# Συνδυαστική Θεωρία
# Τέταρτη Ομάδα Ασκήσεων

**Άσκηση 1.** Δίνεται τοπικά πεπερασμένο και διαβαθμισμένο μερικώς διατεταγμένο σύνολο P. Αν $f, g \in I(P)$ με

- $f(x,y) = (-1)^{\rho(x,y)}$
- $g(x,y) = \sum_{x \leq z \leq y} (-1)^{\rho(z,y)} \mu_P(x,z)$

για $x, y \in P$ με $x \leq y$, όπου $\rho(x,y)$ είναι η τάξη του $[x,y]$, υπολογίστε τις $f^{-1}, g^{-1} \in I(P)$.

**Λύση.** Θεωρούμε την $h \in I(P)$ με

$$h(x,y) = (-1)^{\rho(x,y)} \mu_P(x,y)$$

για $x, y \in P$ με $x \leq y$. Υπολογίζουμε ότι

- $$(fh)(x,y) = \sum_{x \leq z \leq y} f(x,z)\, h(z,y)$$

$$= \sum_{x \leq z \leq y} (-1)^{\rho(x,z)} (-1)^{\rho(z,y)} \mu_P(z,y)$$

$$= \sum_{x \leq z \leq y} (-1)^{\rho(x,y)} \mu_P(z,y)$$

$$= (-1)^{\rho(x,y)} \sum_{x \leq z \leq y} \mu_P(z,y)$$

$$= (-1)^{\rho(x,y)} \quad \delta_p(x,y) = \delta_p(x,y)$$

$$= \begin{cases} 1, & x = y \\ 0, & x < y \end{cases}$$

και συνεπώς $f^{-1} = h$. Παρατηρούμε επίσης ότι $g = \mu_p \cdot f \in I(P)$, οπότε

$$g^{-1} = (\mu_p \cdot f)^{-1} = f^{-1} \cdot \mu_p^{-1} = h \cdot \zeta_p$$

στη $I(P)$, δηλαδή

- $$g^{-1}(x,y) = \sum_{x \leq z \leq y} h(x,z)\,\zeta_p(z,y)$$

$$= \sum_{x \leq z \leq y} h(x,z)$$

$$= \sum_{x \le z \le y} (-1)^{\rho(x,z)} \mu_P(x,z)$$

για $x, y \in P$ με $x \le y$.

**Άσκηση 2.** Έστω $Q_n$ το σύνολο των κλειστών διαστημάτων στην άλγεβρα Boole $B_n$, μερικώς διατεταγμένο με τη σχέση του εγκλεισμού (όπου $\emptyset \in Q_n$).

**(α)** Δείξτε ότι το $Q_n$ είναι σύνδεσμος.

**(β)** Υπολογίστε το $\mu_{Q_n}(\hat{0}, \hat{1})$, όπου $\hat{0} = \emptyset$ και $\hat{1} = 2^{[n]}$.

**Λύση.** **(α)** Το $Q_n$ έχει ελάχιστο στοιχείο $\hat{0} = \emptyset$ και δύο οποιαδήποτε μη κενά κλειστά διαστήματα $[S,T]$ και $[U,V]$ στη $B_n$ έχουν κατώτατο άνω φράγμα

$$[S,T] \vee [U,V] = [S \cap U, T \cup V]$$

στο $Q_n$ αφού για $X \subseteq Y \subseteq [n]$,

$$\begin{cases} [S,T] \subseteq [X,Y] \\ [U,V] \subseteq [X,Y] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X \subseteq S, \; T \subseteq Y \\ X \subseteq U, \; V \subseteq Y \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} X \subseteq S, \; X \subseteq U \\ T \subseteq Y, \; V \subseteq Y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X \subseteq S \cap U \\ T \cup V \subseteq Y. \end{cases}$$

(β) Για κάθε μη κενό $x = [S,T] \in Q_n$ το κλειστό διάστημα $[x, \hat{1}]$ του $Q_n$ είναι ισόμορφο με την άλγεβρα Boole τάξης $n-|T|+|S|$ αφού για $X\subseteq Y\subseteq [n]$,

- $$[S,T]\subseteq[X,Y] \Leftrightarrow \begin{cases} X\subseteq S \\ T\subseteq Y \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} X\subseteq S \\ [n]\setminus T\subseteq [n]\setminus Y. \end{cases}$$

Κατά συνέπεια $\mu_{Q_n}(x,\hat{1})=(-1)^{n-k}$, όπου $k=|T\setminus S|$ είναι η τάξη του $x$ στο $Q_n-\{\hat{0}\}$. Αφού υπάρχουν ακριβώς $\binom{n}{k}2^{n-k}$ στοιχεία τάξης $k$ στο $Q_n-\{\hat{0}\}$, από τη (10.2) των διαλέξεων συμπεραίνουμε ότι

- $$\mu_{Q_n}(\hat{0},\hat{1}) = -\sum_{x\in Q_n-\{\hat{1}\}} \mu_{Q_n}(x,\hat{1})$$

$$= -\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^{n-k} (-1)^{n-k}$$

$$= -(1-2)^n = (-1)^{n+1}.$$

Άσκηση 3. Σωστό ή λάθος;

(α) Αν $L$ είναι πεπερασμένος upper semimodular σύνδεσμος και το $x \in L$ είναι ίσο με το κατώτατο άνω φράγμα κάποιων ατόμων του $L$, τότε $\mu_L(\hat{0},x)\neq 0$.

(β) Ομοίως για lower semimodular συνδέσμους $L$.

Λύση. (α) Σωστό. Από το θεώρημα NBC γνωρίζουμε ότι

$$(-1)^{\rho(x)} \mu_L(\hat{0}, x) = \# NBC(x),$$

οπότε αρκεί να δείξουμε ότι $NBC(x) \neq \emptyset$, δηλαδή ότι υπάρχει τουλάχιστον μία NBC βάση του $x$.

Παρατηρούμε πρώτα ότι υπάρχει τουλάχιστον μία βάση του $x$. Πράγματι, αν $E$ είναι το σύνολο των ατόμων του $L$, θεωρούμε ελαχιστικό $S \subseteq E$ με $\vee S = x$. Το $S$ είναι ανεξάρτητο, άρα βάση του $x$, διότι διαφορετικά θα περιείχε κύκλωμα $C$ και θα είχαμε

$$\vee(S-\{a\}) = \vee S = x$$

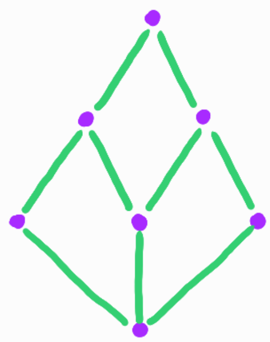
για κάθε $a \in C$.

Από όλες τις βάσεις του $x$ θεωρούμε τη λεξικογραφικά μικρότερη, έστω $S$, ως προς την ολική διάταξη $<_\omega$ του $E$, και παρατηρούμε ότι αυτή είναι NBC. Πράγματι, αν η $S$ περιείχε σπασμένο κύκλωμα $C\setminus\{a\}$, όπου $a \in C$ είναι το ελάχιστο στοιχείο του κυκλώματος $C$ ως προς την $<_\omega$, τότε

$$\vee(C\setminus\{a\}) = \vee(C\setminus\{b\})$$

για κάθε $b \in C\setminus\{a\}$ και συνεπώς το $(S\setminus\{b\})\cup\{a\}$ θα ήταν βάση του $x$ λεξικογραφικά μικρότερη της $S$.

(β) Λάθος. Αντιπαράδειγμα είναι π.χ. το

$L =$ 

**Άσκηση 4.** Υπολογίστε το πλήθος των περιοχών του παρατάγματος των γραμμικών υπερεπιπέδων του $\mathbb{R}^n$ που ορίζονται από τις εξισώσεις

$$\begin{cases} x_i = 0, & 1 \le i \le n \\ x_i - x_j = 0, & 1 \le i < j \le n. \end{cases}$$

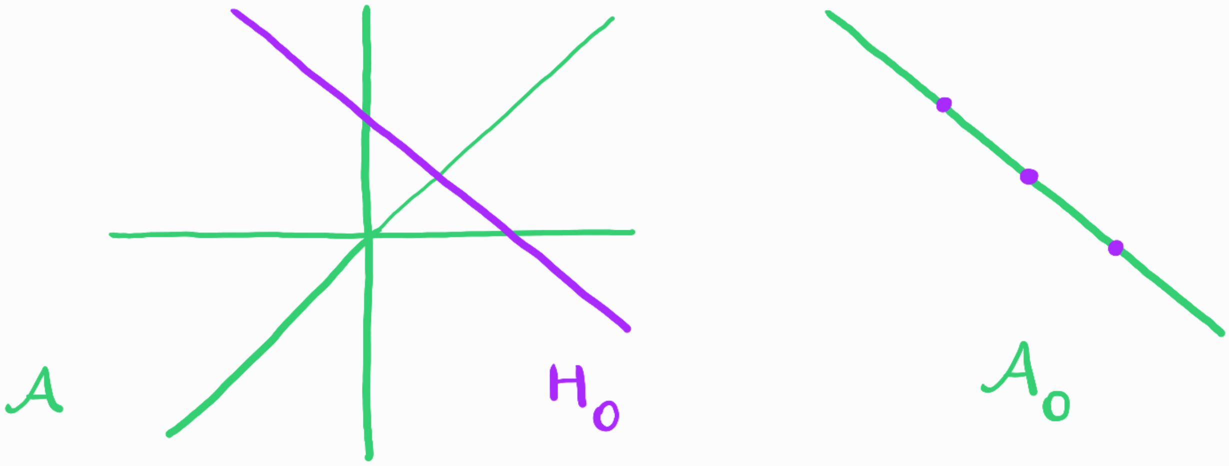
**Λύση.** Εφαρμόζοντας το σκεπτικό στο Παράδειγμα 12.10 (β) των διαλέξεων βρίσκουμε ότι οι περιοχές βρίσκονται σε 1-1 αντιστοιχία με τα $n+1$ αντικείμενα $x_1, x_2, \ldots, x_n, 0$ και συνεπώς ότι το πλήθος τους ισούται με $(n+1)!$.

**Άσκηση 5.** Δίνεται ουσιώδες παράταγμα $\mathcal{A}$ γραμμικών υπερεπιπέδων στον $\mathbb{R}^n$ και αφφινικό υπερεπίπεδο $H_0$ του $\mathbb{R}^n$ το οποίο βρίσκεται σε γενική θέση ως προς το $\mathcal{A}$. Δείξτε ότι το πλήθος των φραγμένων περιοχών του παρατάγματος

$$\mathcal{A}_0 = \{ H_0 \cap H : H \in \mathcal{A} \}$$

στο χώρο $H_0$ ισούται με $|\mu_{L_{\mathcal{A}}}(\hat{0}, \hat{1})|$, όπου $\hat{0} = \mathbb{R}^n$ και $\hat{1} = \{0\}$.

**Λύση.** Αφού το $H_0$ βρίσκεται σε γενική θέση ως προς το $\mathcal{A}$, η απεικόνιση




$$\varphi : \mathcal{L}_{\mathcal{A}} \setminus \{\hat{1}\} \to \mathcal{L}_{\mathcal{A}_0}$$
$$X \rightsquigarrow X \cap H_0,$$

δηλαδή με $\varphi(X) = X \cap H_0$ για $X \in \mathcal{L}_{\mathcal{A}} \setminus \{\hat{1}\}$, είναι ισομορφισμός μερικώς διατεταγμένων συνόλων (παραλείπουμε την επαλήθευση). Άρα,

- $b(\mathcal{A}_0) = \left| \sum_{x \in \mathcal{L}_{\mathcal{A}_0}} \mu_{\mathcal{L}_{\mathcal{A}_0}}(\hat{0}, x) \right|$

$$= \left| \sum_{\substack{x \in \mathcal{L}_A \\ x \neq \hat{1}}} \mu_{\mathcal{L}_A}(\hat{0}, x) \right|$$

$$= \left| - \sum_{\substack{x \in \mathcal{L}_A \\ x \neq \hat{1}}} \mu_{\mathcal{L}_A}(\hat{0}, x) \right|$$

$$= |\mu_{\mathcal{L}_A}(\hat{0}, \hat{1})| .$$