Πρέπει να είναι σαφές ότι οι ακτίνες σύγκλισης των δυναμοσειρών στον ισχυρισμό (ε) είναι $R=+\infty$.

<u>Θέμα 2ο</u> Έστω $\gamma(t)=e^{it}$, $t\in[0,2\pi]$ και $a>1$.

α) Βρείτε την τιμή του επικαμπυλίου ολοκληρώματος

$$\int_\gamma \frac{dz}{z^2-2az+1}.$$

β) Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{dt}{a-\cos t}$.

<u>Λύση</u> α) Θέτουμε $h(z)=\dfrac{1}{z^2-2az+1}$. Το τριώνυμο $z^2-2az+1$ έχει διακρίνουσα $\Delta=4a^2-4>0$ και συνεπώς δύο ρίζες πραγματικές και άνισες, $\rho_1=a+\sqrt{a^2-1}$, $\rho_2=a-\sqrt{a^2-1}$. Προφανώς $\rho_1>1$ και εύκολα ελέγχουμε ότι $0<\rho_2<1$.

Έτσι συμπεραίνουμε ότι $h(z)=\dfrac{1}{\rho_2-\rho_1}\left(\dfrac{1}{z-\rho_1}-\dfrac{1}{z-\rho_2}\right)$, απ' όπου έπεται ότι: $\displaystyle\int_\gamma h(z)dz=\frac{1}{\rho_2-\rho_1}\left[\int_\gamma\frac{dz}{z-\rho_1}-\int_\gamma\frac{dz}{z-\rho_2}\right]=$

$$=\frac{1}{\rho_1-\rho_2}\left[2\pi i\,\delta_\gamma(\rho_1)-2\pi i\,\delta_\gamma(\rho_2)\right]=\frac{1}{\rho_1-\rho_2}\left[2\pi i\cdot 0-2\pi i\cdot 1\right]=$$

$$=\frac{-2\pi i}{\rho_1-\rho_2}=\frac{-2\pi i}{2\sqrt{a^2-1}}=-\frac{\pi i}{\sqrt{a^2-1}}\qquad(1).$$

Σημειώνουμε ότι ο υπολογισμός του $\int_\gamma h(z)dz$ μπορεί να γίνει και με την μέθοδο των ολοκληρωτικών υπολοίπων.

Πράγματι, $h(z)=\dfrac{1}{(z-\rho_2)}\cdot\left(\dfrac{1}{z-\rho_1}\right)$. Αν θέσουμε $g(z)=\dfrac{1}{z-\rho_1}$

τότε $g(\rho_2)=\dfrac{1}{\rho_2-\rho_1}\neq 0$ και έτσι η h έχει πόλο τάξης

1 στο ρ_2. Συνεπώς από το θεώρημα ολοκλ. υπολ. έχουμε,

$$\int_\gamma h(z)dz=2\pi i\,\mathrm{Res}(h,\rho_2)\cdot\delta_\gamma(\rho_2)=2\pi i\cdot g(\rho_2)\cdot 1=\frac{2\pi i}{\rho_2-\rho_1}=-\frac{\pi i}{\sqrt{a^2-1}}.$$

β) Για τον υπολογισμό του $I=\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{dt}{a-\cos t}$, παρατηρούμε