Συνδυαστική Θεωρία

Δεύτερη Ομάδα Ασκήσεων

Άσκηση 1. Πόσες μεταθέσεις $w \in \mathfrak{S}_6$ υπάρχουν με $w(4) = 6$ και $\mathrm{inv}(w) = 7$;

Λύση. Διαγράφοντας το $w(4) = 6$ από την αναδιάταξη

$$(w(1), w(2), w(3), w(4), w(5), w(6))$$

προκύπτει μετάθεση $u \in \mathfrak{S}_5$ με $\mathrm{inv}(u) = 5$, και κάθε τέτοια προκύπτει ακριβώς μία φορά. Άρα, το ζητούμενο πλήθος ισούται με

- $\#\{u \in \mathfrak{S}_5 : \operatorname{inv}(u) = 5\}$

$$= [x^5]\,(1+x)(1+x+x^2)(1+x+x^2+x^3)(1+x+x^2+x^3+x^4)$$

$$= 22.$$

Άσκηση 2. Με πόσους τρόπους μπορεί να επιλέξει κανείς μια μετάθεση $w \in \mathfrak{S}_n$ και να χρωματίσει καθέναν από τους ακεραίους $1, 2, \ldots, n$ άσπρο ή μαύρο, έτσι ώστε το ελάχιστο στοιχείο κάθε κύκλου της w να είναι άσπρο;

Λύση. Υπάρχουν $c(n,k)$ μεταθέσεις $w \in \mathfrak{S}_n$ με k κύκλους και 2^{n-k} τρόποι να χρωματιστούν οι $1, 2, \ldots, n$ για κάθε μία. Άρα το ζητούμενο πλήθος ισούται με

$$\sum_{k=1}^{n} c(n,k) \cdot 2^{n-k} =$$

$$= 2^n \sum_{k=1}^{n} c(n,k) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^k$$

$$\underset{\text{Πρότ. 4.4}}{=} 2^n \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}+1\right) \cdots \left(\frac{1}{2}+n-1\right)$$

$$= 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1).$$

Άσκηση 3. Για ακεραίους n,k με $0 \leq k \leq n$ ορίζουμε τα πολυώνυμα

$$P_{n,k}(x) = \sum_{j=0}^{n} p(n,k,j)\, x^j$$

όπου $p(n,k,j)$ είναι το πλήθος των μεταθέσεων $w \in \mathfrak{S}_{n+1}$ με $w(1) = k+1$ και $\mathrm{des}(w) = j$. Π.χ. για $n=3$,

$$P_{3,k}(x) = \begin{cases} 1+4x+x^2, & k=0 \\ 4x+2x^2, & k=1 \\ 2x+4x^2, & k=2 \\ x+4x^2+x^3, & k=3. \end{cases}$$

Δείξτε ότι

$$\sum_{m\geq 0} m^k (1+m)^{n-k} x^m = \frac{P_{n,k}(x)}{(1-x)^{n+1}}.$$

Λύση. Για $k=0$ έχουμε

- $$P_{n,0}(x) = \sum_{\substack{w\in \mathfrak{S}_{n+1} \\ w(1)=1}} x^{\mathrm{des}(w)}$$

$$= \sum_{w\in \mathfrak{S}_n} x^{\mathrm{des}(w)}$$

$$= A_n(x)/x$$

και συνεπώς η ζητούμενη ισότη-
τα ταυτίζεται με την Πρόταση
4.6 των διαλέξεων. Για $k \geq 1$

- $$P_{n,k}(x) = \sum_{\substack{w \in \mathfrak{S}_{n+1} \\ w(1) = k+1}} x^{\mathrm{des}(w)}$$

$$= \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^{n} \sum_{\substack{w \in \mathfrak{S}_{n+1} \\ w(1) = k+1 \\ w(2) = i+1}} x^{\mathrm{des}(w)}$$

$$= \sum_{i=0}^{k-1} \sum_{\substack{w \in \mathfrak{S}_n \\ w(1) = i+1}} x^{1+\operatorname{des}(w)} +$$

$$\sum_{i=k}^{n-1} \sum_{\substack{w \in \mathfrak{S}_n \\ w(1) = i+1}} x^{\operatorname{des}(w)}$$

$$= x \sum_{i=0}^{k-1} P_{n-1,i}(x) + \sum_{i=k}^{n-1} P_{n-1,i}(x).$$

Λαμβάνοντας επίσης υπόψην
ότι

$$\sum_{i=0}^{n-1} P_{n-1,i}(x) = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{\substack{w \in \mathfrak{S}_n \\ w(1)=i+1}} x^{des(w)}$$

$$= \sum_{w \in \mathfrak{S}_n} x^{des(w)} = P_{n,0}(x)$$

καταλήγουμε στην αναδρομική σχέση

$$P_{n,k}(x) = P_{n,k-1}(x) + (x-1)\, P_{n-1,k-1}(x) \quad (*)$$

για $1 \leq k \leq n$. Εφαρμόζοντας επαγωγή στα n, k έχουμε

$$\frac{P_{n,k-1}(x)}{(1-x)^{n+1}} = \sum_{m\geq 0} m^{k-1}(1+m)^{n-k+1}\, x^m$$

$$\frac{P_{n-1,k-1}(x)}{(1-x)^{n}} = \sum_{m\geq 0} m^{k-1}(1+m)^{n-k}\, x^m .$$

Από τις ισότητες αυτές και την (*) έπεται η

$$\frac{P_{n,k}(x)}{(1-x)^{n+1}} = \sum_{m\geq 0} m^{k}(1+m)^{n-k}\, x^m .$$

Άσκηση 4. Έστω $h(n)$ το πλήθος των τρόπων να επιλέξει κανείς μια μετάθεση $w \in \mathfrak{S}_n$ και να χρωματίσει καθέναν από τους ακεραίους $1, 2, \dots, n$ άσπρο ή μαύρο, έτσι ώστε το ελάχιστο στοιχείο κάθε κύκλου της w να είναι άσπρο και τουλάχιστον ένα στοιχείο κάθε κύκλου της να είναι μαύρο.

(α) Υπολογίστε την εκθετική γεννήτρια συνάρτηση $E_h(x)$.

(β) Βρείτε έναν απλό τύπο για το $h(n)$.

Λύση. **(α)** Για κάθε σύνολο $B \subseteq [n]$ με $\# B = m$ υπάρχουν

$$f(m) = (m-1)!\,(2^{m-1} - 1)$$

τρόποι να διαταχθούν κυκλικά τα στοιχεία του B και να χρωματισθεί το καθένα άσπρο ή μαύρο, έτσι ώστε το ελάχιστο στοιχείο του B να είναι άσπρο και τουλάχιστον ένα στοιχείο του να είναι μαύρο. Σύμφωνα με τον εκθετικό τύπο έχουμε $E_h(x) = \exp E_f(x)$ όπου

$$E_f(x) = \sum_{m\geq 1} (m-1)!\,(2^{m-1}-1)\frac{x^m}{m!}$$

$$= \sum_{m\geq 1} 2^{m-1}\cdot\frac{x^m}{m} - \sum_{m\geq 1}\frac{x^m}{m}$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{m\geq 1}\frac{(2x)^m}{m} - \sum_{m\geq 1}\frac{x^m}{m}$$

$$= \frac{1}{2}\log\frac{1}{1-2x} - \log\frac{1}{1-x}$$

$$= \log\frac{1-x}{\sqrt{1-2x}}.$$

Άρα,

$$E_h(x) = \frac{1-x}{\sqrt{1-2x}}.$$

(β) Από το (α) και την ταυτότητα

$$\sum_{n\geq 0} \binom{2n}{n} x^n = \frac{1}{\sqrt{1-4x}}$$

προκύπτει ότι

- $$E_h(x) = (1-x) \sum_{n\geq 0} \binom{2n}{n} \left(\frac{x}{2}\right)^n =$$

$$\sum_{n\geq 0} \frac{1}{2^n} \binom{2n}{n} x^n - \sum_{n\geq 0} \frac{1}{2^n} \binom{2n}{n} x^{n+1} =$$

$$1 + \sum_{n\geq 1} \left\{ \frac{1}{2^n} \binom{2n}{n} - \frac{1}{2^{n-1}} \binom{2n-2}{n-1} \right\} x^n.$$

Άρα,

- $h(n) = n! \left\{ \frac{1}{2^n}\binom{2n}{n} - \frac{1}{2^{n-1}}\binom{2n-2}{n-1} \right\}$

$$= \frac{(2n)!}{2^n \cdot n!} - n \, \frac{(2n-2)!}{2^{n-1}(n-1)!}$$

$$= (2n-1)!! - n\,(2n-3)!!$$

για $n \geq 1$, όπου $(2n-1)!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)$.

Άσκηση 5. Δίνεται η ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ με $a_0 = 1$ και

$$a_{n+1} = 2 \sum_{\substack{(k_1,k_2,k_3)\in\mathbb{N}^3 \\ k_1+k_2+k_3=n}} a_{k_1} a_{k_2} a_{k_3}$$

για $n \in \mathbb{N}$.

(α) Αν $f(x) = \sum_{n \geq 1} a_n x^n$, δείξτε ότι

$f(x) = 2x(1+f(x))^3$.

(β) Βρείτε έναν απλό τύπο για το a_n.

Λύση. (α)

- $$f(x) = \sum_{n\geq 1} a_n x^n = \sum_{n \geq 0} a_{n+1} x^{n+1}$$

$$= 2 \sum_{n\geq 0} \left(\sum_{k_1+k_2+k_3=n} a_{k_1} a_{k_2} a_{k_3} \right) x^{n+1}$$

$$= 2x \sum_{k_1, k_2, k_3 \geqslant 0} a_{k_1} a_{k_2} a_{k_3} x^{k_1+k_2+k_3}$$

$$= 2x \left(\sum_{k \geqslant 0} a_k x^k \right)^3$$

$$= 2x\,(1+f(x))^3.$$

(β) Από το (α) και το Θεώρημα αντιστροφής Lagrange, με $G(x) = 2(1+x)^3$, παίρνουμε ότι

- $$a_n = [x^n]\, f(x)$$

$$= \frac{1}{n} [x^{n-1}]\, (G(x))^n$$

$$= \frac{1}{n} [x^{n-1}]\, 2^n (1+x)^{3n}$$

$$= \frac{2^n}{n} \binom{3n}{n-1} = \frac{2^n (3n)!}{n!\,(2n+1)!}$$

$$= \frac{2^n}{2n+1} \binom{3n}{n}.$$