

- $$E_f(x) = \sum_{n\geq 1} (n-1)!\, t \frac{x^n}{n!}$$

$$= t \sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{n} = t \log \frac{1}{1-x}$$

και ο εκθετικός τύπος δίνει

- $$1 + \sum_{n\geq 1} c_n(t) \frac{x^n}{n!} = \exp\left(t \log \frac{1}{1-x}\right)$$

$$= (1-x)^{-t} = \sum_{n\geq 0} \binom{-t}{n} (-x)^n$$

$$= \sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{(-t)(-t-1)\cdots(-t-n+1)}{n!} x^n$$

$$= \sum_{n \geq 0} \frac{t(t+1)\cdots(t+n-1)}{n!} x^n.$$

Έπεται ότι $c_n(t) = t(t+1)\cdots(t+n-1)$, δηλαδή η Πρόταση 4.5. ■

Παράδειγμα 5.12. Έστω a_n το πλήθος των μεταθέσεων $w \in \mathfrak{S}_n$ με $w^{-1} = w$ (αυτοαντίστροφες μεταθέσεις) ή, ισοδύναμα, το πλήθος των απεικονίσεων $w : [n] \to [n]$ με

$$w(w(x)) = x$$

για κάθε $x \in [n]$. Έχουμε $a_0 = a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 4$, $a_4 = 10$.

Προφανώς, η $w \in \mathfrak{S}_n$ είναι αυτοαντίστροφη εάνν κάθε κύκλος στην κυκλική της παράσταση έχει ένα ή δύο στοιχεία. Π.χ. για $n = 7$ η $w = (14)(2)(37)(56)$ είναι αυτοαντίστροφη, αλλά η $u = (14)(2)(375)(6)$ δεν είναι. Έπεται ότι

$$a_n = \sum_{\{B_1, \ldots, B_k\} \in \Pi([n])} f_1(\# B_1) \cdots f_k(\# B_k)$$

για $n \geq 1$, όπου

$$f(n) = \begin{cases} 1, & \text{αν } n \in \{1,2\} \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

για $n \in \mathbb{N}$. Από τα παραπάνω και τον εκθετικό τύπο συμπεραίνουμε ότι

- $$\sum_{n \geq 0} a_n \frac{x^n}{n!} = \exp(E_f(x))$$

$$= \exp\left(\sum_{n \geq 1} f(n) \frac{x^n}{n!} \right)$$

$$= \exp\left(x + \frac{x^2}{2} \right)$$

$$= e^{x + x^2/2}. \qquad (5.6)$$

Πόρισμα 5.13. Έστω a_n το πλήθος των μεταθέσεων $w \in \mathfrak{S}_n$ με $w^{-1} = w$.

(α) $a_{n+1} = a_n + n a_{n-1}$ για $n \geq 1$.

(β) $a_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{2k} \frac{(2k)!}{2^k k!}$ για $n \in \mathbb{N}$.

Απόδειξη. Παραγωγίζουμε την **(5.6)** και βρίσκουμε ότι

- $$\sum_{n \geq 1} a_n \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = \frac{d}{dx} e^{x + x^2/2}$$

$$= (1+x) e^{x + x^2/2}$$

$$= (1+x) \sum_{n \geq 0} a_n \frac{x^n}{n!}$$

$$= \sum_{n \geq 0} a_n \frac{x^n}{n!} + \sum_{n \geq 1} a_n \frac{x^n}{(n-1)!}.$$

Εξισώνουμε τους συντελεστές του $x^n/n!$ στα δύο ακραία μέλη αυτής της σειράς ισοτήτων και προκύπτει το (α). Για το (β) γράφουμε

- $$\sum_{n \geq 1} a_n \frac{x^n}{n!} = e^{x + x^2/2} = e^x \cdot e^{x^2/2}$$

$$= \left(\sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!} \right) \left(\sum_{n \geq 0} \frac{x^{2n}}{2^n n!} \right)$$

και συμπεραίνουμε ότι

- $a_n = n!\,[x^n]\, e^{x + x^2/2}$

$$= \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{n!}{2^k\, k!\,(n-2k)!},$$

δηλαδή το ζητούμενο.

Άσκηση 5.14. Δείξτε τον τύπο του Euler

$$\sum_{n \geq 0} A_n(x) \frac{t^n}{n!} = \frac{(1-x)\, e^{(1-x)t}}{1 - x\, e^{(1-x)t}}$$

όπου $A_n(x) = \sum_{w \in \mathfrak{S}_n} x^{\mathrm{des}(w)}$ για $n \geq 1$

και $A_0(x) := 1$.

Λύση. Εφαρμόζουμε την ταυτότητα

$$\sum_{m\geq 1} m^n x^{m-1} = \frac{A_n(x)}{(1-x)^{n+1}}$$

της Πρότασης 4.9 και βρίσκουμε ότι

- $$\sum_{n\geq 0} A_n(x)\frac{t^n}{n!} =$$

$$= (1-x)^{n+1}\left(\sum_{m\geq 1} m^n x^{m-1}\right)\frac{t^n}{n!}$$

$$= (1-x)\sum_{m\geq 1} x^{m-1}\sum_{n\geq 0}\frac{m^n(1-x)^n t^n}{n!}$$

$$= (1-x) \sum_{m \geqslant 1} x^{m-1} e^{m(1-x)t}$$

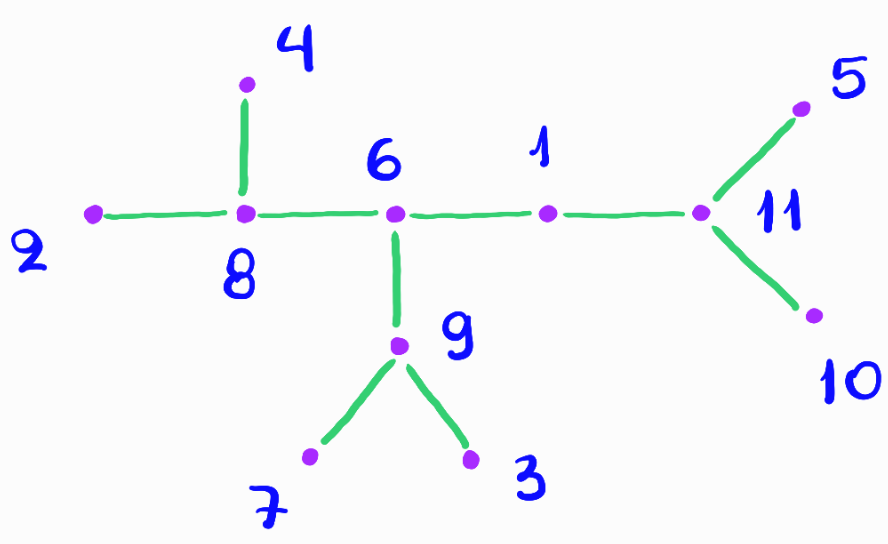
$$= (1-x) \sum_{m \geqslant 0} x^{m} e^{(m+1)(1-x)t}$$

$$= (1-x) e^{(1-x)t} \sum_{m \geqslant 0} x^{m} e^{m(1-x)t}$$

$$= \frac{(1-x) e^{(1-x)t}}{1-x e^{(1-x)t}} .$$

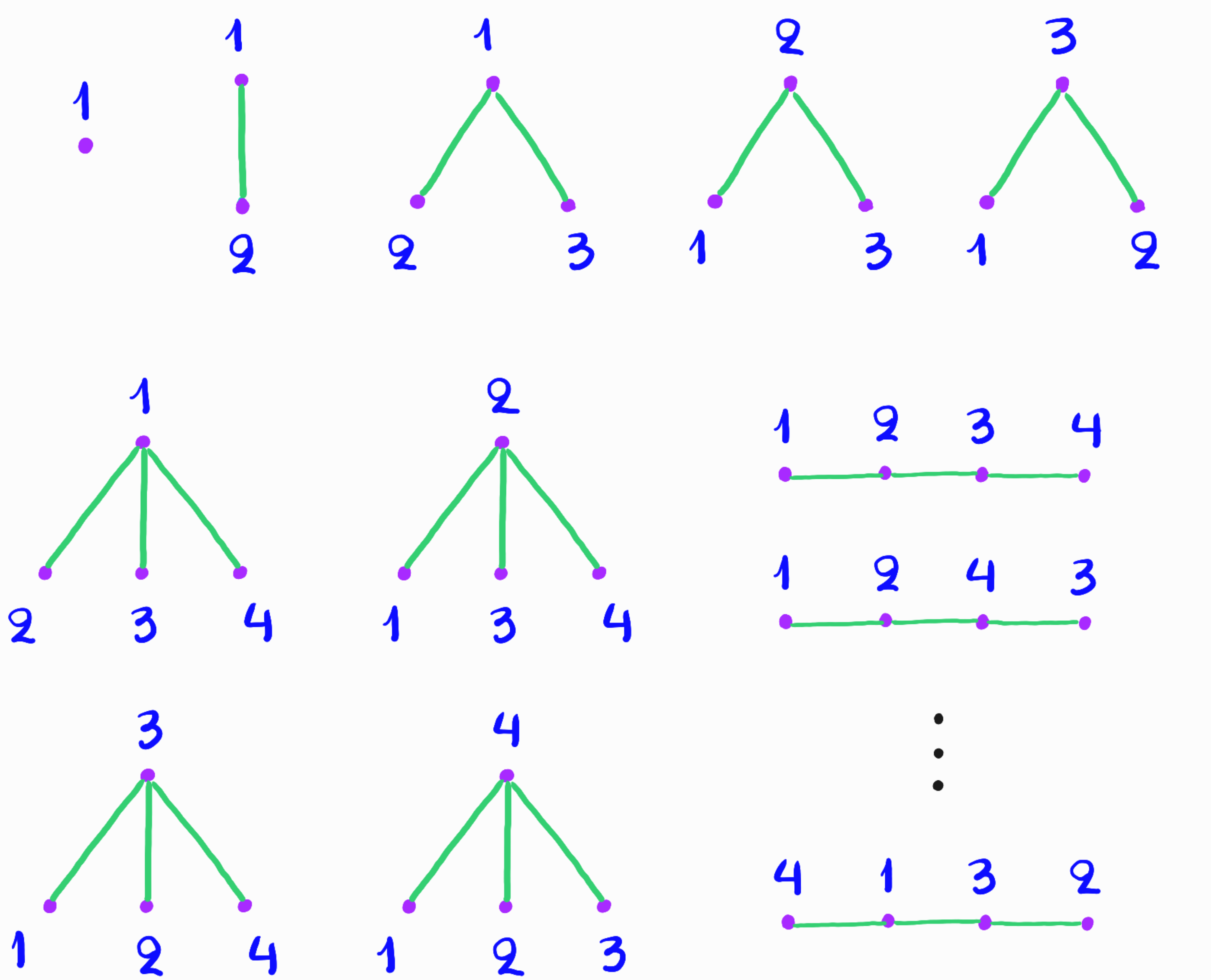
6. Αντιστροφή Lagrange

Έστω σύνολο V με n στοιχεία. Δένδρο επί του V λέγεται κάθε απλό γράφημα με σύνολο κορυφών V το οποίο είναι συνεκτικό και έχει ακριβώς $n-1$ ακμές. Π.χ. το

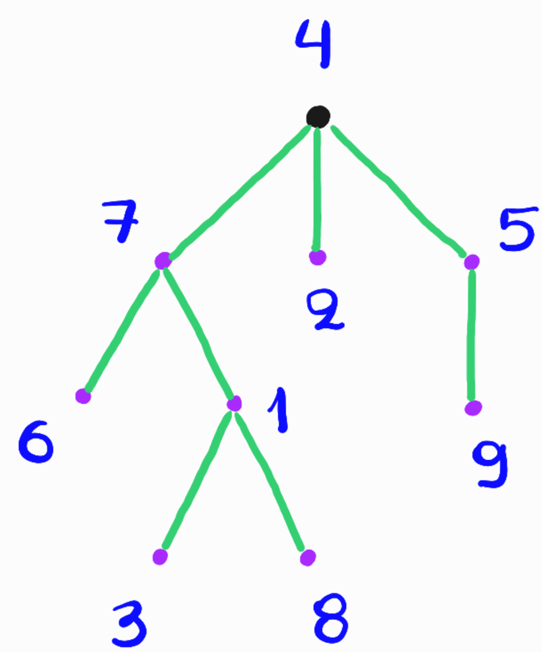


είναι δένδρο επί του $V=[11]$.

Έστω $t(n)$ το πλήθος των δένδρων επί του συνόλου κορυφών $[n]$. Έχουμε $t(1) = t(2) = 1$, $t(3) = 3$, $t(4) = 16$ και $t(5) = 125$.



Θα δείξουμε ότι $t(n) = n^{n-2}$ για κάθε n. Δένδρο με ρίζα (ή ριζωμένο δένδρο) επί του V λέγεται ένα δένδρο επί του V το οποίο έχει μια διακεκριμένη κορυφή, τη ρίζα. Π.χ. το

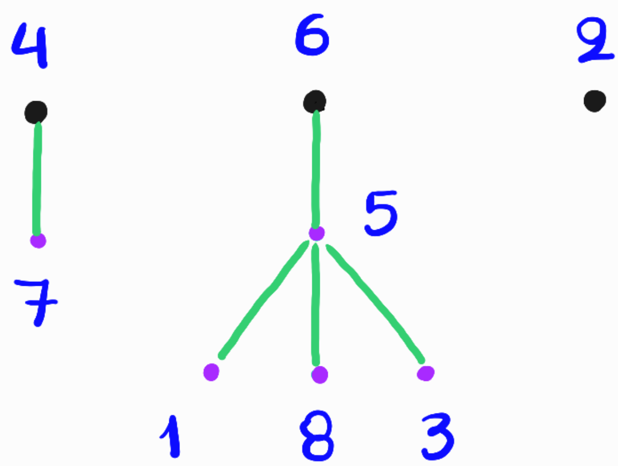


είναι δένδρο επί του $[9]$ με ρίζα το 4. Προφανώς

$$r(n) = n \cdot t(n), \qquad (6.1)$$

όπου $r(n)$ είναι το πλήθος των δέν-
δρων με ρίζα επί του $[n]$.

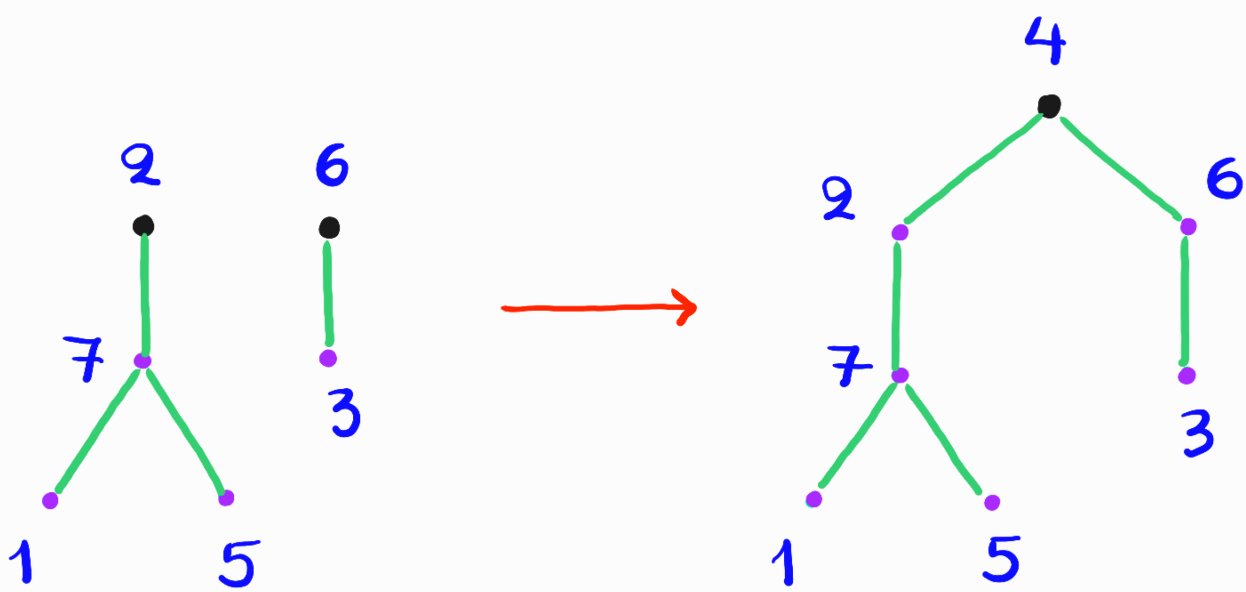
Η ξένη ένωση δένδρων (με ρίζα) λέγεται δάσος (με ρίζες). Π.χ. το



είναι δάσος με ρίζες επί του συνόλου κορυφών $[8]$. Αν $p(n)$ είναι το πλήθος των δασών με ρίζες επί του $[n]$, τότε

$$r(n) = n \cdot p(n-1). \tag{6.2}$$

Πράγματι, αφαιρώντας τη ρίζα $k \in [n]$ από ένα ριζωμένο δένδρο επί του $[n]$ προκύπτει δάσος με ρίζες (οι γειτονικές κορυφές της ρίζας k) επί του συνόλου κορυφών $[n] \setminus \{k\}$, το καθένα ακριβώς μία φορά.



Πρόταση 6.1. Αν $R(x) = \sum_{n \geq 1} r(n) x^n / n!$, τότε

$$R(x) = x \exp(R(x)). \tag{6.3}$$

Απόδειξη. Από τον εκθετικό τύπο παίρνουμε

$$\exp(R(x)) = \sum_{n\geq 0} p(n)\frac{x^n}{n!}$$

όπου $p(0) := 1$. Κατά συνέπεια,

- $$x\exp(R(x)) = \sum_{n\geq 0} p(n)\frac{x^{n+1}}{n!}$$

$$= \sum_{n\geq 1} p(n-1)\frac{x^n}{(n-1)!}$$

$$= \sum_{n\geq 1} n\,p(n-1)\frac{x^n}{n!}$$

$$\overset{(6.2)}{=\!=} \sum_{n\geq 1} r(n)\frac{x^n}{n!} = R(x). \quad \blacksquare$$

Θέτοντας $y=R(x)$, η (6.3) γράφεται ισοδύναμα
$$x = y e^{-y},$$
το οποίο σημαίνει ότι η $y=R(x)$ είναι η αντίστροφη της xe^{-x} ως προς την πράξη της σύνθεσης (compositional inverse).

Ορισμός 6.2. Έστω
$$F(x) = \sum_{n\geq 1} a_n x^n \in x\mathbb{C}[[x]].$$

Αντίστροφη της $F(x)$ ως προς τη σύνθεση λέγεται κάθε τυπική δυναμοσειρά $G(x) \in x\mathbb{C}[[x]]$ τέτοια ώστε
$$F(G(x)) = G(F(x)) = x.$$

Π.χ. αν $F(x) = \sum_{n\geq 1} x^n = x/(1-x)$, τότε

$$F(y) = x \Leftrightarrow y = x/(1+x).$$

Άρα, η $F(x)$ είναι αντιστρέψιμη ως προς τη σύνθεση, και μοναδική αντίστροφή της είναι η

$$G(x) = \frac{x}{1+x} = \sum_{n\geq 1} (-1)^{n-1} x^n.$$

Πρόταση 6.3. Για την τυπική δυναμοσειρά $F(x) = \sum_{n\geq 1} a_n x^n \in x\mathbb{C}[[x]]$ τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(i) Η $F(x)$ είναι αντιστρέψιμη ως προς τη σύνθεση.

(ii) Υπάρχει $G(x) \in x\mathbb{C}[[x]]$ τέτοια ώστε $F(G(x)) = x$.

(iii) Υπάρχει $G(x) \in x\mathbb{C}[[x]]$ τέτοια ώστε $F(G(x)) = x$.

(iv) $a_1 \neq 0$.

Απόδειξη. Θέτουμε $G(x) = \sum_{n\geq 1} b_n x^n$ και παρατηρούμε ότι

- $$F(G(x)) = \sum_{n\geq 1} a_n (G(x))^n$$
$$= \sum_{n\geq 1} a_n (b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + \dots)^n$$
$$= a_1 b_1 x + (a_1 b_2 + a_2 b_1^2) x^2 + \dots$$

Συνεπώς, η ισότητα $F(G(x)) = x$ είναι ισοδύναμη με το σύστημα

$$\begin{cases} a_1 b_1 & = 1 \\ a_1 b_2 + a_2 b_1^2 & = 0 \\ a_1 b_3 + 2 a_2 b_1 b_2 + a_3 b_1^3 & = 0 \\ \vdots & \\ a_1 b_n + \cdots + a_n b_1^n & = 0 \end{cases}$$

Το σύστημα αυτό έχει λύση $(b_1, b_2, \ldots)$ αν και μόνο αν $a_1 \neq 0$. Αυτό δείχνει ότι (ii) $\Leftrightarrow$ (iv). Ομοίως προκύπτει ότι (iii) $\Leftrightarrow$ (iv). Οι συνεπαγωγές (i) $\Rightarrow$ (ii) και (i) $\Rightarrow$ (iii) είναι τετριμμένες.

Μένει να δείξουμε ότι (ii), (iii) $\Rightarrow$ (iv).

Πράγματι, έστω ότι υπάρχουν $G(x)$, $H(x) \in x\mathbb{C}[[x]]$ τέτοια ώστε $F(G(x)) = x$ και $H(F(x)) = x$. Τότε,

$$G(x) = H(F(G(x))) = H(x)$$

και συνεπώς η $F(x)$ είναι αντιστρέψιμη ως προς τη σύνθεση, με αντίστροφη τη $G(x) = H(x)$. ■

Συμβολισμός. Η μοναδική αντίστροφη, ως προς τη σύνθεση, της $F(x)$, όταν υπάρχει, συμβολίζεται με $F^{\langle -1 \rangle}(x)$.

Π.χ. λύνοντας την $F(y) = x$ βρίσκουμε ότι

- $(e^x - 1)^{\langle -1 \rangle} = \log(1+x)$
- $\left(\dfrac{x}{1-ax}\right)^{\langle -1 \rangle} = \dfrac{x}{1+ax}$.

Ο τύπος αντιστροφής του Lagrange δίνει έναν τρόπο να υπολογιστούν οι συντελεστές της $F^{\langle -1 \rangle}(x)$ και γενικότερα, κάθε δύναμής της.

Θεώρημα 6.4 (Αντιστροφή Lagrange) Έστω $F(x) = \sum_{n \geq 1} a_n x^n \in x\mathbb{C}[[x]]$, με $a_1 \neq 0$.

Για $k, n \in \mathbb{Z}$

$$n[x^n](F^{\langle -1 \rangle}(x))^k = k[x^{n-k}]\left(\frac{x}{F(x)}\right)^n.$$

Ισοδύναμα, αν $G(x) \in \mathbb{C}[[x]]$ με $G(0) \neq 0$ και η $f(x) \in x\mathbb{C}[[x]]$ ορίζεται από την

$$f(x) = x\,G(f(x)),$$

τότε

$$n\,[x^n]\,(f(x))^k = k\,[x^{n-k}]\,(G(x))^n.$$

Παρατήρηση 6.5. Οι δύο μορφές του Θεωρήματος είναι ισοδύναμες διότι για $G(x) = x/F(x)$,

$$f(x) = x\,G(f(x)) \iff f(x) = F^{\langle -1 \rangle}(x).$$

Πόρισμα 6.6 (Τύπος Cayley-Sylvester) Για $n \geq 1$, $r(n) = n^{n-1}$ και $t(n) = n^{n-2}$.

Απόδειξη. Έστω $R(x) = \sum_{n\geq 1} r(n)x^n/n!$ Στην Πρόταση 6.1 δείξαμε ότι

$$R(x) = (xe^{-x})^{\langle -1\rangle}.$$

Εφαρμόζουμε το Θεώρημα 6.4 για $F(x) = xe^{-x}$ και παίρνουμε

- $$\frac{r(n)}{n!} = [x^n]\,R(x) = [x^n]\,F^{\langle -1\rangle}(x)$$

$$= \frac{1}{n}[x^{n-1}]\left(\frac{x}{F(x)}\right)^n \quad \frac{1}{n}[x^{n-1}]\,e^{nx}$$

$$= \frac{1}{n}[x^{n-1}]\,e^{nx}$$

$$= \frac{1}{n}[x^{n-1}]\sum_{m\geq 0}\frac{1}{m!}n^m x^m$$

$$= n^{n-1}/n!$$

Έπεται ότι $r(n) = n^{n-1}$ και επομένως ότι $t(n) = r(n)/n = n^{n-2}$ για $n \in \mathbb{Z}_{>0}$. ■

Απόδειξη του Θεωρήματος 6.4. Κρίσιμη παρατήρηση: αν

$$y = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n x^n$$

είναι τυπική δυναμοσειρά Laurent, τότε $[x^{-1}]\, y' = 0$. Έστω

$$(F^{\langle -1 \rangle}(x))^k = \sum_{i \geq k} p_i x^i$$

οπότε

$$x^k = \sum_{i \geq k} p_i (F(x))^i.$$

Παραγωγίζουμε ως προς x και παίρνουμε

$$kx^{k-1} = \sum_{i \geq k} i p_i F'(x) (F(x))^{i-1}$$

ή, ισοδύναμα,

$$\frac{kx^{k-1}}{(F(x))^n} = \sum_{i \geq k} i p_i F'(x) (F(x))^{i-n-1} \quad (6.4)$$

Τα δύο μέλη της (6.4) νοούνται ως τυπικές δυναμοσειρές με πεπερασμένου πλήθους μονώνυμα με αρνητικούς εκθέτες, π.χ.

- $$\frac{kx^{k-1}}{(F(x))^n} = \frac{kx^{k-1}}{(a_1 x + a_2 x^2 + \cdots)^n}$$

$$= \frac{k x^{k-n-1}}{(a_1 + a_2 x + \cdots)^n}.$$

Εξισώνουμε τους συντελεστές του x^{-1} στα δύο μέλη της (6.4) και βρίσκουμε ότι το

$$k [x^{n-k}] \left(\frac{x}{F(x)} \right)^n$$

είναι ίσο με

$$n p_n [x^{-1}] F'(x) (F(x))$$

διότι

- $[x^{-1}] F'(x) (F(x))^{i-n-1}$

$$= \frac{1}{i-n} [x^{-1}] \frac{d}{dx} (F(x))^{i-n} = 0$$

για $i \neq n$, σύμφωνα με την αρχική μας παρατήρηση. Τέλος, υπολογίζουμε ότι

- $n p_n [x^{-1}] F'(x)(F(x))$

$$= n p_n [x^{-1}] \frac{a_1 + 2a_2 x + \cdots}{a_1 x + a_2 x^2 + \cdots}$$

$$= n p_n [x^0] \frac{a_1 + 2a_2 x + \cdots}{a_1 + a_2 x + \cdots}$$

$$= n p_n$$

$$= n [x^n] (F^{\langle -1 \rangle}(x))^k. \quad \blacksquare$$

Παράδειγμα 6.7. Ας βρούμε τις τυπικές δυναμοσειρές $y = G(x) \in \mathbb{C}[[x]]$ που ικανοποιούν την εξίσωση

$$y^p - y + x = 0 \qquad (6.5)$$

όπου $p \geq 2$ είναι ακέραιος.

Παρατηρούμε ότι (6.5) $\Leftrightarrow y - y^p = x \Leftrightarrow F(G(x)) = x$, όπου $F(x) = x - x^p$. Άρα, $G(x) = F^{\langle -1 \rangle}(x)$. Εφαρμόζουμε το Θεώρημα 6.4 και την ταυτότητα

$$\frac{1}{(1-x)^{k+1}} = \sum_{n \geq 0} \binom{n+k}{k} x^n$$

του Παραδείγματος 2.14 και βρίσκουμε ότι

- $$[x^n]G(x) = \frac{1}{n}[x^{n-1}]\left(\frac{x}{F(x)}\right)^n$$

$$= \frac{1}{n}[x^{n-1}](1-x^{p-1})^n$$

$$= \frac{1}{n}[x^{n-1}]\sum_{m\geq 0}\binom{m+n-1}{m}x^{(p-1)m}$$

για $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ και συνεπώς ότι

$$G(x) = \sum_{m\geq 0}\frac{1}{(p-1)m+1}\binom{pm}{m}x^{(p-1)m+1}.$$

Γενικότερα,

- $$[x^n](G(x))^k = \frac{k}{n}[x^{n-k}]\left(\frac{x}{F(x)}\right)^n$$

$$= \frac{k}{n} [x^{n-k}] \sum_{m \geq 0} \binom{m+n-1}{m} x^{(p-1)m}$$

και συνεπώς

- $(G(x))^k =$

$$= \sum_{m \geq 0} \frac{k}{(p-1)m+k} \binom{pm+k-1}{m} x^{(p-1)m+k}.$$

Παράδειγμα 6.8. Έστω c_n το πλήθος των τριγωνισμών ενός κυρτού πολυγώνου με $n+2$ κορυφές και έστω

$$C(x) = \sum_{n \geq 0} c_n x^n = 1 + x + 2x^2 + 5x^3 + \cdots$$

Στο Παράδειγμα 3.14 δείξαμε ότι

$$C(x) = 1 + x(C(x))^2. \qquad (6.6)$$

Θέτοντας $f(x) = C(x) - 1 = \sum_{n\geq 1} C_n x^n$, η (6.6) γράφεται

- $f(x) = x(1+f(x))^2 \Leftrightarrow$
  $f(x) = x\,G(f(x))$,

όπου $G(x) = (1+x)^2$. Από τη δεύτερη μορφή του Θεωρήματος 6.4 συμπεραίνουμε ότι

- $C_n = [x^n]\, f(x) = \frac{1}{n}[x^{n-1}](G(x))^n$

$$= \frac{1}{n}[x^{n-1}](1+x)^{2n} = \frac{1}{n}\binom{2n}{n-1}$$

$$= \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}.$$

Επιπλέον, για κάθε $k \in \mathbb{Z}_{>0}$·

- $$[x^n](f(x))^k = \frac{k}{n}[x^{n-k}](G(x))^n$$
$$= \frac{k}{n}[x^{n-k}](1+x)^{2n}$$
$$= \frac{k}{n}\binom{2n}{n-k}$$

για $n \geq 1$. Δείξαμε την ταυτότητα

$$\left(\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}x^n\right)^k = \sum_{n\geq k}\frac{k}{n}\binom{2n}{n-k}x^n.$$

Αφού το αριστερό μέλος γράφεται ως
$(C(x)-1)^k = (xC(x)^2)^k = x^k(C(x))^{2k}$,
προκύπτει επίσης η ταυτότητα

$$\left(\sum_{n\geq 0}\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}x^n\right)^{2k} =$$

$$= \sum_{n\geq 0}\frac{k}{n+k}\binom{2n+2k}{n}x^n.$$

Πόρισμα 6.9. Αν $p_k(n)$ είναι το πλήθος των ριζωμένων δασών επί του συνόλου κορυφών $[n]$ με k συνεκτικές συνιστώσες, τότε

$$p_k(n) = k\binom{n}{k}n^{n-k-1}.$$

Απόδειξη. Έστω $R(x) = \sum_{n\geq 1} r(n)x^n/n!$ και $F(x) = xe^{-x}$.

Από την Πρόταση 5.3 έχουμε

$$\frac{1}{k!}(R(x))^k = \sum_{n\geq 1} p_k(n)\frac{x^n}{n!}$$

και συνεπώς

- $$p_k(n) = \frac{n!}{k!}[x^n](R(x))^k$$

$$= \frac{n!}{k!}[x^n](F^{\langle -1\rangle}(x))^k$$

$$= \frac{n!}{k!}\cdot\frac{k}{n}[x^{n-k}]\left(\frac{x}{F(x)}\right)^n$$

$$= \frac{n!}{k!}\cdot\frac{k}{n}[x^{n-k}]\,e^{nx}$$

$$= \frac{n!}{k!}\cdot\frac{k}{n}\cdot\frac{n^{n-k}}{(n-k)!}$$

$$= k\binom{n}{k}n^{n-k-1}.$$ ■