τότε $\varphi(z)=e^{i\arg}$ $\Leftrightarrow$ $\varphi(z)=\frac{z}{|z|}=e^{i\arg z}$, $z\neq 0$ και άρα η φ συνεχής στο $\mathbb{C}\setminus\{0\}$.

Αν $\lambda\in\mathbb{Z}$ με $\lambda>0$, τότε $\varphi(z)=(e^{i\arg z})^{\lambda}$ και αν $\lambda\in\mathbb{Z}$ με $\lambda<0$ τότε $\varphi(z)=\frac{1}{(e^{i\arg z})^{\lambda}}$ (από όπου έπεται ότι φ συνεχής.)

β) Η $\varphi|_{\mathbb{C}_\pi}$ είναι προφανώς συνεχής ως σύνθεση συνεχών (και εφ' όσον η $\arg|_{\mathbb{C}_\pi}$ είναι συνεχής). Έστω $z\in\mathbb{R}$ με $z<0$.
Θέτουμε $z_n=z+i/n$, $w_n=z-i/n$, $\theta_n=\arg z_n$ και $\varphi_n=\arg w_n$, $n\geq 1$.
Τότε $\theta_n\to\pi$ και $\varphi_n\to-\pi$ και άρα

$$\varphi(z_n)=e^{i\lambda\theta_n}\to e^{i\lambda\pi} \quad\text{και}\quad \varphi(w_n)=e^{i\lambda\varphi_n}\to e^{-i\lambda\pi}.$$

Παρατηρούμε ότι $e^{i\lambda\pi}\neq e^{-i\lambda\pi}$. Πράγματι, αν $e^{i\lambda\pi}=e^{-i\lambda\pi}$ τότε θα υπήρχε $k\in\mathbb{Z}$ ώστε $i\lambda\pi-(-i\lambda\pi)=2k\pi i \Leftrightarrow 2i\lambda\pi=2ik\pi \Leftrightarrow \lambda=k\in\mathbb{Z}$, άτοπο.
Έπεται προφανώς ότι η φ είναι μη συνεχής σε κάθε σημείο του αρνητικού ημιάξονα $(-\infty,0)$.

3) Έστω $\lambda\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}$. Τότε η συνάρτηση $f(z)=z^{\lambda}$, $z\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$ είναι ολόμορφη στον τόπο $\mathbb{C}_\pi$ και ασυνεχής σε κάθε σημείο $z\in\mathbb{R}$ με $z<0$.

<u>Λύση</u> $f(z)\underset{\text{ορ}}{=}e^{\lambda\log z}$, άρα η f είναι ολόμορφη στον τόπο $\mathbb{C}_\pi$ αφού ο κύριος κλάδος του λογαρίθμου είναι ολόμορφη στον $\mathbb{C}_\pi$ και βέβαια η εκθετική είναι ολόμορφη στο $\mathbb{C}$.
Παρατηρούμε ότι

$$f(z)=z^{\lambda}=e^{\lambda\log z}=e^{\lambda(\log|z|+i\arg z)}=e^{\lambda\log|z|}\cdot e^{i\lambda\arg z}$$

Από την άσκηση 2 (β) η συνάρτηση $z\in\mathbb{C}\setminus\{0\}\to e^{i\lambda\arg z}$ είναι συνεχής (στον $\mathbb{C}_\pi$ και) ασυνεχής σε κάθε αρνητικό πραγματικό αριθμό. Επίσης η συνάρτηση $z\in\mathbb{C}\setminus\{0\}\xrightarrow{g}e^{\lambda\log|z|}$ είναι συνεχής ως σύνθεση συνεχών και $g(z)\neq 0$ $\forall z\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$. Από τις δύο αυτές παρατηρήσεις έπεται ότι η f ασυνεχής σε κάθε αρνητικό πραγματικό αριθμό.

<u>Παρατήρηση</u>. Σχετικά με την ασκ. 3, παρατηρούμε ότι αν $\lambda\in\mathbb{Z}$ τότε:
α) η $z^{\lambda}=\underbrace{z\cdots z}_{\lambda\text{-φορές}}$, όταν $\lambda\in\mathbb{N}$ και έτσι η $f(z)=z^{\lambda}$ είναι ολόμορφη στο $\mathbb{C}$ και
β) $z^{\lambda}=\frac{1}{z^{-\lambda}}$, όταν $\lambda<0$ και έτσι η $f(z)=z^{\lambda}$ είναι ολόμορφη στον τόπο $\mathbb{C}\setminus\{0\}$.