Πιθανότητες σε Μεγάλες Διαστάσεις (2021–22)
Ασκήσεις

1. Έστω (X,d,μ) μετρικός χώρος πιθανότητας και $\varphi:(X,d)\to(Y,\sigma)$ Lipschitz συνάρτηση με σταθερά 1. Θεωρούμε το μέτρο πιθανότητας μ_φ στην $\mathcal{B}(Y)$ που ορίζεται από την

$$\mu_\varphi(A)=\mu(\varphi^{-1}(A)),\qquad A\in\mathcal{B}(Y).$$

Αποδείξτε ότι, για κάθε $t>0$,

$$\alpha_{\mu_\varphi}(t)\leqslant\alpha_\mu(t).$$

2. Έστω (X,d,μ) μετρικός χώρος πιθανότητας και έστω α_μ η συνάρτηση συγκέντρωσης του μ. Υποθέτουμε ότι για κάποιο $\varepsilon\in(0,1)$ και για κάποιο $t>0$ ισχύει $\alpha_\mu(t)<\varepsilon$. Αποδείξτε ότι: αν $A\in\mathcal{B}(X)$ και $\mu(A)\geqslant\varepsilon$, τότε $1-\mu(A_{t+r})\leqslant\alpha_\mu(r)$ για κάθε $r>0$.

3. Έστω (X,d,μ) μετρικός χώρος πιθανότητας και έστω α_μ η συνάρτηση συγκέντρωσης του μ. Αποδείξτε ότι:

(α) Αν $F:(X,d)\to\mathbb{R}$ είναι μια 1-Lipschitz συνεχής συνάρτηση, τότε

$$(\mu\otimes\mu)\left(\{(x,y)\in X\times X:|F(x)-F(y)|\geqslant t\}\right)\leqslant 4\alpha_\mu(t/2)$$

για κάθε $t>0$.

(β) Αν $A,B\in\mathcal{B}(X)$ και $\mathrm{dist}(A,B)=\delta>0$, τότε

$$\mu(A)\mu(B)\leqslant 4\alpha_\mu(\delta/2).$$

4. Σταθεροποιούμε έναν (μικρό) θετικό αριθμό κ. Έστω (X,d,μ) μετρικός χώρος πιθανότητας. Ορίζουμε τη *μερική διάμετρο* του (X,d) ως προς το μ ως εξής:

$$PD_\mu(X,d):=\inf\Big\{\mathrm{diam}(A):A\in\mathcal{B}(X),\mu(A)\geqslant 1-\kappa\Big\}.$$

Στη συνέχεια, για κάθε 1-Lipschitz συνάρτηση $F:(X,d)\to\mathbb{R}$ θεωρούμε το μέτρο μ_F που ορίζεται στη Borel σ-άλγεβρα του $\mathbb{R}$ μέσω της

$$\mu_F(A)=\mu(F^{-1}(A)),\qquad A\in\mathcal{B}(\mathbb{R})$$

και ορίζουμε την *παρατηρήσιμη διάμετρο* $OD_\mu(X,d)$ θέτοντας

$$OD_\mu(X,d)=\sup\{PD_{\mu_F}(\mathbb{R}):\text{η } F:(X,d)\to\mathbb{R}\text{ είναι } 1-\text{Lipschitz}\}.$$

Αποδείξτε ότι

$$OD_\mu(X,d)\leqslant 2\alpha_\mu^{-1}(\kappa/2).$$

5. Έστω (X,d,μ) μετρικός χώρος πιθανότητας. Υποθέτουμε ότι $\alpha_\mu(t)\leqslant Ce^{-ct^2}$ για κάποιες σταθερές $C,c>0$ και για κάθε $t>0$. Αποδείξτε ότι (αν η σταθερά $\kappa>0$ της προηγούμενης άσκησης είναι αρκετά μικρή σε σχέση με τις C,c) τότε

$$OD_\mu(X,d)\leqslant 2\sqrt{\frac{1}{c}\ln\frac{2C}{\kappa}}.$$

Εκτιμήστε τις

$$OD_\sigma(S^{n-1}),\qquad OD_{\gamma_n}(\mathbb{R}^n),\qquad OD_{\mu_n}(E_2^n).$$

6. Γνωρίζουμε ότι υπάρχει σταθερά $c > 0$ τέτοια ώσστε: για κάθε Borel σύνολο $A \subseteq S^{n-1}$ με $\sigma(A) \geqslant 1/2$ και κάθε $t > 0$ ισχύει $\sigma(A_t) \geqslant 1 - 2e^{-ct^2 n}$.

Έστω B Borel υποσύνολο της S^{n-1} με $\sigma(A) > 2\exp(-cs^2 n)$ για κάποιο $s > 0$. Αποδείξτε ότι $\sigma(A_s) \geqslant 1/2$ και συμπεράνατε ότι για κάθε $t \geqslant s$ ισχύει

$$\sigma(A_{2t}) \geqslant 1 - \exp(-ct^2 n).$$

7. Έστω B κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Για κάθε Lebesgue μετρήσιμο υποσύνολο A του $\mathbb{R}^n$, ορίζουμε

$$\mu_B(A) = \frac{|A \cap B|}{|B|}.$$

(α) Έστω $M \subseteq \mathbb{R}^n$ κυρτό και συμμετρικό ως προς το 0. Αποδείξτε ότι για κάθε $t > 1$ ισχύει ο εγκλεισμός

$$\mathbb{R}^n \setminus M \supseteq \frac{2}{t+1}(\mathbb{R}^n \setminus tM) + \frac{t-1}{t+1}M.$$

(β) Υποθέτουμε επιπλέον ότι $\mu_B(M) = a > 0$. Χρησιμοποιώντας το (α) και την ανισότητα Brunn-Minkowski αποδείξτε ότι, για κάθε $t > 1$,

$$1 - \mu_B(tM) \leqslant a\left(\frac{1-a}{a}\right)^{(t+1)/2}.$$

8. Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^n$ κλειστό, κυρτό και συμμετρικό ως προς το 0. Αποδείξτε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$ ισχύουν οι ανισότητες

$$e^{-|x|^2/2}\gamma_n(A) \leqslant \gamma_n(A + x) \leqslant \gamma_n(A).$$

9. Έστω $f, g, h : [0, \infty) \to [0, \infty)$ ολοκληρώσιμες συναρτήσεις που ικανοποιούν την

$$h(\sqrt{rs}) \geqslant \sqrt{f(r)} \cdot \sqrt{g(s)}$$

για κάθε $r, s > 0$. Αποδείξτε ότι

$$\int_0^\infty h(x)dx \geqslant \left(\int_0^\infty f(x)dx \cdot \int_0^\infty g(x)dx\right)^{1/2}.$$

10. (α) Για κάθε $u \in S^{n-1}$ και για κάθε $\varepsilon \in (0,1)$ ορίζουμε $C(u,\varepsilon) = \{\theta \in S^{n-1} : \langle u, \theta\rangle \geqslant \varepsilon\}$. Αποδείξτε ότι

$$\sigma(C(u,\varepsilon)) \leqslant \exp(-\varepsilon^2 n/2).$$

(β) Για κάθε $u \in S^{n-1}$ και για κάθε $\varepsilon \in (0,1)$ ορίζουμε $B(u,\varepsilon) = \{\theta \in S^{n-1} : |\theta - u| \leqslant \varepsilon\}$. Αποδείξτε ότι

$$\sigma(B(u,\varepsilon)) \geqslant \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon+2}\right)^n \geqslant \left(\frac{\varepsilon}{3}\right)^n.$$

(γ) Έστω $v_1, \ldots, v_m \in \mathbb{R}^n$. Υποθέτουμε ότι το συμμετρικό κυρτό πολύεδρο

$$K = \{y \in \mathbb{R}^n : |\langle y, v_j\rangle| \leqslant 1 \text{ για κάθε } j = 1, \ldots, m\}$$

ικανοποιεί την $B_2^n \subseteq K \subseteq \alpha B_2^n$ για κάποιον $\alpha > 1$. Δείξτε ότι $m \geqslant \exp(n/(2\alpha^2))$.

11. Έστω $0 < \varepsilon < 1$. Αποδείξτε ότι υπάρχουν $N \geqslant \exp(c(\varepsilon)n)$ και $x_1, \ldots, x_N \in S^{n-1}$ τέτοια ώστε $|\langle x_i, x_j\rangle| \leqslant \varepsilon$ για κάθε $1 \leqslant i \neq j \leqslant N$ (με λόγια, υπάρχει εκθετικό ως προς το n πλήθος μοναδιαίων διανυσμάτων που ανά δύο είναι σχεδόν ορθογώνια).

12. Έστω $(X_i, \|\cdot\|_i)$, $i \leqslant n$, πεπερασμένη ακολουθία χώρων με νόρμα. Για κάθε $i \leqslant n$ θεωρούμε ένα πεπερασμένο υποσύνολο Ω_i του X_i με διάμετρο μικρότερη ή ίση του 1. Έστω P_i μέτρο πιθανότητας στο Ω_i. Θεωρούμε τον χώρο γινόμενο $X^{(n)} = \big(\sum_{i\leqslant n} \oplus X_i\big)_2$ και θέτουμε

$$\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2 \times \cdots \times \Omega_n$$

και

$$P = P^n = P_1 \times P_2 \times \cdots \times P_n.$$

(το μέτρο γινόμενο στο Ω). Για κάθε $A \subseteq \Omega$ ορίζουμε

$$\phi_A(t) = d(t, \mathrm{conv}(A)),$$

την απόσταση του t από την κυρτή θήκη $\mathrm{conv}(A)$ του A στον $X^{(n)}$. Δείξτε ότι, για κάθε $A \subseteq \Omega$,

$$\mathbb{E}\left(e^{\phi_A^2}/4\right) \leqslant \frac{1}{P(A)}.$$

13. Έστω X μια μη αρνητική τυχαία μεταβλητή και έστω $t > 0$. Αποδείξτε ότι

$$\inf\left\{\frac{\mathbb{E}(X^k)}{t^k} : k = 0, 1, 2, \ldots\right\} \leqslant \inf\left\{\frac{\mathbb{E}(e^{\lambda X})}{e^{\lambda t}} : \lambda > 0\right\}.$$

14. Έστω X τυχαία μεταβλητή με $\mathbb{E}(X) = 0$ και $\mathbb{P}(a \leqslant X \leqslant b) = 1$. Αν $\psi_X(\lambda) = \log(\mathbb{E}(e^{\lambda X}))$, αποδείξτε ότι, για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\psi_X''(\lambda) \leqslant \frac{(b-a)^2}{4}$$

και συμπεράνατε ότι

$$\mathbb{E}(e^{\lambda X}) \leqslant \exp\Big(\frac{\lambda^2(b-a)^2}{8}\Big).$$

15. Έστω $X_1, \ldots, X_N$ ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές με $\mathbb{P}(a_i \leqslant X_i \leqslant b_i) = 1$ για $i = 1, \ldots, N$. Δείξτε ότι

$$\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^N (X_i - \mathbb{E}(X_i)) \geqslant t\right) \leqslant \exp\left(-\frac{2t^2}{\sum_{i=1}^N (b_i - a_i)^2}\right)$$

για κάθε $t > 0$.

16. Θεωρούμε τη συνάρτηση Orlicz $\psi_1(t) = e^t - 1$. Έστω X τυχαία μεταβλητή στο χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Αποδείξτε ότι τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(α) Υπάρχει $\alpha > 0$ ώστε: $\|X\|_{\psi_1} \leqslant \alpha$.

(β) Υπάρχει $\beta > 0$ ώστε: για κάθε $p \geqslant 1$ ισχύει $\|X\|_p \leqslant \beta p$.

(γ) Υπάρχει $\gamma > 0$ ώστε: για κάθε $t > 0$ ισχύει $\mathbb{P}(|X| \geqslant t) \leqslant 2e^{-t/\gamma}$.

Επιπλέον, $\beta \leqslant c_1\alpha$, $\gamma \leqslant c_2\beta$, $\alpha \leqslant c_3\gamma$, όπου $c_i > 0$ είναι απόλυτες σταθερές.

17. Έστω $p \geqslant 2$ και $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ ανεξάρτητες συμμετρικές τυχαίες μεταβλητές Bernoulli. Αποδείξτε ότι: για κάθε $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$\left(\mathbb{E}\Big|\sum_{i=1}^n a_i\varepsilon_i\Big|^p\right)^{1/p} \leqslant \sum_{i\leqslant p} a_i^* + c\sqrt{p}\left(\sum_{i>p}(a_i^*)^2\right)^{1/2},$$

όπου $(a_1^*,\ldots,a_n^*)$ είναι η φθίνουσα αναδιάταξη της n-άδας $(|a_1|,\ldots,|a_n|)$.

18. Έστω $\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n$ ανεξάρτητες συμμετρικές τυχαίες μεταβλητές Bernoulli. Για κάθε φραγμένο μη κενό $A\subseteq\mathbb{R}^n$ αποδείξτε ότι

$$\sup_{a\in A}\mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^n a_i\varepsilon_i\right)=\sup_{a\in A}\sum_{i=1}^n a_i^2$$

όπου $a=(a_1,\ldots,a_n)$, και

$$\mathrm{Var}\left(\sup_{a\in A}\sum_{i=1}^n a_i\varepsilon_i\right)\leqslant 4\sup_{a\in A}\sum_{i=1}^n a_i^2.$$

19. Έστω $X=(X_1,\ldots,X_n)$ τυχαίο διάνυσμα στον $\mathbb{R}^n$ με ανεξάρτητες υποκανονικές συντεταγμένες που ικανοποιούν την $\mathbb{E}(X_i^2)=1$, $i=1,\ldots,n$. Θέτουμε $K=\max_i\|X_i\|_{\psi_2}$. Αποδείξτε ότι

$$\sqrt{n}-c_1K^2\leqslant\mathbb{E}\|X\|_2\leqslant\sqrt{n}+c_1K^2,$$

όπου $c_1>0$ απόλυτη σταθερά. Αποδείξτε επίσης ότι $\mathrm{Var}(\|X\|_2)\leqslant c_2K^4$, όπου $c_4>0$ απόλυτη σταθερά.

20. Έστω $X=(X_1,\ldots,X_n)$ τυχαίο διάνυσμα στον $\mathbb{R}^n$ με ανεξάρτητες συντεταγμένες που ικανοποιούν τις $\mathbb{E}(X_i^2)=1$ και $\mathbb{E}X_i^4\leqslant K^4$, $i=1,\ldots,n$. Αποδείξτε ότι $\mathrm{Var}(\|X\|_2)\leqslant c_1K^4$, όπου $c_1>0$ απόλυτη σταθερά.

21. Έστω $X=(X_1,\ldots,X_n)$ τυχαίο διάνυσμα στον $\mathbb{R}^n$ με ανεξάρτητες συντεταγμένες που έχουν συνεχείς πυκνότητες απολύτως φραγμένες από 1. Αποδείξτε ότι, για κάθε $\varepsilon>0$,

$$\mathbb{P}(\|X\|_2\leqslant\varepsilon\sqrt{n})\leqslant(c_1\varepsilon)^n,$$

όπου $c_1>0$ απόλυτη σταθερά.

22. Έστω $A=(a_{ij})$ ένας $n\times n$ συμμετρικός πίνακας, ο οποίος είτε είναι θετικά ημιορισμένος είτε έχει μηδενικά στη διαγώνιο, τέτοιος ώστε: για κάθε $x_1,\ldots,x_n\in[-1,1]$,

$$\left|\sum_{i,j=1}^n a_{ij}x_ix_j\right|\leqslant 1.$$

Αποδείξτε ότι: για κάθε χώρο Hilbert H και κάθε επιλογή διανυσμάτων $u_i,v_j\in H$ με $\|u_i\|=\|v_j\|=1$, $i,j=1,\ldots n$,

$$\left|\sum_{i,j=1}^n a_{ij}\langle u_i,v_j\rangle\right|\leqslant K,$$

όπου $K>0$ είναι η σταθερά στην ανισότητα του Grothendieck.

23. Έστω $X_1,\ldots,X_N$ ανεξάρτητοι τυχαίοι $n\times n$ πίνακες με μέση τιμή 0 και $\|X_i\|\leqslant K$ σχεδόν βεβαίως για κάθε $i=1,\ldots,N$. Χρησιμοποιώντας την ανισότητα Bernstein αποδείξτε ότι

$$\mathbb{E}\Big\|\sum_{i=1}^N X_i\Big\|\leqslant C\left(\Big\|\sum_{i=1}^N\mathbb{E}(X_i^2)\Big\|^{1/2}\sqrt{\log n}+K\log n\right).$$

24. Έστω $\epsilon_1,\ldots,\epsilon_N$ ανεξάρτητες συμμετρικές τυχαίες μεταβλητές Bernoulli και $A_1,\ldots,A_n$ συμμετρικοί $n\times n$ πίνακες. Αποδείξτε ότι, για κάθε $t\geqslant 0$,

$$\mathbb{P}\left(\Big\|\sum_{i=1}^N\epsilon_iA_i\Big\|\geqslant t\right)\leqslant 2n\exp(-t^2/2\sigma^2),$$

όπου $\sigma^2 = \left\|\sum_{i=1}^N A_i^2\right\|$.

25. Έστω $\epsilon_1,\dots,\epsilon_N$ ανεξάρτητες συμμετρικές τυχαίες μεταβλητές Bernoulli και $A_1,\dots,A_n$ συμμετρικοί $n\times n$ πίνακες. Αποδείξτε ότι
$$\mathbb{E}\Big\|\sum_{i=1}^N \epsilon_i A_i\Big\| \leqslant C\sqrt{\log n}\Big\|\sum_{i=1}^N A_i^2\Big\|^{1/2}.$$
Γενικότερα, αποδείξτε ότι για κάθε $p\geqslant 1$
$$\left(\mathbb{E}\Big\|\sum_{i=1}^N \epsilon_i A_i\Big\|^p\right)^{1/p} \leqslant C\sqrt{p+\log n}\Big\|\sum_{i=1}^N A_i^2\Big\|^{1/2}.$$

26. Έστω $A=(a_{ij})$ ένας $n\times n$ πίνακας. Έστω $X_1,\dots,X_n$ ανεξάρτητα τυχαία διανύσματα με μέση τιμή 0 σε έναν χώρο Hilbert H. Αποδείξτε ότι, για κάθε κυρτή συνάρτηση $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,
$$\mathbb{E}\,F\left(\sum_{i\neq j} a_{ij}\langle X_i,X_j\rangle\right) \leqslant \mathbb{E}\,F\left(4\sum_{i,j} a_{ij}\langle X_i,X_j'\rangle\right),$$
όπου (X_j') είναι ένα ανεξάρτητο αντίγραφο του (X_i).

27. Έστω $(u_{ij})_{i,j=1}^n$ διανύσματα σε έναν χώρο με νόρμα. Έστω $X_1,\dots,X_n$ ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές με μέση τιμή 0. Αποδείξτε ότι, για κάθε κυρτή συνάρτηση $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,
$$\mathbb{E}\,F\left(\Big\|\sum_{i\neq j} X_iX_ju_{ij}\Big\|\right) \leqslant \mathbb{E}\,F\left(4\Big\|\sum_{i,j} X_i,X_j'u_{ij}\Big\|\right),$$
όπου (X_j') είναι ένα ανεξάρτητο αντίγραφο του (X_i).

28. Έστω $\epsilon_1,\dots,\epsilon_N$ ανεξάρτητες συμμετρικές τυχαίες μεταβλητές Bernoulli. Έστω $X_1,\dots,X_N$ ανεξάρτητα τυχαία διανύσματα σε έναν χώρο με νόρμα. Αποδείξτε ότι
$$\mathbb{E}\Big\|\sum_{i=1}^N X_i-\sum_{i=1}^N\mathbb{E}(X_i)\Big\| \leqslant 2\mathbb{E}\Big\|\sum_{i=1}^N \epsilon_iX_i\Big\|.$$

29. Έστω $\epsilon_1,\dots,\epsilon_N$ ανεξάρτητες συμμετρικές τυχαίες μεταβλητές Bernoulli. Έστω $X_1,\dots,X_N$ ανεξάρτητα τυχαία διανύσματα με μέση τιμή 0 σε έναν χώρο με νόρμα. Αποδείξτε ότι, για κάθε αύξουσα κυρτή συνάρτηση $F:[0,\infty)\to\mathbb{R}$,
$$\mathbb{E}\,F\left(\frac{1}{2}\Big\|\sum_{i=1}^N \epsilon_iX_i\Big\|\right) \leqslant \mathbb{E}\,F\left(\Big\|\sum_{i=1}^N X_i\Big\|\right) \leqslant \mathbb{E}\,F\left(2\Big\|\sum_{i=1}^N \epsilon_iX_i\Big\|\right).$$

30. Έστω $\epsilon_1,\dots,\epsilon_N$ ανεξάρτητες συμμετρικές τυχαίες μεταβλητές Bernoulli. Έστω $X_1,\dots,X_N$ ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές. Αποδείξτε ότι η $\sum_{i=1}^N X_i$ είναι υποκανονική αν και μόνο αν η $\sum_{i=1}^N \epsilon_iX_i$ είναι υποκανονική, και
$$c_1\Big\|\sum_{i=1}^N \epsilon_iX_i\Big\|_{\psi_2} \leqslant \Big\|\sum_{i=1}^N X_i\Big\|_{\psi_2} \leqslant C_2\Big\|\sum_{i=1}^N \epsilon_iX_i\Big\|_{\psi_2},$$
όπου $c_1,C_2>0$ είναι απόλυτες σταθερές.

31. Έστω T φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ και $g_1,\dots,g_n$ ανεξάρτητες $N(0,1)$ τυχαίες μεταβλητές. Έστω $\phi_i:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ Lipschitz συναρτήσεις με $\|\phi_i\|_{\rm Lip}\leqslant 1$. Αποδείξτε ότι

$$\mathbb{E}\sup_{t\in T}\sum_{i=1}^n g_i\phi(t_i)\leqslant \mathbb{E}\sup_{t\in T}\sum_{i=1}^n g_it_i.$$

32. Έστω $T\subset\mathbb{R}^n$ και A ένας $m\times n$ πίνακας. Αποδείξτε ότι

$$w(AT)\leqslant \|A\|\,w(T).$$

33. Έστω T πεπερασμένο σύνολο σημείων στον $\mathbb{R}^n$. Αποδείξτε ότι

$$w(T)\leqslant C\sqrt{\log|T|}\,{\rm diam}(T).$$

34. (α) Αποδείξτε ότι αν T είναι μια Ευκλείδεια μπάλα σε οποιονδήποτε υπόχωρο του $\mathbb{R}^n$ τότε $d(T)={\rm dim}(T)$.
(β) Αποδείξτε ότι αν T είναι ένα πεπερασμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ τότε $d(T)\leqslant C\log|T|$.

35. Έστω $\{e_1,\dots,e_n\}$ η συνήθης ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^n$. Θεωρούμε το σύνολο

$$T=\left\{\frac{e_k}{\sqrt{1+\log k}}:k=1,\dots,n\right\}.$$

Αποδείξτε ότι $w(T)\leqslant C$, όπου $C>0$ είναι μια απόλυτη σταθερά. Αποδείξτε επίσης ότι

$$\int_0^\infty\sqrt{\log\mathcal{N}(T,d,\varepsilon)}\,d\varepsilon\longrightarrow\infty$$

καθώς το $n\to\infty$.

36. Για το σύνολο $T\subset\mathbb{R}^n$ της προηγούμενης άσκησης, αποδείξτε ότι

$$\gamma_2(T,d)\leqslant C$$

όπου $C>0$ είναι μια απόλυτη σταθερά (και d η Ευκλείδεια μετρική). Αποδείξτε επίσης ότι

$$\inf_{(T_k)}\sum_{k=0}^\infty 2^{k/2}\sup_{t\in T}d(t,T_k)\longrightarrow\infty$$

καθώς το $n\to\infty$, όπου το infimum είναι πάνω από όλες τις επιτρεπτές ακολουθίες $(T_k)_{k=0}^\infty$ υποσυνόλων του T.

37. Έστω $T\subset\mathbb{R}^n$. Θέτουμε $a=\frac{w(T)}{\sqrt{n}}$ και $b={\rm diam}(T)$. Αποδείξτε ότι

$$w(T)\leqslant C\int_{ca}^b\sqrt{\log N(T,\varepsilon)}\,d\varepsilon,$$

όπου $c,C>0$ είναι απόλυτες σταθερές.

38. Έστω $\mathcal{F}=\{f:[0,1]^d\to\mathbb{R}:f(0)=0\ \text{ και }\ \|f\|_{\rm Lip}\leqslant 1\}$. Αποδείξτε ότι, για κάθε $\varepsilon>0$,

$$\mathcal{N}(\mathcal{F},\|\cdot\|_\infty,\varepsilon)\leqslant e^{C/\varepsilon^d},$$

όπου $C>0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

39. Υπολογίστε τη διάσταση ${\rm vc}(\mathcal{F})$ σε κάθε μία από τις παρακάτω περιπτώσεις:

(α) $\mathcal{F}$ είναι η οικογένεια όλων των κύκλων στο επίπεδο.

(β) $\mathcal{F}$ είναι η οικογένεια όλων των ορθογωνίων $[a,b]\times[c,d]$ στο επίπεδο.

(γ) $\mathcal{F}$ είναι η οικογένεια όλων των τετραγώνων $[a,b]\times[a,b]$ στο επίπεδο.

(δ) $\mathcal{F}$ είναι η οικογένεια όλων των κυρτών πολυγώνων (με οσοδήποτε μεγάλο πλήθος κορυφών) στο επίπεδο.

40. Έστω (Ω,Σ,μ) χώρος πιθανότητας και $\mathcal{F}$ μια οικογένεια μετρήσιμων συναρτήσεων $f:\Omega\to\mathbb{R}$ με $\|f\|_\infty\leqslant 1$ για κάθε $f\in\mathcal{F}$. Έστω $\varepsilon\in(0,1)$. Αποδείξτε ότι υπάρχουν $n\leqslant C\varepsilon^{-4}\log\mathcal{N}(\mathcal{F},L^2(\mu),\varepsilon)$ και $\Omega_n\subseteq\Omega$ με $|\Omega_n|=n$ τέτοιο ώστε

$$\mathcal{N}(\mathcal{F},L^2(\mu),\varepsilon)\leqslant\mathcal{N}(\mathcal{F},L^2(\mu_n),\varepsilon/4),$$

όπου μ_n είναι το ομοιόμορφο μέτρο πιθανότητας στο Ω_n.