PLONGEMENT DE ℓ_1^K COMPLEXE DANS LES ESPACES DE BANACH

A. PAJOR

Soient $(x_1,x_2,\dots,x_n)$ n fonctions à valeurs réelles ou complexes, définies sur un ensemble T et uniformément bornées par 1. On note $\|x\| = \sup\{|x(t)|;t \in T\}$, la norme uniforme de x sur T et $|I|$ le cardinal de l'ensemble I.

Soient $(\varepsilon_i)_{i=1}^{i=n}$ des variables de Bernoulli indépendantes prenant les valeurs ± 1. On pose :

$$M = \mathbb{E}\,\|\sum_{i=1}^{i=n} \varepsilon_i x_i\|.$$

Pour une partie I de $\{1,2,\dots,n\}$, $|I| = k$, la base $(x_i)_{i\in I}$ est β^{-1}-isomorphe à la base usuelle de ℓ_1^k, signifie ici, que pour toute suite $(a_i)_{i\in I}$ du corps des scalaires, on a,

$$\|\sum_{i\in I} a_i x_i\| \geq \beta \sum_{i\in I} |a_i|.$$

Il est clair que si $(x_i)_{i\in I}$ est β^{-1}-isomorphe à la base $\ell_1^{|I|}$, alors la moyenne $M \geq \beta|I|$ (principe de contraction). On s'intéresse plus particulièrement dans cet exposé au cas extrémal où la moyenne $M \geq \delta n$. Dans ce cadre, J. Elton [1] a démontré dans le cas réel, qu'il existe une partie I de $\{1,2,\dots,n\}$, $|I| \geq cn$ telle que $(x_i)_{i\in I}$ soit β^{-1}-isomorphe à la base de $\ell_1^{|I|}$, où β et c ne dépendent que de δ. On montre ici que ce résultat s'étend au cas complexe. Auparavant, on rappelle, dans son principe, la démonstration du théorème de Milman [2] (cas où $x_i(t) = \pm 1$), où apparait très clairement l'outil combinatoire, le lemme 1.

1. LE THEOREME DE MILMAN.

Le résultat suivant est dû à V.D. Milman [2], il a été inspiré par un théorème de Pisier [4] sur les ensembles de Sidon.

Théorème 1. *Soient* $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ *des fonctions sur un ensemble* T, *ne prenant que les valeurs* ± 1. *Il existe une partie* I *de* $\{1,2,\dots,n\}$ *telle que la base* $(x_i)_{i \in I}$ *soit isométrique à la base usuelle de* $\ell_1^{|I|}$ *et* $|I| \geq c \dfrac{M^2}{n \log(2n/M)}$, *où* c *est une constante universelle.*

Soit $S = \{(x_i(t))_{i=1}^{i=n} \; ; \; t \in T\} \subset \{-1,1\}^n$. Notons P^I la projection naturelle de $\{-1,1\}^n$ sur $\{-1,1\}^I$. Il est clair que si $P^I S = \{-1,1\}^I$, alors $(x_i)_{i \in I}$ est isométrique à la base usuelle de $\ell_1^{|I|}$.

On pose $\phi(n,k) = \sum_{0 \leq i < k} C_n^i$, $0 \leq k \leq n$.

La démonstration du théorème 1 s'articule sur les deux lemmes suivants. Le premier est dû à Sauer [5], Shelah [6] et Vapnik et Cervonenkis [7] indépendamment.

Lemme 1. *Soit* S *une partie de* $\{-1,1\}^n$ *telle que* $|S| > \phi(n,k)$, *il existe alors une partie* I *de* $\{1,2,\dots,n\}$, $|I| \geq k$ *telle que* $P^I S = \{-1,1\}^I$.

Lemme 2. $M \leq c \sqrt{n \operatorname{Log}|S|}$ *où* c *est une constante universelle.*

On notera que $\left\|\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i x_i\right\| = \sup\{\left|\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i s_i\right| \; ; \; (s_i)_{i=1}^{i=n} \in S\}$.

Le lemme 2 est alors une estimation sous-gaussienne qui résulte de l'inégalité de Bernstein

$$P\left(\left|\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i\right| > t\sqrt{n}\right) \leq 2\, e^{-t^2/2}.$$

Démonstration du théorème 1. Soit k le plus grand cardinal des parties I de $\{1,2,\ldots,n\}$ telle que $P^I S = \{-1,1\}^I$, (la densité de S au sens de [5]).

D'après le lemme 1, on a :

$$|S| \leq \sum_{i=0}^{k} C_n^i$$

Le théorème 1, résulte alors du lemme 2 et de l'estimation suivante :

$$(1) \qquad \sum_{0\leq i\leq k} C_n^i \leq \frac{n^n}{k^k(n-k)^{n-k}}, \quad k \leq \frac{n}{2} \quad \text{(Inégalité de Chernoff).}$$

Remarque 1. On déduit du théorème 1, qu'il existe une constante $c = c(\delta)$ telle que : si $M \geq \delta n$, il existe une partie $I \subset \{1,2,\ldots,n\}$, $|I| \geq cn$ telle que $(x_i)_{i\in I}$ soit isométrique à la base usuelle de $\ell_1^{|I|}$.

Remarque 2. Dans le cas de caractères réels (et donc $x_i(t) = \pm 1$) sur un groupe compact commutatif, Milman note dans [2] qu'on obtient une meilleure estimation du cardinal de I, à savoir $|I| \geq c\,\frac{M^2}{n}$, retrouvant ainsi, dans le cas réel, le résultat de [4]. Pisier a récemment démontré que cette dernière estimation est également vraie pour des fonctions $(x_i(t))$ $(x_i(t) = \pm 1)$ sur un ensemble T, améliorant ainsi le théorème 1.

2. LE THEOREME DE J. ELTON (cas réel).

Théorème 2. J. Elton [1]. *Soit* $0 < \delta < 1$, *il existe deux constantes* $\beta > 0$ *et* $c > 0$ *ne dépendant que de* δ *et vérifiant la propriété suivante :*

Pour toute suite $(x_i)_{i=1}^{i=n}$ *de fonctions réelles, uniformément bornées par* 1 *sur un ensemble* T *et telle que* $\mathbb{E}\|\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i x_i\| \geq \delta n$, *il existe une partie* I *de* $\{1,2,\ldots,n\}$, $|I| \geq cn$, *telle que*

$$\forall (a_i)_{i\in I} \in \mathbb{R}^I, \quad \|\sum_{i\in I} a_i x_i\| \geq \beta \sum_{i\in I} |a_i|.$$

Il ne suffit pas, à présent de pouvoir "choisir les signes", il faut en outre contrôler la perturbation, autrement dit, "écarter" les valeurs.

On construit une base $(x_i)_{i\in I}$ qui vérifient la propriété suivante :

$$\forall(\delta_i)_{i\in I} \in \{-1,1\}^I,\ \exists s,t \in T \text{ tels que } \forall i \in I \quad \operatorname{sign}[x_i(t)-x_i(s)] = \delta_i \text{ et}$$
$$x_i(t) - x_i(s) > \beta.$$

Il est clair, alors, que pour toute suite $(a_i)_{i\in I} \in \mathbb{R}^I$, on a

$$\|\sum_{i\in I} a_i x_i\| \geq \frac{1}{2} \sup_{t,s\in T} |\sum_{i\in I} a_i(x_i(t)-x_i(s))| \geq (\beta/2) \sum_{i\in I} |a_i|.$$

Démonstration du théorème 2.

(a) Soit $0 < \delta' < \delta$ et $S = \{(x_i(t))_{i=1}^{i=n}\ ;\ t \in T\}$. On montre à l'aide du lemme 2, qu'il existe une partie $S' \subset S$, $|S'| \geq \exp[c(\delta-\delta')^2 n]$ telle que

$$\forall s,t \in S',\quad s \neq t \qquad \sup_{i=1,2,\dots n} |t_i-s_i| > \delta'.$$

(b) On construit à présent, pour chaque coordonnée i, dans $[-1,1]$, une suite $(I_1^i,\dots, I_N^i)$ d'intervalles de longueur inférieure à δ' et distants deux à deux de β et une partie $S'' \subset S'$, $|S''| > \exp[\alpha n]$ tels que :

$$\forall s \in S'' \text{ et } \forall i \in \{1,2,\dots,n\} \quad s_i \in \bigcup_{1\leq j\leq N} I_j^i.$$

Donnons le principe de cette construction. Soit $J \subset [-1,1]$ un intervalle et $J = \bigcup_{1\leq k\leq M} J_k$ une partition de J en M intervalles de longueur égale. Considérons les bandes $B = \{s \in [-1,1]^n\ ;\ s_1 \in J\}$ et $B_k = \{s \in [-1,1]^n,\ s_1 \in J_k\}$, $1 \leq k \leq M$.

Soit $m(k)$ un entier compris entre 1 et M tel que

$$|S \cap B_{m(k)}| = \operatorname*{Min}_{1\leq k\leq M} |S \cap B_k|.$$

Il est clair que

$$(S \cap B) \setminus (S \cap B_{m(k)}) \geq (1-\frac{1}{M}) \; |S \cap B|$$

En procédant ainsi sur les intervalles J, de longueur inférieure à $\delta'/2$, d'une partition de $[-1,1]$, on construit les intervalles $(I_1^1,\dots,I_N^1)$ en ôtant dans chaque intervalle J, l'intervalle $J_{m(k)}$ et une partie S_1 de S en enlevant dans chaque bande $S \cap B$, la bande $S \cap B_{m(k)}$. On a donc $|S_1| \geq (1-\frac{1}{M})|S|$. On itère alors le procédé sur les autres coordonnées. On obtient ainsi S_n, $|S_n| \geq (1-\frac{1}{M})^n |S|$ et $\beta = \frac{|J|}{M} = \frac{\delta'}{2M}$.

(c) Soient $s \in S''$ et $1 \leq i \leq n$, on note $(\phi(s))_i$ l'unique entier k tel que $s_i \in I_k^i$. On définit ainsi une application $\phi : S'' \to \{1,2,\dots,N\}^n$.

L'application ϕ est injective par construction, d'où $|\phi(S'')| = |S''| > \exp[\alpha n]$.

En outre $(\phi(s))_i < (\phi(t))_i \Longrightarrow |s_i - t_i| > \beta$ pour tout s et t dans S".

Le théorème découle alors de l'estimation (1) et du lemme combinatoire suivant.

<u>Lemme 3</u>. *Soit* $p \geq 1$ *et* $n \geq 1$ *des entiers. Si* $S \subset \{1,2,\dots,2^p\}^n$ *est tel que* $|S| > \phi(n,k)^p$, *il existe une partie* I *de* $\{1,2,\dots,n\}$, $|I| \geq k$ *telle que*

$$\forall\, A,B \subset I,\ A \cap B = \emptyset,\ \exists s,t \in S \textit{ tels que } \begin{cases} s_i - t_i < 0 & \textit{pour } i \in A \\ s_i - t_i > 0 & \textit{pour } i \in B. \end{cases}$$

<u>Démonstration</u>. Pour $p = 1$, c'est exactement le lemme 1. Procédons par récurrence sur p, on suppose donc le résultat vrai pour p, pour tout $n \geq 1$. Soit alors

$$S \subset \{1,2,\dots,2^p,2^p+1,\dots,2^{p+1}\}^n \ , \quad |S| > \phi(n,k)^{p+1},$$

et définissons $\Pi : \{1,2,\dots,2^{p+1}\}^n \to \{-1,1\}^n$ par :

$$\begin{cases} (\Pi x)_i = -1 \text{ si } x_i \leq 2^p \\ (\Pi x)_i = 1 \text{ si } x_i > 2^p \end{cases} \qquad x = (x_i)_{i=1}^{i=n} .$$

Deux cas peuvent se présenter

(a) $|\Pi(S)| > \phi(n,k)$.

L'application du lemme 1 à $\Pi(S)$, donne une partie I de $\{1,2,\dots,n\}$, $|I| \geq k$ telle que $P^I(\Pi(S)) = \{-1,1\}^I$ et la conclusion est immédiate.

(b) $|\Pi(S)| \leq \phi(n,k)$.

Il existe alors un point de $\Pi(S)$ qui est l'image par Π de plus de $|S|/\phi(n,k)$ points de S (principe de Dirichlet).

Autrement dit, il existe $S' \subset S$ et $J \subset \{1,2,\dots,n\}$ tels que :

(i) $|S'| > \phi(n,k)^p$

(ii) $\forall s \in S' \quad \{i \; ; \; s_i \leq 2^p\} = J$.

Soit ϕ l'application de S' dans $\{1,2,\dots,2^p\}^n$ définie par :

$$\begin{array}{l} (\phi(s))_i = s_i \text{ si } i \in J \\ \\ (\phi(s))_i = s_i - 2^p \text{ si } i \notin J \end{array} \quad , \qquad s = (s_i)_{i=1}^{i=n} \in S'$$

On a alors $|\phi(S')| = |S'| > \phi(n,k)^p$

Le résultat découle de l'hypothèse de récurrence.

3. LE CAS COMPLEXE.

Théorème 3. [3]. *Soit* $0 < \delta < 1$, *il existe deux constantes* $\beta > 0$ *et* $c > 0$ *ne dépendant que de* δ *et vérifiant la propriété suivante :*

Pour toute suite $(z_p)_{p=1}^{p=n}$ *de fonctions à valeurs complexes, uniformément bornées par* 1, *sur un ensemble* T *et telle que* $M \geq \delta n$, *il existe une partie* I *de* $\{1,2,\dots n\}$, $|I| \geq cn$ *telle que*

$$\forall\, (a_p)_{p\in I} \in \mathbb{C}^I \qquad \Big\| \sum_{p\in I} a_p z_p \Big\| \geq \beta \sum_{p\in I} |a_p| .$$

La démonstration repose sur le théorème d'Elton et sur un nouveau lemme combinatoire. Introduisons quelques notations. Soit E un ensemble fini et (E^-,E^+) une partition de E telle que $|E^+| = p > 1$ et $|E^-| = q > 1$. Soit n un entier, $n \geq 1$, on définit $M : E^n \to \{-1,1\}^n$ par :

$$(Mx)_i = 1 \text{ si } x_i \in E^+ \text{ et } (Mx)_i = -1 \text{ si } x_i \in E^-,\ x = (x_i)_{i=1}^{i=n} \in E^n.$$

On distingue donc dans E, les éléments positifs E^+ et les éléments négatifs E^-. L'application M est alors la "suite des signes" et pour une partie S de E^n, $M(S) = \{-1,1\}^n$ signifie donc que tous les choix de signes de $\{-1,1\}^n$ sont réalisés dans S.

On a alors le lemme suivant :

Lemme 4. *Avec les notations précédentes, il existe une constante* c *ne dépendant que de* p *et de* q *et vérifiant la propriété suivante :*

Pour tout entier $n \geq 1$ *et toute partie* S *de* E^n *telle que* $M(S) = \{-1,1\}^n$, *il existe* $e^+ \in E^+$, $e^- \in E^-$ *et une partie* I *de* $\{1,2,\dots,n\}$ *tels que* $|I| \geq cn$ et $\{e^-,e^+\}^I \subset P^I S$.

Le lemme 1 est encore l'outil de base du lemme 4. On déduit de ce dernier de nouveaux lemmes combinatoires généralisant le lemme 1 (cf. [3]).

Démonstration du théorème 3.

On procède en deux étapes.

(a) Notons x_p et y_p les parties réelle et imaginaire de z_p.

Puisque $\mathbb{E}\| \sum_{p=1}^{n} \varepsilon_p x_p \| + \mathbb{E}\| \sum_{p=1}^{n} \varepsilon_p y_p \| \geq M \geq \delta n$,

quitte à considérer les fonctions (iz_p), il n'y a aucun inconvénient à supposer que

$$\mathbb{E}\| \sum_{p=1}^{n} \varepsilon_p x_p \| \geq \frac{\delta}{2} n.$$

Appliquant alors le théorème 2 à $(x_p)_{p=1}^{p=n}$ (cas réel), on obtient une partie A de $\{1,2,\dots,n\}$, $|A| \geq c'n$ telle que, $(x_p)_{p\in A}$ soit β^{-1}-isomorphe à la base $\ell_1^{|A|}$ (où β et c' sont deux constantes ne dépendant que de δ).

Notons K (resp. H) l'enveloppe convexe fermée équilibrée (réelle) de

$\{(x_p(t))_{p\in A} \; ; \; t \in T\}$ (resp. de $\{(z_p(t))_{p\in A} \; ; \; t \in T\}$).

Par convexité, pour toute suite $(a_p)_{p\in A} \in \mathbb{R}^A$, on a

$$\|\sum_{p\in A} a_p x_p\| = \sup\{|\sum_{p\in A} a_p t_p| \; ; \; (t_q)_{q\in A} \in K\} \geq \beta \sum_{p\in A} |a_p|$$

et par dualité, on en déduit que

$$\{-\beta,\beta\}^A \subset K.$$

De sorte que, se restreignant à ces valeurs particulières, c'est-à-dire en considérant une partie H' de H telle que Re H' $= \{-\beta,\beta\}^A$, on a

$$\forall (a_q)_{q\in A} \in \mathbb{C}^A, \; \|\sum_{p\in A} a_p z_p\| \geq \sup\{|\sum_{p\in A} a_p t_q| \; ; \; (t_q)_{q\in A} \in H'\}.$$

Si $(z'_p)_{p\in A}$ sont les projections naturelles de $\mathbb{C}^A$ sur $\mathbb{C}$ définies sur H', on a

$$\forall (a_q)_{q\in A} \in \mathbb{C}^A \quad \|\sum_{p\in I} a_p z_p\| \geq \|\sum_{p\in I} a_p z'_p\| \; , \; I \subset A,$$

et $\quad \mathrm{Re}\{(z'_p(t))_{p\in A} \; ; \; t \in H'\} = \{-\beta,\beta\}^A$.

On se ramène ainsi à des fonctions $(z'_p)_{p\in A}$ dont la partie réelle est isométrique à la base de Rademarcher. Ce que l'on suppose désormais réalisé pour la suite $(z_p)_{p\in A}$.

(b) Soit alors $(I_k)_{k=1}^{k=N}$ une partition de $[-1,1]$ en $N \leq [4/\beta]+1$ intervalles de longueur inférieure à $\beta/2$. Pour $t \in T$ et $p \in A$ notons $k_p(t)$ l'unique entier compris entre 1 et N tel que $y_p(t) \in I_{k_p(t)}$ et définissons $\phi : T \to \{-N,\dots,-2,-1,1,2,\dots,N\}^A$ par :

$$(\phi(t))_p = (\mathrm{sign}\; x_p(t))\, k_p(t), \; p \in A, \; t \in T.$$

Si $S = \phi(T)$, d'après le lemme 4, il existe une constante c, ne dépendant que de N (et donc que de δ), une partie I de A, $|I| \geq c|A| \geq cc'n$ et deux entiers k et ℓ compris entre 1 et N tels que

$\{-\ell,k\}^I \subset P^I S.$

Si a et b sont les milieux respectifs des intervalles I_k et I_ℓ, on a alors :

$$\forall\, J \subset I,\ \exists t \in T \text{ tel que } \begin{cases} x_p(t) = \beta \text{ et } |y_p(t)-a| \le \beta/4 & \text{pour } p \in J \\ x_p(t) = -\beta \text{ et } |y_p(t)-b| \le \beta/4 & \text{pour } p \in I\setminus J. \end{cases}$$

En symétrisant on obtient :

$$J \subset I,\ \exists s,t \in T \text{ tels que } \begin{cases} x_p(t) - x_p(s) = 2\beta \text{ et } |y_p(t)-y_p(s)-d| \le \beta/2 & \text{pour } p \in J \\ x_p(t) - x_p(s) = -2\beta \text{ et } |y_p(t)-y_p(s)+d| \le \beta/2 & \text{pour } p \in I\setminus J \end{cases}$$

où l'on a posé $d = a - b$.

On remarquera alors, que si $\varepsilon_p = \mathrm{sign}(x_p(t)-x_p(s))$, on a .

$$z_p(t) - z_p(s) = \varepsilon_p(2\beta+id) + |y_p(t)-y_p(s)-d\varepsilon_p|$$

et

$$|y_p(t) - y_p(s) - d\varepsilon_p| \le \beta/2 \text{ pour tout } p \in I.$$

On en déduit, pour toute suite $(a_p)_{p\in I} \in C^I$

$$\|\sum_{p\in I} a_p z_p\| \ge \frac{1}{2} \sup_{t,s\in T} |\sum_{p\in I} a_p(z_p(t)-z_p(s))|$$

$$\ge \frac{1}{2} \sup_{\varepsilon_p=\pm 1} |\sum_{p\in I} a_p\varepsilon_p(2\beta+id)| - \beta/4 \sum_{p\in I} |a_p|$$

$$\ge (\beta/4) \sum_{p\in I} |a_p|.$$

La dernière inégalité résultant de l'inégalité classique :

$$\sup_{\varepsilon_p=\pm 1} |\sum_{p\in I} a_p\varepsilon_p| \ge \frac{1}{2} \sum_{p\in I} |a_p|.$$

REFERENCES.

[1] J. Elton, "Sign-embeddings of ℓ_1^n". Trans. A.M.S, 279 (1983), pp. 113-124.

[2] V.D. Milman, Isr. J. Math, 43, (1982), p. 129-138.

[3] A. Pajor, "Plongement de ℓ_1^k dans les espaces de Banach complexes, C.R.A.S. Paris 296 (1983) p. 741-743.

[4] G. Pisier, Advances in Math. (supplementary studies) vol.713 (1981), 685.

[5] N. Sauer, J. Comb. Th, A. 13, (1972) p. 145-147.

[6] S. Shelah, Pacific. J. Math., 41, (1972), p. 247-261.

[7] V.N. Vapnik et A.ya. Cervonenkis, Theor. Prob. Appl., 16 (1971), p. 264-280.