Συνδυαστική Θεωρία

Τρίτη Ομάδα Ασκήσεων

Άσκηση 1. Έστω $f_i(m,n)$ το πλήθος των $m \times n$ πινάκων με στοιχεία 0 ή 1, οι οποίοι έχουν μη μηδενικές γραμμές ή στήλες και άθροισμα στοιχείων ίσο με i. Δείξτε ότι

- $$\sum_{i \geq 0} f_i(m,n)\, t^i = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \left((1+t)^{n-k} - 1\right)^m .$$

Λύση. Για δοσμένα m, n, i και για $S \subseteq [n]$, έστω $\alpha(S)$ και $\beta(S)$ το πλήθος των $m \times n$ πινάκων X με στοιχεία 0 ή 1 και μη μηδενικές γραμμές, οι οποίοι έχουν άθροισμα στοιχείων ίσο με i και επιπλέον, για $j \in [n]$,

- η j-στήλη του X είναι μηδενική για κάθε $i \in S$
- η j-στήλη του X είναι μηδενική $\Leftrightarrow j \in S$,

αντίστοιχα. Τότε,

$$\alpha(S) = \sum_{S \subseteq T} \beta(T)$$

για κάθε $S \subseteq [n]$ και $f_i(m,n) = \beta(\varnothing)$. Από την αρχή Εγκλεισμού-Αποκλεισμού συμπεραίνουμε ότι

- $f_i(m,n) = \beta(\varnothing)$

$$= \sum_{T \subseteq [n]} (-1)^{|T|} \alpha(T)$$

$$= \sum_{i=0}^{n} (-1)^{k} \binom{n}{k} g_i(m, n-k)$$

όπου $g_i(m,n)$ είναι το πλήθος

των $m \times n$ πινάκων με στοιχεία 0 ή 1, οι οποίοι έχουν μη μηδενικές γραμμές και άθροισμα στοιχείων ίσο με i. Μένει να δείξουμε ότι

$$g_i(m,n) = [t^i]\,((1+t)^n - 1)^m$$

ή, ισοδύναμα, ότι

$$\sum_{i \geq 0} g_i(m,n)\, t^i = ((1+t)^n - 1)^m.$$

Αυτό ισχύει αφού (εξηγήστε γιατί)

- $\sum_{i\geq 0} g_i(m,n)t^i = \left(\sum_{i\geq 0} g_i(1,n)t^i\right)^m$

$$= \left((1+t)^n - 1\right)^m.$$

Άσκηση 2. Σωστό ή λάθος; Για μερικώς διατεταγμένα σύνολα P, Q, R, S:

(α) $P \cong R$ και $Q \cong S \Rightarrow P\times Q \cong R\times S$

(β) $P\times Q \cong R\times S \Rightarrow P \cong R$ και $Q \cong S$

Λύση. (α) Σωστό. Αν $\varphi : P \to R$ και $\psi : Q \to S$ είναι ισομορφισμοί μερικώς διατεταγμένων συνόλων, τότε το ίδιο ισχύει για την απεικόνιση

$$\omega : P \times Q \to R \times S$$

με $\omega(x,y) = (\varphi(x), \psi(y))$ για $x \in P$ και $y \in Q$, αφού για $x, x' \in P$ και $y, y' \in Q$,

- $\omega(x,y) \leq_{R\times S} \omega(x',y') \iff$

$$(\varphi(x), \psi(y)) \leq_{R\times S} (\varphi(x'), \psi(y'))$$

$$\iff \begin{cases} \varphi(x) \leq_R \varphi(x') \\ \psi(y) \leq_Q \psi(y') \end{cases} \iff \begin{cases} x \leq_P x' \\ y \leq_Q y' \end{cases}$$

$$\iff (x,y) \leq_{P\times Q} (x',y').$$

(β) Λάθος, αφού $P \times Q \cong Q \times P$ για όλα τα P, Q. π.χ.

Άσκηση 3. Έστω P_n το σύνολο των κλειστών διαστημάτων στην άλγεβρα Boole B_n, μερικώς διατεταγμένο με τη σχέση του εγκλεισμού.

(α) Δείξτε ότι το P_n είναι διαβαθμισμένο τάξης n.

(β) Δείξτε ότι το P_n έχει 3^n στοιχεία και υπολογίστε τη γεννήτρια συνάρτηση της τάξης του.

Λύση. (α) Ισχύει διότι οι μεγιστικές αλυσίδες του P_n είναι της μορφής

- $$[S_1, T_1] \subset [S_2, T_2] \subset \cdots \subset [S_m, T_m] = [\varnothing, [n]]$$

με $S_1 = T_1$ και

$$\#(T_{k+1} \setminus S_{k+1}) = \#(T_k \setminus S_k) + 1$$

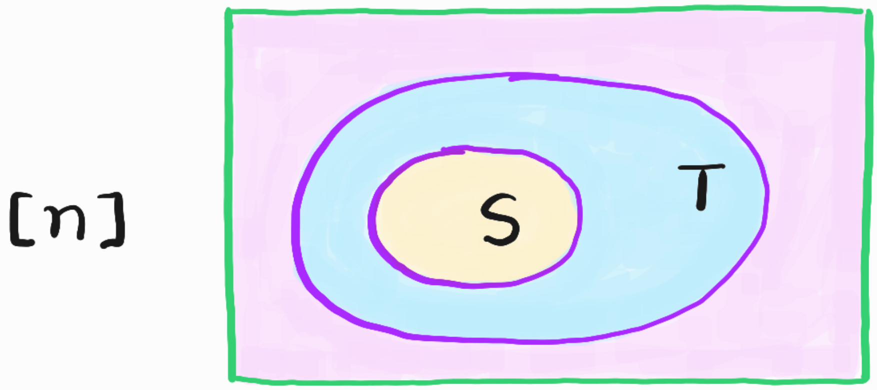
για κάθε $k \in [m-1]$ και συνεπώς έχουν όλες μήκος $m = n$. Π.χ. για

$n=4$ έχουμε την

- $[\{2,4\},\{2,4\}] \subset [\{2\},\{2,4\}] \subset$
  $[\{2\},\{1,2,4\}] \subset [\{2\},\{1,2,3,4\}] \subset$
  $[\emptyset,\{1,2,3,4\}]$.

(β) Όπως προκύπτει από το (α), τα στοιχεία τάξης k του P_n είναι τα διαστήματα $[S,T]$ με $S \subseteq T \subseteq [n]$ και $\#T = \#S + k$. Το πλήθος τους ισούται με $\binom{n}{k} 2^{n-k}$ διότι για την επιλογή ενός τέτοιου ζεύγους (S,T) υπάρχουν

- $\binom{n}{k}$ επιλογές για τα k στοιχεία του $T \setminus S$ και για κάθε τέτοια
- 2^{n-k} επιλογές για τα υπόλοιπα $n-k$ στοιχεία $a \in [n]$, δηλαδή $a \in S$ ή $a \in [n] \setminus T$.



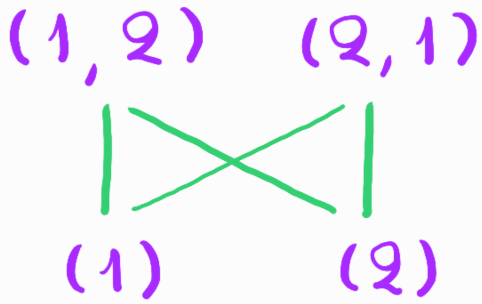
Άρα,

- $$F(P_n, y) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^{n-k} y^k$$
$$= (y+2)^n.$$

Ειδικότερα, $\# P_n = F(P_n, 1) = 3^n$.

Άσκηση 4. Έστω Q_n το σύνολο των ακολουθιών $(a_1, a_2, \dots, a_k)$ διακεκριμένων στοιχείων του $[n]$, εφοδιασμένο με τη μερική διάταξη $x \preceq y \Leftrightarrow$ η x είναι υποακολουθία της y. Π.χ.

$Q_2 =$



(α) Δείξτε ότι το P_n είναι διαβαθμισμένο τάξης $n-1$. Πόσα είναι τα στοιχεία τάξης κ;

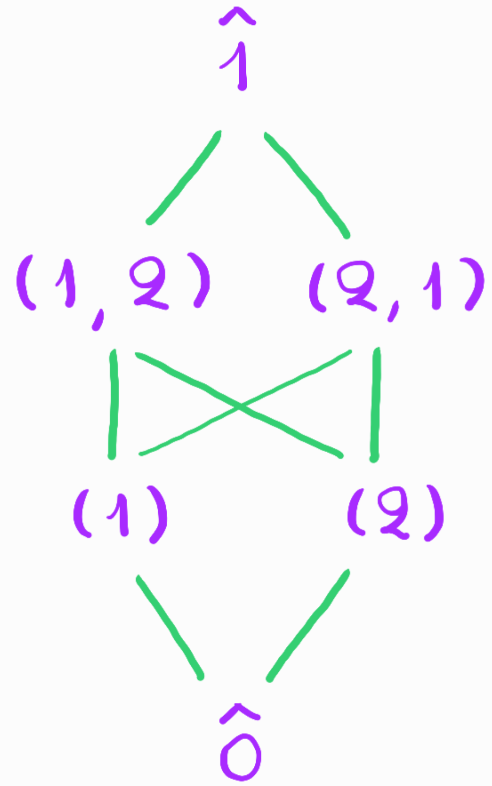
(β) Πόσες μεγιστικές αλυσίδες έχει το Q_n;

(γ) Δείξτε ότι

- $\mu_{\hat{Q}_n}(\hat{0},\hat{1}) = (-1)^{n+1} \#\{$ μεταθέσεις $w \in \mathfrak{S}_n$ χωρίς σταθερά σημεία $\}$

όπου $\hat{Q}_n = Q_n \sqcup \{\hat{0},\hat{1}\}$. π.χ.

$\hat{Q}_2 =$



Λύση. **(αβ)** Οι μεγιστικές αλυσίδες της Q_n προκύπτουν από καθεμιά από τις $n!$ αναδιατάξεις $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$ του $[n]$ διαγράφοντας διαδοχικά ένα ένα τα στοιχεία σ_i με $n!$ τρόπους. Άρα, έχουν όλες μήκος $n-1$ και το πλήθος τους ισούται με $(n!)^2$.

Για $n=4$ έχουμε πχ την $(2,4,1,3) \succ (2,4,1) \succ (2,1) \succ (2)$.

Τα στοιχεία τάξης $k-1$ της Q_n είναι οι ακολουθίες $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ διακεκριμένων στοιχείων του $[n]$, το πλήθος των οποίων ισούται με $n(n-1)\cdots(n-k+1) = n!/(n-k)!$

(γ) Παρατηρούμε ότι για κάθε $x \in \hat{Q}_n \setminus \{\hat{1}\}$ τάξης k, το κλειστό διάστημα $[\hat{0}, x]$ είναι ισόμορφο με την άλγεβρα Boole B_k (εξηγήστε γιατί), οπότε $\mu_{\hat{Q}_n}(\hat{0}, x) = (-1)^k$. Κατά συνέπεια, από τον ορισμό της συνάρτησης Möbius συμπεραίνουμε ότι

- $$\mu_{\hat{Q}_n}(\hat{0}, \hat{1}) = -\sum_{\substack{x \in \hat{Q}_n \\ x \neq \hat{1}}} \mu_{\hat{Q}_n}(\hat{0}, x)$$

$$= - \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{(n-k)!} (-1)^k$$

$$= (-1)^{n+1} \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \frac{n!}{(n-k)!}$$

$= (-1)^{n+1}$ $\#\{$ μεταθέσεις $w \in \mathfrak{S}_n$ χωρίς σταθερά σημεία $\}$.

'Ασκηση 5. Θεωρούμε αντιαλυσίδες $Q_1, Q_2, \ldots, Q_m$ με $a_1, a_2, \ldots, a_m$ στοιχεία, αντίστοιχα, και το διατακτικό άθροισμα

$$P = Q_1 \oplus Q_2 \oplus \cdots \oplus Q_m$$

Υπολογίστε το $\mu_{\hat{P}}(\hat{0},\hat{1})$, όπου $\hat{P} = P \sqcup \{\hat{0},\hat{1}\}$.

Λύση. Ας εφαρμόσουμε το θεώρημα του P. Hall. Για $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq m$ υπάρχουν $a_{i_1} a_{i_2} \cdots a_{i_k}$ αλυσίδες στο P τα στοιχεία των οποίων έχουν τάξεις $i_1 - 1, i_2 - 1, \ldots, i_k - 1$. Επομένως,

- $$\mu_{\hat{P}}(\hat{0},\hat{1}) = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq m} (-1)^{k-1} a_{i_1} a_{i_2} \cdots a_{i_k}$$

$$= (-1)^{m-1} (a_1 - 1)(a_2 - 1) \cdots (a_m - 1).$$