Μιγαδική Ανάλυση I — 15-6-22

ΟΔΗΓΙΕΣ: (Α) Να απαντήσετε σε 4 από τα 5 θέματα. Τα θέματα είναι βαθμολογικά ισοδύναμα.

(Β) Στο πάνω μέρος του γραπτού σας να σημειώσετε ποιά θέματα επιθυμείτε να βαθμολογηθούν.

Θέμα 1º Αποδείξτε ότι: (α) $\lim_{n\to\infty}(1+z)(1+z^2)\cdots(1+z^{2^n}) = \frac{1}{1-z}$, $|z|<1$.

(β) $|\cos z|<2$, $|z|<1$. [Υπόδ. $2^n<(2n)!$, $n\geq 2$.]

Θέμα 2º (α) Αν $\log z$ συμβολίζει τον κύριο κλάδο του λογαρίθμου και $a\in\mathbb{R}$ με $a\neq 0$, να υπολογίσετε το όριο (αν υπάρχει)

$$\lim_{y\to 0}[\log(a+iy)-\log(a-iy)]$$

(β) Έστω $\Omega\subseteq\mathbb{C}$ τόπος και $f:\Omega\to\mathbb{C}$ ολόμορφη συνάρτηση ώστε $\forall\, z\in\Omega$ ισχύει, είτε $f(z)=0$ ή $f'(z)=0$.
Αποδείξτε ότι η f είναι σταθερή.

Θέμα 3º (α) Έστω f ολόμορφη σε μια ανοικτή περιοχή του δίσκου $|z|\leq R$. Υποθέτουμε ότι $|f(z)|\leq M$ για $|z|=R$. Αποδείξτε ότι

$$|f^{(n)}(z)|\leq \frac{M.R.n!}{(R-|z|)^{n+1}},\quad |z|<R,\quad n\geq 0.$$

(β) Θεωρούμε την κλειστή καμπύλη $\gamma:[0,4\pi]\to\mathbb{C}$ ώστε $\gamma(t)=e^{it}$, $t\in[0,2\pi]$ και $\gamma(t)=3/2+1/2\,e^{i(\pi-t)}$, $t\in[2\pi,4\pi]$. Βρείτε διαισθητικά τις τιμές (και σημειώστε εις στο σχήμα πού θα κατασκευάσετε) του δείκτη στροφής δ_γ σε κάθε συνεκτική συνιστώσα του $\mathbb{C}\setminus[\gamma]$.

Θέμα 4º (α) Έστω $z,w\in\mathbb{C}$ ώστε $\mathrm{Re}z,\mathrm{Re}w\leq 0$. Αποδείξτε ότι $|e^z-e^w|\leq|z-w|$. Πώς ερμηνεύεται γεωμετρικά η ανισότητα, όταν $\mathrm{Re}z=\mathrm{Re}w=0$;

(β) Βρείτε το ανάπτυγμα Laurent της $f(z)=\frac{e^{z^2}-1}{z^3}$ στον δακτύλιο $|z|>0$ και υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\int_{C(0,R)} f(z)dz$, για $R>0$.

Θέμα 5º (α) Αποδείξτε ότι αν $\mathrm{Im}z\geq 0$ και $\lambda\geq 0$ τότε $|e^{i\lambda z}|\leq 1$.

(β) Αν $a>0$, αποδείξτε ότι η συνάρτηση $f(z)=\frac{e^{iz}-1}{z(z^2+a^2)}$ έχει επουσιώδη ανωμαλία στο 0 και απλούς πόλους στα σημεία $\pm ia$. Κατόπιν υπολογίστε το $\mathrm{Res}(f,ia)$ και το ολοκλήρωμα

$$I(a)=\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x(x^2+a^2)}dx.$$

[Απάν. $I(a)=\frac{\pi}{2a^2}\left(1-\frac{1}{e^a}\right)$.]

Καλή επιτυχία

Εξετάσεις Μιγαδικής Ανάλυσης της 15-6-22

Λύσεις των Θεμάτων

Θέμα 1ο (α) Θέτουμε $\varphi_n(z) = (1+z)(1+z^2)\cdot(1+z^4)\dots(1+z^{2^n})$, $n \geq 1$.
Τότε έχουμε για $|z|<1$

$$\varphi_n(z) = \frac{\cancel{1-z^2}}{1-z}\cdot\frac{\cancel{1-z^4}}{\cancel{1-z^2}}\cdot\frac{\cancel{1-z^8}}{\cancel{1-z^4}}\cdots\frac{\cancel{1-z^{2^n}}}{\cancel{1-z^{2^{n-1}}}}\cdot\frac{1-z^{2^{n+1}}}{\cancel{1-z^{2^n}}} = \frac{1-z^{2^{n+1}}}{1-z} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{1-z}$$

(β) Ως γνωστόν

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \dots + (-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n)!} + \dots$$

και η ανωτέρω σειρά συγκλίνει απολύτως $\forall\, z\in\mathbb{C}$.
Έπεται ότι αν $|z|<1$ τότε

$$|\cos z| < 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{4!} + \dots + \frac{1}{(2n)!} + \dots$$

Επειδή (με απλή επαγωγή συμπεραίνουμε ότι) $2^n < (2n)!$ για $n\geq 2$, θα έχουμε ότι,

$$\frac{1}{(2n)!} < \frac{1}{2^n}, \quad n\geq 2 .$$

Άρα,

$$|\cos z| < 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{4!} + \dots + \frac{1}{(2n)!} + \dots < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots = 1+1 = 2 .$$

Θέμα 2ο (α) Υπενθυμίζουμε ότι αν $z\in\mathbb{C}$ με $z\neq 0$ και $\arg(z)=\theta$ (= το κύριο όρισμα του z) τότε $\log z = \log|z| + i\theta$.
Είναι σαφές ότι

$$\lim_{\substack{y\to 0\\ y>0}}(a+iy) = \lim_{\substack{y\to 0\\ y<0}}(a+iy) = \lim_{\substack{y\to 0\\ y>0}}(a-iy) = a$$

(I) Υποθέτουμε ότι $a>0$. Από την συνέχεια του κύριου κλάδου του λογαρίθμου στον τόπο $\mathbb{C}_\pi = \mathbb{C}\setminus\{t\in\mathbb{R} : t\leq 0\}$ και επειδή $a\in\mathbb{C}_\pi$ έπεται ότι

$$\lim_{\substack{y\to 0\\ y>0}}\log(a+iy) = \lim_{\substack{y\to 0\\ y<0}}\log(a+iy) = \lim_{\substack{y\to 0\\ y>0}}\log(a-iy) = \log a .$$

Άρα το ζητούμενο όριο ισούται με μηδέν.
(II) Υποθέτουμε ότι $a<0$. Τότε έχουμε ότι

$$\lim_{\substack{y\to 0\\ y>0}} \arg(a+iy) = \pi \quad \text{και} \quad \lim_{\substack{y\to 0\\ y>0}} \arg(a-iy) = \lim_{\substack{y\to 0\\ y<0}} \arg(a+iy) = -\pi$$

Κατά συνέπεια

$$\lim_{\substack{y\to 0\\ y>0}} \log(a+iy) = \lim_{\substack{y\to 0\\ y>0}} [\log|a| + i\arg(a+iy)] = \log|a| + i\pi$$

και

$$\lim_{\substack{y\to 0\\ y<0}} \log(a+iy) = \lim_{\substack{y\to 0\\ y>0}} \log(a-iy) = \lim_{\substack{y\to 0\\ y>0}} [\log|a| + i\arg(a-iy)] = \log|a| - i\pi .$$

Έτσι τα πλευρικά όρια διαφέρουν και το ζητούμενο όριο δεν υπάρχει.
Σημειώνουμε ότι το αποτέλεσμα αυτό αποδεικνύει την ασυνέχεια του κυρίου (ορίσματος αλλά και του κυρίου) κλάδου του λογαρίθμου στα σημεία του αρνητικού ημιάξονα.

(β) Θέτουμε $g = f^2$. Τότε g ολόμορφη στον Ω και $g'(z) = 2f(z)\cdot f'(z)$ για $z\in\Omega$. Από την υπόθεση έπεται ότι $g'(z)=0$ $\forall z\in\Omega$. Επειδή το Ω είναι τόπος έπεται ότι η g είναι σταθερή συνάρτηση. Έστω $c\in\mathbb{C}$ ώστε $g(z)=c$ $\forall z\in\Omega$.

(I) Αν $c=0$ τότε προφανώς $f(z)=0$ $\forall z\in\Omega$.

(II) Υποθέτουμε ότι $c\neq 0$. Ας συμβολίσουμε με z_1, z_2 τις δύο διαφορετικές τετραγωνικές ρίζες του μιγαδικού c. Είναι τότε σαφές ότι $\forall z\in\Omega$ ισχύει

είτε $f(z)=z_1$ ή $f(z)=z_2$.

Δηλαδή η f παίρνει το πολύ δύο τιμές. Επειδή το Ω είναι συνεκτικό σύνολο (αφού είναι τόπος) και η f συνεχής, αναγκαία η f παίρνει μόνο μία τιμή. Έτσι η f είναι σταθερή.

Θέμα 3ο (α) Έστω z τυχόν σημείο του ανοικτού δίσκου $\Delta(0,R)$ και $n\geq 0$. Θέτουμε $\gamma(t) = Re^{it}$, $t\in[0,2\pi]$.
Από τον τύπο του Cauchy για παραγώγους έχουμε

$$f^{(n)}(z)\cdot \delta_\gamma(z) = \frac{n!}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}}\,d\zeta \quad \text{και} \quad \delta_\gamma(z)=1 .$$

Έπεται ότι

$$|f^{(n)}(z)| = \frac{n!}{2\pi}\left|\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}}\,d\zeta\right| \leq \frac{n!}{2\pi}\cdot \sup_{|\zeta|=R}\frac{|f(\zeta)|}{|\zeta-z|^{n+1}}\cdot 2\pi R .$$

Όμως αν $|\zeta|=R$ τότε $|f(\zeta)|\leq M$ και

$|\zeta-z| \geq \big||\zeta|-|z|\big| = R-|z|$. Άρα $|\zeta-z|^{n+1} \geq (R-|z|)^{n+1}$.

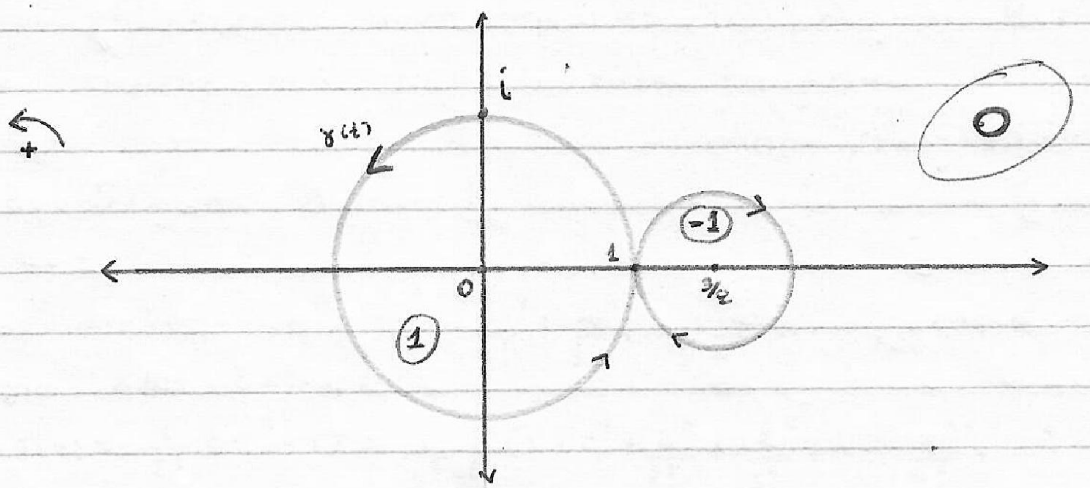
Κατά συνέπεια

$$\sup_{|\zeta|=R}\frac{|f(\zeta)|}{|\zeta-z|^{n+1}} \leq \frac{M}{(R-|z|)^{n+1}} .$$

Άρα θα έχουμε

$$|f^{(n)}(z)| \leq \frac{n!}{2\pi}\cdot\frac{M}{(R-|z|)^{n+1}}\cdot 2\pi R = \frac{M.R.n!}{(R-|z|)^{n+1}} .$$

(β)



Το ίχνος $[\gamma]$ της καμπύλης γ είναι η ένωση των κύκλων $C(0,1)$ και $C(3/2, 1/2)$. Ο προσανατολισμός της γ, όπως προκύπτει από την παραμέτρησή της, σημειώνεται στο σχήμα. Το σύνολο $\mathbb{C}\setminus[\gamma]$ έχει τρεις συνεκτικές συνιστώσες, τούς ανοικτούς δίσκους $D_1=\Delta(0,1)$, $D_2=\Delta(3/2, 1/2)$ και την (μη φραγμένη συνεκτική συνιστώσα) $D_3=\mathbb{C}\setminus(\bar D_1\cup \bar D_2)$, για τις οποίες έχουμε:

$\delta_\gamma(z)=1$, $z\in D_1$, $\delta_\gamma(z)=-1$, $z\in D_2$ και $\delta_\gamma(z)=0$, $z\in D_3$.

<u>Θέμα 4ο</u> (α) Θέτουμε $L=\{z\in\mathbb{C}: \text{Re}z\leq 0\}$ και $f(z)=e^z$, $z\in\mathbb{C}$. Παρατηρούμε ότι αν $z=x+iy\in L$ τότε $\text{Re}z=x\leq 0$, άρα $|e^z|=|e^x.e^{iy}|= e^x\leq e^0=1$. Έστω $z,w\in L$. Θέτουμε $\gamma=[z,w]$ και

τότε $e^w - e^z = \int_{[z,w]} (e^\zeta)' d\zeta = \int_{[z,w]} e^\zeta d\zeta$ και βέβαια $[z,w] \subseteq L$.

Άρα, $|e^w - e^z| = \left| \int_{[z,w]} e^\zeta d\zeta \right| \leq \sup_{\zeta \in [z,w]} |e^\zeta| \cdot L(\gamma) \leq 1 \cdot L(\gamma) = |z-w|$

Έτσι αποδείξαμε ότι η $f(z) = e^z$ είναι 1-Lipschitz στο αριστερό ημιεπίπεδο L.

Έστω τώρα $\operatorname{Re} z = \operatorname{Re} w = 0$, τότε $z = iy_1$ και $w = iy_2$, όπου $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ και τα σημεία e^z και e^w ανήκουν στον μοναδιαίο κύκλο. Έτσι έχουμε την ανισότητα

$$|e^{iy_1} - e^{iy_2}| \leq |y_1 - y_2|, \quad y_1, y_2 \in \mathbb{R}.$$

Η τελευταία ανισότητα είναι η αναλυτική έκφραση ενός γνωστού γεωμετρικού αποτελέσματος: Αν A και B είναι διαφορετικά σημεία ενός κύκλου τότε το μήκος της χορδής που συνδέει τα A και B είναι μικρότερο (του μήκους) του ελάσσονος τόξου που συνδέει τα A και B.

(β) Ως γνωστόν, $e^w = 1 + w + \frac{w^2}{2!} + \frac{w^3}{3!} + \dots + \frac{w^n}{n!} + \dots$, $w \in \mathbb{C}$.

Άρα για $z \neq 0$ έχουμε

$$f(z) = \frac{1}{z^3}(e^{z^2} - 1) = \frac{1}{z^3}\left[\left(1 + z^2 + \frac{z^4}{2!} + \frac{z^6}{3!} + \dots \frac{z^{2n}}{n!} + \dots\right) - 1\right] =$$

$$= \frac{1}{z^3}\left[z^2 + \frac{z^4}{2!} + \frac{z^6}{3!} + \dots + \frac{z^{2n}}{n!} + \dots\right] = \frac{1}{z} + \frac{z}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots + \frac{z^{2n-3}}{n!} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{2n-3}}{n!}.$$

Έτσι το ανάπτυγμα Laurent της f στον δακτύλιο $\Delta(0,0,+\infty) = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ είναι το $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{2n-3}}{n!}$.

Απο το ανάπτυγμα αυτο προκύπτει αμέσως από τους σχετικούς ορισμούς και αποτελέσματα ότι

$$\operatorname{Res}(f,0) = 1 \ (\equiv \text{ο συντελεστής του } 1/z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(0,R)} f(z)\,dz, \quad R > 0.$$

Κατά συνέπεια $\int_{C(0,R)} f(z)\,dz = 2\pi i$, $\forall R > 0$.

Θέμα 5: (α) Έστω $z = x+iy$ ώστε $Imz = y \geq 0$ και $\lambda \geq 0$ τότε $\lambda y \geq 0$, άρα, $|e^{i\lambda z}| = |e^{i\lambda(x+iy)}| = |e^{i\lambda x}| \cdot e^{-\lambda y} = e^{-\lambda y} \leq e^0 = 1$.

(β) Θέτουμε $\varphi(z) = \frac{e^{iz}-1}{z}$, τότε με χρήση του κανόνα L'Hospital (ή με τον ορισμό της παραγώγου) έχουμε $\lim_{z\to 0} \varphi(z) = \lim_{z\to 0} i \cdot e^{iz} = i e^{i \cdot 0} = i \cdot e^0 = i$. Έπεται ότι $\lim_{z\to 0} f(z) = \lim_{z\to 0} \varphi(z) \cdot \lim_{z\to 0} \frac{1}{z^2+a^2} = i \cdot \frac{1}{a^2} = \frac{i}{a^2}$.

Από το Θεώρημα του Riemann έχουμε ότι η f έχει επουσιώδη ανωμαλία στο 0.

Παρατηρούμε ότι $z^2+a^2 = (z-ia)(z+ia)$. Άρα $f(z) = \frac{g(z)}{z-ia}$, όπου $g(z) = \frac{\varphi(z)}{z+ia}$, επειδή η g είναι ολόμορφη αγύρω από το ia και $g(ia) = \frac{\varphi(ia)}{2ia} = \frac{e^{-a}-1}{ia(2ia)} = \frac{1-e^{-a}}{2a^2}$ $(a \neq 0)$ συμπεραίνουμε ότι το ia είναι απλός πόλος της f και συγχρόνως ότι $Res(f, ia) = g(ia)$. Ανάλογα αποδεικνύουμε ότι και το $-ia$ είναι απλός πόλος της f.

Καθ' όσον αφορά τον υπολογισμό του $I(a)$ παρατηρούμε τα ακόλουθα. Αν $Imz \geq 0$ τότε από τον ισχυρισμό (α) έχουμε ότι

$$|f(z)| = \frac{|e^{iz}-1|}{|z(z^2+a^2)|} \leq \frac{2}{|z(z^2+a^2)|}$$

Επειδή ο παρανομαστής της ρητής συνάρτησης δεξιά είναι πολυώνυμο βαθμού 3 συμπεραίνουμε ότι υπάρχει σταθερά $C>0$ και ένας αριθμός $R>a$ ώστε

$$|f(z)| \leq \frac{C}{|z|^3}, \text{ για } |z| \geq R.$$

Επειδή η f δεν έχει πόλους στην πραγματική ευθεία και ο μόνος πόλος της f στο άνω ημιεπίπεδο $\{z \in \mathbb{C} : Imz \geq 0\}$ είναι ο ia, από το Θεώρημα ολοκληρωτικών υπολοίπων χρησιμοποιώντας την καμπύλη $\sigma_R = [-R, R] + \Gamma_R$, όπου $\Gamma_R(t) = R \cdot e^{it}$, $t \in [0, \pi]$, (και αφήνοντας $R \to +\infty$) συμπεραίνουμε ότι

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 2\pi i \, Res(f, ia) = 2\pi i \, \frac{(1-e^{-a})}{2a^2} = \frac{\pi i}{a^2}(1-e^{-a})$$

(Πρβλ. και την πρόταση 6.15 από τις σημειώσεις που στην eclass.) Επειδή $\quad I(x) = \dfrac{\cos x - 1}{x(x^2+a^2)} + i\,\dfrac{\sin x}{x(x^2+a^2)}\,, \quad x \in \mathbb{R}$

από την τελευταία ισότητα συμπεραίνουμε ότι

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x(x^2+a^2)}\,dx = \frac{\pi}{a^2}(1-e^{-a}) \qquad \left(\text{και} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x - 1}{x(x^2+a^2)}\,dx = 0\right)$$

Όμως η συνάρτηση $\dfrac{\sin x}{x(x^2+a^2)}$ είναι άρτια, έτσι από την πρώτη ισότητα συμπεραίνουμε ότι, $I(a) = \dfrac{\pi}{2a^2}(1-e^{-a})$.

<u>Σημείωση</u>. Μπορούμε εναλλακτικά να εργαστούμε και με τη συνάρτηση $\quad h(z) = \dfrac{e^{iz}}{z(z^2+a^2)}$, η οποία όμως έχει ένα ακόμη απλό πόλο το 0 που ανήκει στην πραγματική ευθεία. Τότε με χρήση της καμπύλης $\sigma_{R,r}(t) = [-R,-r] - \gamma_r + [r,R] + \Gamma_R$, όπου $0<r<R$ και $\gamma_r(t) = re^{it}$, $t \in [0,\pi]$ και αφήνοντας $R \to +\infty$, $r \to 0$ υπολογίζουμε ότι

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} h(x)\,dx &= 2\pi i\, \mathrm{Res}(h(z), ia) + \pi i\, \mathrm{Res}(h(z), 0) \\ &= 2\pi i \frac{e^{-a}}{ia(2ia)} + \pi i \frac{1}{a^2} = \frac{\pi i}{a^2}(1-e^{-a})\end{aligned}$$

Επειδή $\quad \dfrac{\sin x}{x(x^2+a^2)} = \mathrm{Im}\,\dfrac{e^{ix}}{x(x^2+a^2)}$ έπεται ότι, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x(x^2+a^2)}\,dx = \frac{\pi}{a^2}(1-e^{-a})$

και συνεπώς $\quad I(a) = \dfrac{\pi}{2a^2}(1-e^{-a})$.

Θα πρέπει να σημειώσουμε όμως ότι προτιμήσαμε την πρώτη μέθοδο, εφ' όσον υπολογισμοί ολοκληρωμάτων συναρτήσεων με πόλους στην πραγματική ευθεία συνήθως δεν διδάσκονται σ' ένα πρώτο μάθημα Μιγαδικής Ανάλυσης.