05/12/22 (18º Μάθημα)

ΜΑΔΧ αντιστρέψιμη $\Leftrightarrow \hat{p}_{ij} = p_{ij}, \ \forall i,j \in S \Leftrightarrow$

$$\frac{\pi_j P_{ji}}{\pi_i} = P_{ij} \quad \forall i,j \in S \Leftrightarrow$$

$$\pi_j P_{ji} = \pi_i P_{ij}, \ \forall i,j \in S$$

εξισώσεις λεπτομερούς ισορροπίας

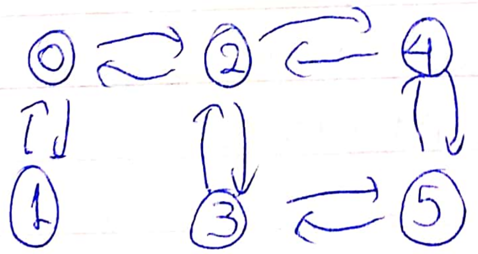
<u>Σημείωση:</u>
Όταν μια ΜΑΔΧ είναι αντιστρέψιμη, ισχύουν οι εξισώσεις λεπτομερούς ισορροπίας και το χρησιμοποιούμε για να υπολογίσουμε τη στάσιμη.
Χρειαζόμαστε ένα κριτήριο αντιστρεψιμότητας που δεν χρησιμοποιεί τη στάσιμη.

Εξισώσεις λεπτομερούς ισορροπίας

$\Downarrow \ \not\Uparrow$

Εξισώσεις πλήρους ισορροπίας

Πώς μπορούμε να υπολογίσουμε στάσιμη κατανομή σε αντιστρέψιμη ΜΑΔΧ




Επιλέγουμε μια κατάσταση (έστω τη 0)

· Για καθε αλλη κατασταση $i_n$ επιλεγουμε μονοπατι $0 \to i_n$, εστω $0 \to i_1 \to i_2 \to i_3 \to \dots \to i_n$

$0 \to i_1$ $\quad \pi_0 p_{0 i_1} = \pi_{i_1} P_{i_1 0} \Leftrightarrow \pi_{i_1} = \dfrac{P_{0 i_1}}{P_{i_1 0}} \pi_0$

$i_1 \to i_2$ $\quad \pi_{i_1} p_{i_1 i_2} = \pi_{i_2} P_{i_2 i_1} \Leftrightarrow \pi_{i_2} = \dfrac{P_{i_1 i_2}}{P_{i_2 i_1}} \pi_{i_1} =$

$$= \frac{P_{0 i_1} P_{i_1 i_2} \pi_0}{P_{i_2 i_1} P_{i_1 0}}$$

$i_2 \to i_3$ $\quad \pi_{i_2} p_{i_2 i_3} = \pi_{i_3} P_{i_3 i_2} \Leftrightarrow \pi_{i_3} = \dfrac{P_{i_2 i_3}}{P_{i_3 i_2}} \pi_{i_2}$

$$= \frac{P_{0 i_1} P_{i_1 i_2} P_{i_2 i_3}}{P_{i_3 i_2} P_{i_2 i_1} P_{i_1 0}} \pi_0$$

Συνεχιζοντας ετσι

$$\pi_{i_n} = \frac{P_{0 i_1} P_{i_1 i_2} P_{i_2 i_3} \dots P_{i_{n-1} i_n}}{P_{i_n i_{n-1}} P_{i_{n-1} i_{n-2}} \dots P_{i_3 i_2} P_{i_2 i_1} P_{i_1 0}} \pi_0$$

Αφού εκφρασω στασιμες ολων των καταστασεων ως προς $\pi_0$, χρησιμοποιω την εξισωση κανονικοποιησης και βρισκω την $\pi_0$.

Κριτηριο αντιστρεψιμότητας Kolmogorov
$\{X_n, n \geq 0\}$ αναστρεψιμη $\Leftrightarrow \forall i_0 \to i_1 \to i_2 \to \dots \to i_n \to i_0$ ισχυει $P_{i_0 i_1} P_{i_1 i_2} \dots P_{i_n i_0} = P_{i_0 i_n} P_{i_n i_{n-1}} \dots P_{i_2 i_1} P_{i_1 i_0}$

Απόδειξη: $(\Rightarrow)$

$\{X_n, n\geq 0\}$ αντιστρέψιμη τότε

$$P_{i_0 i_1} P_{i_1 i_2} \cdots P_{i_n i_0} = \frac{\pi_{i_0} P_{i_0 i_1} P_{i_1 i_2} \cdots P_{i_n i_0}}{\pi_{i_0}}$$

$$= \frac{P_{i_1 i_0} \pi_{i_1} P_{i_1 i_2} \cdots P_{i_n i_0}}{\pi_{i_0}}$$

$$= \frac{P_{i_1 i_0} P_{i_2 i_1} \pi_{i_2} P_{i_2 i_3} \cdots P_{i_n i_0}}{\pi_{i_0}}$$

$$= \frac{P_{i_1 i_0} P_{i_2 i_1} P_{i_3 i_2} \cdots \pi_{i_n} P_{i_n i_0}}{\pi_{i_0}}$$

$$= \frac{P_{i_1 i_0} P_{i_2 i_1} \cdots P_{i_0 i_n} \cancel{\pi_{i_0}}}{\cancel{\pi_{i_0}}}$$

$$= P_{i_0 i_n} P_{i_n i_{n-1}} \cdots P_{i_2 i_1} P_{i_1 i_0}$$

$(\Leftarrow)$ $\forall$ κύκλο $i_0 \to i_1 \to i_2 \to \cdots i_n \to i_0$ έχουμε

$$P_{i_0 i_1} P_{i_1 i_2} \cdots P_{i_{n-1}, i_n} P_{i_n i_0} = P_{i_0 i_n} P_{i_n i_{n-1}} \cdots P_{i_2 i_1} P_{i_1 i_0}$$

Αθροίζοντας για όλους τους κύκλους

$$P_{i_0 i_1} P^{(n)}_{i_1 i_0} = P^{(n)}_{i_0 i_1} P_{i_1 i_0} \quad \forall n \quad \begin{matrix} i_0 \to i_1 \to i_0 \\ 1\ \beta\acute{\eta}\mu. \quad n\ \beta\acute{\eta}\mu. \end{matrix}$$

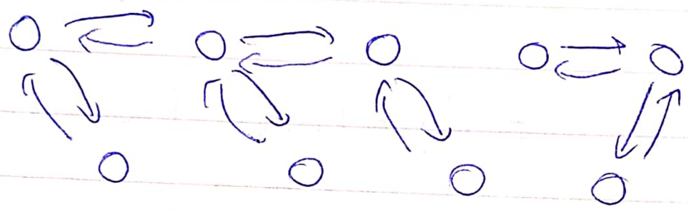
$$\lim_{k\to\infty} \sum_{n=0}^{k-1} \frac{P_{i_0 i_1} P^{(n)}_{i_1 i_0}}{k} = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=0}^{k-1} \frac{P^{(n)}_{i_0 i_1} P_{i_1 i_0}}{k}$$

$$P_{i_0 i_1} = \underbrace{\lim_{k\to\infty} \frac{\sum_{n=0}^{k-1} P_{i_1 i_0}^{(n)}}{k}}_{\pi_{i_0}} = P_{i_1 i_0} \underbrace{\lim_{k\to\infty} \frac{\sum_{n=0}^{k-1} P_{i_0 i_1}^{(n)}}{k}}_{\pi_{i_1}}$$

$$\Rightarrow \pi_{i_0} P_{i_0 i_1} = \pi_{i_1} P_{i_1 i_0}$$

Πόρισμα: · Κάθε ΜΑΔΧ γέννησης - θανάτου είναι αντιστρέψιμη

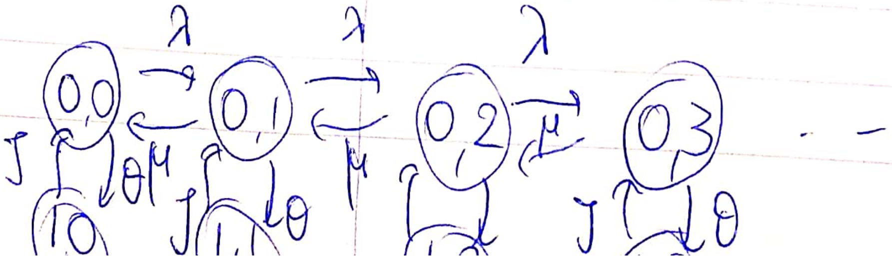
· Κάθε ΜΑΔΧ με διάγραμμα πιθ. μεταβ. της μορφής αμφίδρομου δέντρου είναι αντιστρέψιμη.



· Αρκεί να ελέγχω τη συνθήκη αντιστρεψιμότητας Kolmogorov μόνο για απλούς κύκλους με τουλάχιστον 3 καταστάσεις.

Φυλλάδιο:

1) $$\underbrace{\sum_{j\in A} \sum_{i\in A^c} \pi_j P_{ji}}_{\text{μακροπρ. ποσοστό μετ. που βγαίνουν από το A}} = \underbrace{\sum_{i\in A^c} \sum_{j\in A} \pi_i P_{ij}}_{\text{μακροπρ. ποσοστό μεταβάσεων που μπαίνουν στο A}}$$



$\pi_{0,1} = \pi_{0,2}\cdot\mu + \pi_{1,1}\cdot J + \pi_{0,0}\lambda$

$\pi_{0,1}\lambda = \pi_{0,2}\cdot\mu$

(μετα θα χωριζα το $(0,2)$ και θα εκανα το ιδιο)

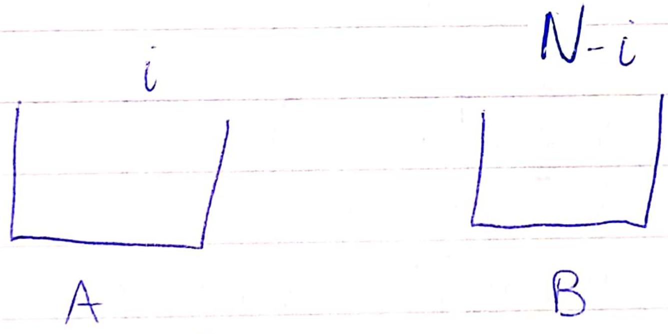
Γευ.→ πληρους $A = \{j\}$

$A^c = S \setminus \{j\}$

πληρους → γευικ. $\pi_j \cancel{1} = \sum_{i \in S} \pi_i p_{ij} \quad \forall j$

$\downarrow$ $\sum_{j \in S} p_{ji}$ $\qquad i \in S = A \setminus A^c$

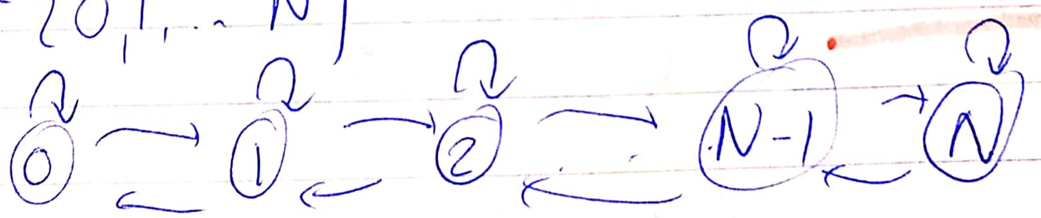
2 Άσκηση 2:



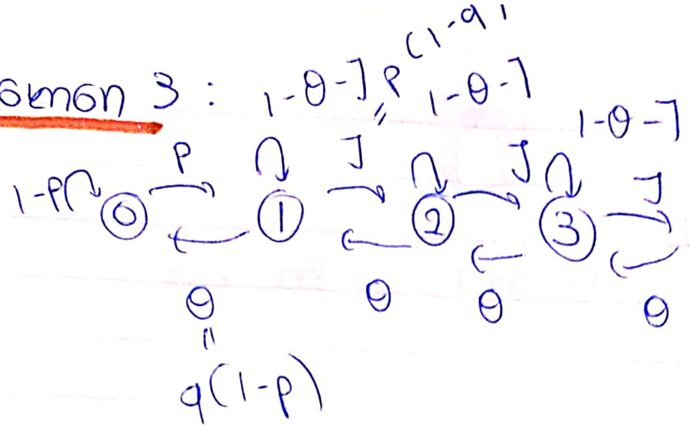

$X_n = \#$ σφαιριδιων στην καλπη A μετα το n-οστο βημα.

$P(X_{n+1} = i-1 \mid X_n = i) = \frac{i}{N} \cdot q$

$S = \{0, 1, \ldots N\}$



## Ασκηση 3:



Επαναληπτικη αν $h_i = 1 \quad \forall i \in S \iff h_0 = 1$

παροδικη αν $h_i < 1 \quad \forall i \in S \iff h_0 < 1$

Εχουμε δειξει οτι. Αν $\frac{\theta}{J} \geq 1 \iff \theta \geq J$, $h_i(\{0\}) = 1$ $\forall i \geq 1$

Αν $\frac{\theta}{J} < 1 \iff \theta < J$, $h_i(\{0\}) = \left(\frac{\theta}{J}\right)^{i}$ $\forall i \geq 1$

$$h_0 = P(T_0 < \infty \mid X_0 = 0) = P(X_1 = 1 \mid X_0 = 0) \cdot h_1(\{0\})$$

$$+ P(X_1 = 0 \mid X_0 = 0) \cdot 1$$

$$= p \cdot h_1(\{0\}) + 1 - p$$

επαναληπτικη

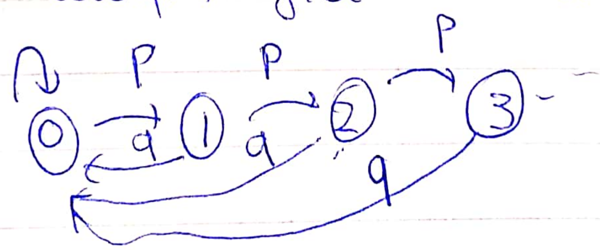
Αν $\theta \geq J$ $h_1(\{0\}) = 1$ αρα $h_0 = p + 1 - p = 1$.

Αν $\theta < J$, $h_1(\{0\}) = \frac{\theta}{J} < 1$ παροδικη

$$h_0 = p\frac{\theta}{J} + 1 - p < 1$$

Ελεγχω στασιμη για θετ. επαναλ.

## Ασκηση 4:



(Ελιωσας πληρους)

## Άσκηση 5:

$h_i(\{0\})$

$p$ 0 1 2 3

$h_1(\{0\})$

$(X_n, Y_n)$

$Y_n$ = καταστ του A που εχει επισκεφτει μεχρι το n-οστο βήμα

$h_i( \quad , A) = 1$

$h_0( \quad ) = 0$

07/12/22 (19º Μάθημα)

# 1) Μαρκοβιανές Αλυσίδες Συνεχούς Χρόνου

## 1.1 Περιγραφή, Ορισμοί, Ιδιότητες

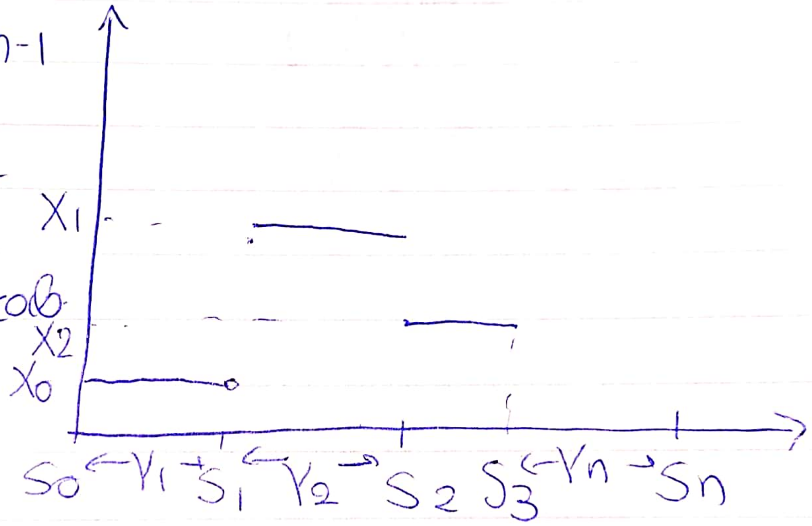
Θεωρούμε στοχαστική διαδικασία με αριθμήσιμο χώρο καταστάσεων $S$ η οποία μπορεί να αλλάξει κατάσταση οποιαδήποτε στιγμή.
Συμβολίζουμε:

$S_n$ στιγμή n-οστής μετάβασης

$S_0 = 0$

$Y_n = S_n - S_{n-1}$

$Y_n$: χρόνος μεταξύ n-1-οστής και n-οστής μετάβ.




$N(t)$ # μεταβάσεων μέχρι τη στιγμή $t$ στο $(0,t]$. $\{N(t), t \geq 0\}$ απαριθμήτρια

Υποθέτουμε ότι $P(N(t) < \infty) = 1 \quad \forall t \geq 0$.

$X_n$: κατάσταση μετά τη n-οστή μετάβαση.

$X(t) = X_{N(t)}$

↳ σ.δ συνεχούς χρόνου

**Ορισμός (ΜΑΣΧ)**

Μια στοχαστική διαδικασία $\{X(t), t \geq 0\}$ που ορίζεται όπως περιγράψαμε καλείται ομογενής αλυσίδα συνεχούς χρόνου (ΜΑΣΧ) αν η ακολουθία $\{X_n, (X_n, Y_n), n \geq 1\}$ ικανοποιεί τη σχέση

$$P(X_{n+1}=j, Y_{n+1}>y \mid X_n=i, Y_n, X_{n-1}, Y_{n-1}, \ldots, X_1, Y_1, X_0)$$

$$= P(X_{n+1}=j, Y_{n+1}>y \mid X_n=i)$$

$$= P(X_1=j, Y_1>y \mid X_0=i) = p_{ij} e^{-q_i y}, \quad i,j \in S, y \geq 0, n \geq 0$$

όπου ο $P=[p_{ij}]_{i,j \in S}$ στοχαστικός πίνακας με $p_{ii}=0 \ \forall i \in S$ και $0 \leq q_i < \infty$, $\forall i \in S$

Σημειώσεις:

- Πόσος χρόνος μένει σε μια κατάσταση;

$(Y_1 \mid X_0=i) \sim ?$

$$P(Y_1>y \mid X_0=i) \overset{\theta.o.\pi}{=} \sum_{j \in S} P(X_1=j, Y_j>y \mid X_0=i)$$

$$= \sum_{j \in S} p_{ij} e^{-q_i y} = e^{-q_i y} \underbrace{\sum_{j \in S} p_{ij}}_{1} = e^{-q_i y}$$

Άρα, $(Y_1 \mid X_0=i) \sim Exp(q_i)$

Σε ποια κατάσταση θα πάει;

$$P(X_1=j \mid X_0=i) = P(X_1=j, Y>0 \mid X_0=i)$$

$$= p_{ij} e^{-q_i \cdot 0} = p_{ij}$$

1η Περιγραφή εξέλιξης ΜΑΣΧ

Ξεκινάει από μια κατάσταση $i_0$. Μένει εκεί για χρόνο $Y_1 \sim Exp(q_{i_0})$. Μετά πάει στην κατάσταση $i_1 \neq i_0$ με πιθανότητα $P_{i_0 i_1}$ ανεξάρτητα από του χρόνου παραμονής στην $i_0$.

Συνεχίζει έτσι...

## Θεώρημα (Μαρκοβιανή Ιδιότητα / Χρονική ομογένεια)

Μια ΜΑΣΧ $\{X(t), t \geq 0\}$ με χ.κ. $S$ έχει τη Μαρκοβιανή Ιδιότητα, δηλαδή

$$P(X(s+t)=j \mid X(s)=i, X(u), 0 \leq u < s) =$$
$$= P(X(s+t)=j \mid X(s)=i) \quad \forall s,t \geq 0, \; i,j \in S$$

Επίσης, είναι και χρονικά ομογενής, δηλαδή

$$P(X(t+s)=j \mid X(s)=i) = P(X(t)=j \mid X(0)=i) \quad \forall s,t \geq 0, \; i,j \in S.$$

2η Περιγραφή εξέλιξης ΜΑΣΧ

Έστω ότι η ΜΑΣΧ βρίσκεται στην κατάσταση $i$. Θεωρούμε $\forall j \in S \setminus \{i\}$ ένα γεγονός $E_{ij}$ το οποίο αν συμβεί θα γίνει μετάβαση στην $j$. Έστω ότι ο χρόνος μέχρι να συμβεί το γεγονός $E_{ij}$ είναι $\tau_{ij} \sim Exp(q_{ij})$ με $q_{ij} \geq 0$ και το σύστημα θα μεταβεί στην κατάσταση $j$, αν το $E_{ij}$ συμβεί πρώτο. Οι χρόνοι $\tau_{ij}$ είναι ανεξάρτητοι.

Χρόνος παραμονής στην $i = \tau_i \sim Exp(q_i)$

$$= \min\{\tau_{ik}, k \in S \setminus \{i\}\}$$
$$\sim Exp\Big(\sum_{k \in S \setminus \{i\}} q_{ik}\Big)$$

Άρα, $q_i = \sum_{j \in S \setminus \{i\}} q_{ij}$

Επίσης αν βρίσκεται στην $i$, θα μεταβεί στην $j$ με πιθανότητα

$$\frac{q_{ij}}{\sum_{j \in S \setminus \{i\}} q_{ij}} = \frac{q_{ij}}{q_i} \Rightarrow P_{ij} = \frac{q_{ij}}{q_i}$$

Οπότε, μπορούμε να περιγράψουμε την εξέλιξη μιας ΜΑΣΧ χρησιμοποιώντας τις ποσότητες $q_{ij}$, $i,j \in S$, $i \neq j$ τις οποίες ονομάζουμε ρυθμούς μετάβασης.

Αν επίσης $q_{ii} = \sum_{k \neq i} q_{ij} = -q_i$, $\forall i \in S$, τότε ο πίνακας που θα φτιάξουμε $Q = [q_{ij}]_{i,j \in S}$ ονομάζεται πίνακας ρυθμών μετάβασης ή γεννήτορας.

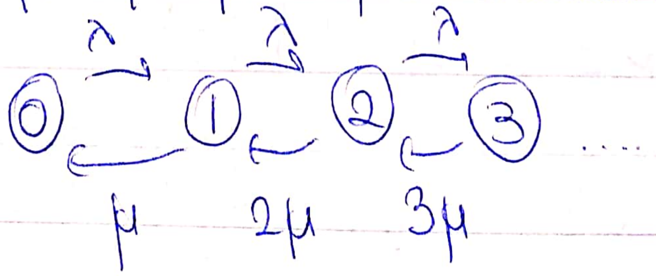
Παράδειγμα: (M/M/$\infty$ σύστημα εξυπηρ.)
υπηρέτες

PP($\lambda$) διαδικασία αφίξεων
Exp($\mu$) ~~εκθετικ~~ χρόνοι εξυπηρ.
$X(t)$ = # πελατών στο σύστημα
Νδο $\{X(t), t \geq 0\}$ ΜΑΣΧ
Να βρεθεί ο $Q$.

Λύση: Αν $X(t) = i$, $T_{i,i+1} \sim Exp(\lambda)$
$T_{i,i-1} \sim Exp(i\mu)$
...

$$Q = \begin{array}{c|cccc} & 0 & 1 & 2 & 3 \\ \hline 0 & -\lambda & \lambda & 0 & 0 \\ 1 & \mu & -(\mu+\lambda) & \lambda & 0 \\ 2 & 0 & 2\mu & -(2\mu+\lambda) & \lambda \\ 3 & 0 & 0 & 3\mu & -(3\mu+\lambda) \; \cdots \\ \vdots & & & & \end{array}$$

Διάγραμμα ρυθμών μετάβασης



## Βασικοί Ορισμοί

Έστω, $\{X(t), t\geq 0\}$ ΜΑΣΧ με χκ $S$

$p_{ij}(t) = P(X(t)=j \mid X(0)=i) \quad \forall i,j \in S,\ t\geq 0.$

$p_{ij}(t)$ πιθανοτητα μεταβασης $i \to j$ σε χρόνο $t$.

$P(t) = [p_{ij}(t)]_{i,j\in S}$

$P(t)$ πινακας πιθαν. μεταβασης σε χρονο $t$.

$p_i(0) = P(X(0)=i)$

$p(0) = [p_i(0)]_{i\in S}$

$p(0)$ = αρχικη κατανομη.

$p_i(t) = P(X(t)=i), \quad i\in S,\ i\geq 0$

$p(t) = [p_i(t)]_{i\in S}$

$p(t)$ μεταβατική κατανομή.

### Θεώρημα

Μια ΜΑΣΧ $\{X(t), t\geq 0\}$ χαρακτηριζεται πληρως απο την αρχικη κατανομη και τον πινακα $P(t),\ t\geq 0$.

$$P(X(0)=i_0, X(t_1)=i_1, X(t_2)=i_2, \dots X(t_n)=i_n)$$

Σχεση $p(t)$ με $p(0)$ κ' $\mathbb{P}(t)$

Έστω $j\in S$

$$p_j(t) = P(X(t)=j) = \sum_{i\in S} P(X(t)=j \mid X(0)=i) \cdot P(X(0)=i)$$

$$= \sum_{i \in S} P_{ij}(t) \cdot P_i(0)$$

γινομενο διανύσματος $p(0)$

× j-οστη στηλη του $\mathbb{P}(t)$

$$\Rightarrow p(t) = p(0) \cdot \mathbb{P}(t)$$

**Θεώρημα**: Εστω $\{X(t), t \geq 0\}$ ΜΑΣΧ με χκ $S$ και πινακα πιθανοτητων μετάβασης $\mathbb{P}(t), t \geq 0$ Ισχυουν τα παρακατω:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{(i)} & P_{ij}(t) \geq 0, \quad i,j \in S \quad t \geq 0 \\ \text{(ii)} & \sum_{j \in S} P_{ij}(t) = 1, \quad i \in S, t \geq 0 \end{array}\right\} \mathbb{P}(t) \text{ στοχαστικός}$$

(iii) $$P_{ij}(t+s) = \sum_{k \in S} P_{ik}(t) P_{kj}(s) = \sum_{k \in S} P_{ik}(s) P_{kj}(t)$$

$\forall i,j \in S$

$t, s \geq 0.$

$$\mathbb{P}(t+s) = \mathbb{P}(t)\mathbb{P}(s)$$

$$\mathbb{P}(t+s) = \mathbb{P}(s)\mathbb{P}(t)$$

**Θεώρημα**: (Αναδρομικες σχέσεις για $\mathbb{P}(t)$)

Έστω $\{X(t), t \geq 0\}$ ΜΑΣΧ με $\mathbb{P}(t)$ πινακα πιθ. μεταβασης σε χρόνο $t$, χώρο καταστάσε[ων] $S$ και πινακα ρυθμων μεταβασης $Q$. Τότε ο $\mathbb{P}(t)$ ειναι παραγωγισιμος ως προς $t$ και ισχύει οτι $\frac{d}{dt}\mathbb{P}(t) = \mathbb{P}'(t) = Q\,\mathbb{P}(t)$

και $$\frac{d}{dt}\mathbb{P}(t) = \mathbb{P}'(t) = \mathbb{P}(t) \cdot Q$$

με αρχική συνθηκη $\mathbb{P}(0) = I$

Αποδειξη: Αρχικά θδο $P_{ij}(h) = \delta_{ij} + q_{ij}h + o(h)$

$$= \begin{cases} 1 - q_i h + o(h) & , i=j \\ q_{ij}h + o(h) & , i \neq j \end{cases}$$

με $\lim_{h \to 0} \frac{o(h)}{h} = 0$

Θελω να υπολογισω την πιθανοτητα :
$P(N(h) = n \mid X_0 = i) \;, i \in S \;, n \geq 0$

Για $n=0$ εχουμε $P(N(h) = 0 \mid X_0 = i) =$
$= P(Y_1 > h \mid X_0 = i)$
$\underline{\underline{(Y_1 \mid X_0 = i) \sim Exp(q_i)}} \; e^{-q_i h}$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-q_i h)^k}{k!} = 1 - q_i h + o(h)$$

$= 1 + q_{ii}h + o(h)$