# Συνδυαστική Θεωρία

## Πρώτη Ομάδα Ασκήσεων

**Άσκηση 1.** Δίνονται $F(x), G(x) \in \mathbb{C}[[x]]$.

(α) Αν $F(x) \cdot G(x) = 0$, δείξτε ότι $F(x) = 0$ ή $G(x) = 0$.

(β) Σωστό ή λάθος; Αν $F(x), G(x) \in \mathbb{R}[[x]]$ και $(F(x))^2 + (G(x))^2 = 0$, τότε $F(x) = G(x) = 0$.

**Λύση.** (α) Έστω ότι $F(x) \neq 0$ και $G(x) \neq 0$. Θα δείξουμε ότι $F(x) \cdot G(x) \neq 0$. Πράγματι, έστω ότι

$$\begin{cases} F(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n \\ G(x) = \sum_{n\geq 0} b_n x^n \end{cases}$$

και έστω $k$ και $\ell$ ο ελάχιστος $n \in \mathbb{N}$ για τον οποίο $a_n \neq 0$ και $b_n \neq 0$, αντίστοιχα, δηλαδή

$$\begin{cases} F(x) = \sum_{n\geq k} a_n x^n \\ G(x) = \sum_{n\geq \ell} b_n x^n \end{cases}$$

με $a_k, b_\ell \neq 0$. Τότε,

- $$F(x)\,G(x) = \Big(\sum_{n\geq k} a_n x^n\Big)\Big(\sum_{n\geq \ell} b_n x^n\Big)$$

$$= (a_k x^k + a_{k+1} x^{k+1} + \cdots)\cdot$$
$$(b_\ell x^\ell + b_{\ell+1} x^{\ell+1} + \cdots)$$

$$= a_k b_\ell\, x^{k+\ell} + \cdots$$

Άρα,

$$[x^{k+\ell}]\, F(x)\,G(x) = a_k b_\ell \neq 0$$

και συνεπώς $F(x)\,G(x) \neq 0$.

(β) Είναι σωστό. Ένας τρόπος είναι να εργασθεί κανείς όπως στο (α).

Ένας άλλος είναι ο εξής:

- $(F(x))^2 + (G(x))^2 = 0 \Leftrightarrow$

$$(F(x) + iG(x))(F(x) - iG(x)) = 0 \overset{(\alpha)}{\Leftrightarrow}$$

$$\begin{cases} F(x) + iG(x) = 0 \ \text{ή} \\ F(x) - iG(x) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$F(x) = G(x) = 0.$$

**Άσκηση 2.** Για $n, r, k \in \mathbb{N}$ με $n, r \geq 1$ συμβολίζουμε με $f(n,r,k)$ το πλήθος των $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \{0, 1, \ldots, r-1\}^n$ με $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = k$.

(α) Υπολογίστε τη $\sum_{k \geq 0} f(n,r,k) x^k$.

(β) Πόσα $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in \{0, 1, \dots, r-1\}^n$ έχουν την ιδιότητα $a_1 + a_2 + \dots + a_n \in 2\mathbb{N}$;

Λύση. (α) Έχουμε

- $$F_{n,r}(x) := \sum_{k \geq 0} f(n,r,k)\, x^k$$

$$= \sum_{0 \leq a_1, \dots, a_n < r} x^{a_1 + a_2 + \dots + a_n}$$

$$= \prod_{i=1}^{n} \left( \sum_{a_i = 0}^{r-1} x^{a_i} \right)$$

$$= (1 + x + x^2 + \dots + x^{r-1})^n.$$

(β) Το ζητούμενο πλήθος είναι το

- $$\sum_{k\geq 0} f(n,r,2k) = \frac{1}{2}\left\{F_{n,r}(1) + F_{n,r}(-1)\right\}$$

$$= \begin{cases} r^n/2, & \text{αν } r\in 2\mathbb{N} \\ (r^n+1)/2, & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

**Άσκηση 3.** Έστω $m \in \mathbb{Z}_{>0}$ και έστω $c(n,m)$ το πλήθος των συνθέσεων του $n\in\mathbb{N}$ με μέρη περιττούς ακεραίους $\leq 2m-1$. Δείξτε ότι

$$\sum_{n\geq 0} c(n,m)\, x^n = \frac{1-x^2}{1-x-x^2+x^{2m+1}},$$

όπου $c(0,m) := 1$.

Λύση. Έχουμε

- $$\sum_{n\geq 0} c(n,m)\, x^n =$$

$$= \sum_{k\geq 0} \sum_{r_i \in \{1,3,\ldots,2m-1\}} x^{r_1+r_2+\cdots+r_k}$$

$$= \sum_{k\geq 0} \sum_{r_i \in \{1,3,\ldots,2m-1\}} x^{r_1} x^{r_2} \cdots x^{r_k}$$

$$= \sum_{k\geq 0} \prod_{i=1}^{k} \sum_{r_i \in \{1,3,\ldots,2m-1\}} x^{r_i}$$

$$= \sum_{k\geq 0} \prod_{i=1}^{k} (x + x^3 + \cdots + x^{2m-1})$$

$$= \sum_{k \geq 0} (x + x^3 + \cdots + x^{2m-1})^k$$

$$= \frac{1}{1 - (x + x^3 + \cdots + x^{2m-1})}$$

$$= \frac{1}{1 - x(1 - x^{2m})/(1 - x^2)}$$

$$= \frac{1 - x^2}{1 - x - x^2 + x^{2m+1}} .$$

Άσκηση 4. Για $n \in \mathbb{N}$ έστω:

- $\sigma(n)$ το πλήθος των διαμερίσεων του $n$ στις οποίες κανένα μέρος δεν εμφανίζεται με πολλαπλότητα ένα

- $\tau(n)$ το πλήθος των διαμερίσεων του $n$ με μέρη $\not\equiv \pm 1 \pmod 6$.

Δείξτε ότι $\sigma(n) = \tau(n)$ για κάθε $n$.

**Λύση.** Σύμφωνα με την Πρόταση 3.9 των διαλέξεων,

- $$\sum_{n\geq 0} \sigma(n) x^n = \prod_{i\geq 1} \sum_{j\in \mathbb{N}\setminus\{1\}} x^{ij},$$

- $$\sum_{n\geq 0} \tau(n) x^n = \prod_{i\not\equiv \pm 1 \pmod 6} \sum_{j\geq 0} x^{ij}.$$

Επομένως,

- $$\sum_{n\geq 0} \sigma(n) x^n = \prod_{i\geq 1} \left( \sum_{j\geq 0} x^{ij} - x^i \right)$$

$$= \prod_{i\geq 1} \left( \frac{1}{1-x^i} - x^i \right) = \prod_{i\geq 1} \frac{1-x^i+x^{2i}}{1-x^i}$$

$$= \prod_{i\geq 1} \frac{1+x^{3i}}{(1-x^i)(1+x^i)}$$

$$= \prod_{i\geq 1} \frac{1-x^{6i}}{(1-x^{3i})(1-x^{2i})}$$

$$= \prod_{i\geq 1} \frac{1}{1-x^{2i}} \cdot \prod_{\substack{i\geq 1 \\ i\equiv 1 \pmod 2}} \frac{1}{1-x^{3i}}$$

$$= \prod_{\substack{i \geq 1 \\ i \equiv 0,2,3,4 \pmod 6}} \frac{1}{1-x^i}$$

$$= \sum_{n \geq 0} \tau(n) x^n.$$

Άρα, $\sigma(n) = \tau(n)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

**Άσκηση 5.** Για ποιες $G(x) \in \mathbb{C}[[x]]$ υπάρχει $F(x) \in \mathbb{C}[[x]]$ τέτοια ώστε $G(x) = (F(x))^3$;

**Λύση.** Για $F(x) = \sum a_n x^n \in \mathbb{C}[[x]]$ με $F(x) \neq 0$ θέτουμε $\delta(F(x)) = k$ αν

$k = \min\{n \in \mathbb{N} : a_n \neq 0\}$, δηλαδή αν

$$F(x) = \sum_{n \geq k} a_n x^n$$

με $a_k \neq 0$. Τότε,

$$(F(x))^3 = \left( \sum_{n \geq k} a_n x^n \right)^3 = a_k^3 x^{3k} + \cdots$$

και συνεπώς $\delta(F(x))^3 = 3k \in 3\mathbb{N}$.
Άρα, αν $G(x) = (F(x))^3$ για κάποια $F(x) \in \mathbb{C}[[x]]$ θα πρέπει $\delta(G(x)) \in 3\mathbb{N}$ ή $G(x) = 0$.

Θα δείξουμε ότι ισχύει και το αντίστροφο, δηλαδή αν $G(x) \neq 0$

και $\delta(G(x)) \in 3\mathbb{N}$, τότε υπάρχει $F(x) \in \mathbb{C}[[x]]$ τέτοια ώστε $G(x) = (F(x))^3$.

Έστω λοιπόν ότι $\delta(G(x)) = 3k$, $k \in \mathbb{N}$, οπότε

$$G(x) = \sum_{n \geq 3k} b_n x^n$$

με $b_{3k} \neq 0$. Τότε

- $$G(x) = b_{3k} x^{3k} \sum_{n \geq 3k} (b_n / b_{3k}) x^{n-3k}$$

$$= b_{3k} x^{3k} \left( 1 + \frac{b_{3k+1}}{b_{3k}} x + \cdots \right)$$

$$= b_{3k}\, x^{3k} \, (1 + H(x))$$

για κάποια $H(x) \in \mathbb{C}[[x]]$ με $H(0) = 0$. Τότε, ορίζεται η

- $$F_0(x) = (1 + H(x))^{1/3} = \sum_{n \geq 0} \binom{1/3}{n} (H(x))^n$$

με $(F_0(x))^3 = 1 + H(x)$. Επιλέγουμε $a \in \mathbb{C}$ με $a^3 = b_{3k}$. Θέτουμε $F(x) = a x^k F_0(x)$ και παρατηρούμε ότι

- $$(F(x))^3 = a^3 x^{3k} (F_0(x))^3 = b_{3k}\, x^{3k} (1 + H(x)) = G(x).$$