28/11/22 (16ο Μάθημα)

$$m_i^{(k)} = E\left[\sum_{n=0}^{\tau_k-1} 1\{X_n=i\} \mid X_0=k\right]$$

$\downarrow$ $\qquad \tau_k = \tau_k^{(1)} = \inf\{n\geq 1 : X_n=k\}$

μεσος # επισκ. στην i μεταξυ 2 διαδοχικων επισκεψεων στην k

Θεωρημα: Εστω $\{X_n, n\geq 0\}$ αδιαχωριστη και επαναληπτικη. Εστω $k\in S$ και $m^{(k)} = [m_i^{(k)}]_{i\in S}$

Τοτε: α) $m_k^{(k)} = 1$

β) το $m^{(k)}$ ειναι στασιμο μετρο

γ) $m_i^{(k)} > 0$ και $m_i^{(k)} < \infty$, $\forall i\in S$

Αποδειξη: α) $m_k^{(k)} = E\left[\sum_{n=0}^{\tau_k-1} 1\{X_n=k\} \mid X_0=k\right] = 1$

β) $\{X_n, n\geq 0\}$ επαναληπτικη $\Rightarrow h_k = 1$
$= P(\tau_k<\infty \mid X_0=k)$

Θελουμε να δειξουμε οτι

$$m^{(k)} = m^{(k)}P \Leftrightarrow m_i^{(k)} = \sum_{j\in S} m_j^{(k)}\cdot p_{ji}, \forall i\in S$$

$$m_i^{(k)} = E\left[\sum_{n=0}^{\tau_k-1} 1\{X_n=i\} \mid X_0=k\right]$$

$$= E\left[\sum_{n=1}^{\tau_k} 1\{X_n=i\} \mid X_0=k\right]$$

$$= E\left[\sum_{n=1}^{\infty} 1\{X_n = i, \tau_k \geq n\} \mid X_0 = k\right]$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} E\left[1\{X_n = i, \tau_k \geq n\} \mid X_0 = k\right]$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} P(X_n = i, \tau_k \geq n \mid X_0 = k]$$

$\theta.0.\pi$ X_{n-1}

$$= \sum_{j \in S} \sum_{n=1}^{\infty} P(X_n = i, X_{n-1} = j, \tau_k \geq n \mid X_0 = k)$$

$$= \sum_{j \in S} \sum_{n=1}^{\infty} P(X_n = i \mid X_{n-1} = j, \tau_k \geq n, X_n = k) \cdot$$

$$P(X_n = i \mid X_{n-1} = j) = p_{ji}$$

$$\cdot P(X_{n-1} = j, \tau_k \geq n \mid X_0 = k)$$

$$= \sum_{j \in S} p_{ji} \sum_{n=1}^{\infty} P(X_{n-1} = j, \tau_k \geq n \mid X_0 = k)$$

$$= \sum_{j \in S} p_{ji} \sum_{n=1}^{\infty} E\{1\{X_{n-1} = j, \tau_k \geq n\} \mid X_0 = k)$$

$$= \sum_{j \in S} p_{ji} E\left[\sum_{n=1}^{\infty} 1\{X_{n-1} = j, \tau_k \geq n \mid X_0 = k\right]$$

$n' = n-1$

$$= \sum_{j \in S} p_{ji} E\left[\sum_{n=0}^{\infty} 1\{X_n = j, \tau_k \geq n+1\} \mid X_0 = k\right)$$

$$= \sum_{j \in S} p_{ji} E\left[\sum_{n'=0}^{\tau_k - 1} 1\{X_{n'} = j\} \mid X_0 = k\right]$$

$$= \sum_{j \in S} p_{ji} m_j^{(k)}$$

γ) Θέλουμε να δείξουμε ότι $m_i^{(k)} > 0$ κ' $m_i^{(k)} < \infty$ $\forall i \in S$

$\{X_n, n \geq 0\}$ αδιαχώριστη. Άρα $\forall i \in S$, $i \leftrightarrow k$

Δηλαδή, $\exists n_1 > 0 : P_{ik}^{(n_1)} > 0$

και $\exists n_2 > 0 : P_{ki}^{(n_2)} > 0$

Επίσης, $m^{(k)}$ στάσιμο μέτρο $\Rightarrow m^{(k)} = m^{(k)} P = m^{(k)} P \cdot P$

$= m^{(k)} P \cdot P \cdot P = \ldots \Rightarrow$

Άρα $m^{(k)} = m^{(k)} P^{(n)} \Rightarrow m_i^{(k)} = \sum_{j \in S} m_j^{(k)} P_{ji}^{(n)}$

$\forall i \in S, \forall n \geq 0$

Έχουμε, $1 = m_k^{(k)} = \sum_{j \in S} m_j^{(k)} P_{jk}^{(n_1)} \geq m_i^{(k)} \underbrace{P_{ik}^{(n_1)}}_{>0}$

$$m_i^{(k)} P_{ik}^{(n_1)} \leq 1 \Rightarrow m_i^{(k)} \leq \frac{1}{P_{ik}^{(n_1)}} < \infty$$

Επίσης, $m_i^{(k)} = \sum_{j \in S} m_j P_{ji}^{(n_2)} \geq \underbrace{m_k^{(k)}}_{1} \underbrace{P_{ki}^{(n_2)}}_{>0} > 0$

Θεώρημα: $\{X_n, n \geq 0\}$ αδιαχώριστη ΜΑΔΧ με στάσιμο μέτρο $\lambda = [\lambda_i]_{i \in S}$ με $\lambda_k = 1$. Τότε $\lambda \geq m^{(k)}$. Αν όμως η $\{X_n, n \geq 0\}$ είναι και επαναληπτική, τότε $\lambda = m^{(k)}$.

• Δηλαδή αν η ΜΑΔΧ είναι αδιαχώριστη και επαναληπτική, τότε το μοναδικό στάσιμο μέτρο με $\lambda_k = 1$ είναι το $m^{(k)}$.

Απόδειξη: Έστω $\lambda = [\lambda_i]_{i\in S}$ στάσιμο μέτρο, δηλαδή

$$\lambda_j = \sum_{i\in S} \lambda_i p_{ij}$$

Θεωρώ ότι είναι αδιαχώριστη. Θέλω νδο

$$\lambda_j \geq m_j^{(k)} = E\Big[\sum_{n=0}^{\tau_k - 1} 1\{X_n = j\} \,\Big|\, X_0 = k\Big]$$

Έχουμε,

$$\lambda_j = \sum_{i\in S} \lambda_i p_{ij} = \underbrace{\lambda_k}_{1} p_{kj} + \sum_{i_1 \neq k} \lambda_{i_1} p_{i_1 j}$$

$$= p_{kj} + \sum_{i_1\neq k} \sum_{i_2 \in S} \lambda_{i_2} p_{i_2 i_1} p_{i_1 j}$$

$$= \underbrace{p_{kj}}_{P(X_1 = j, \tau_k \geq 1 \mid X_0 = k)} + \underbrace{\sum_{i_1 \neq k} \overset{1}{\lambda_k} p_{k i_1} p_{i_1 j}}_{P(X_2 = j, \tau_k = 2 \mid X_0 = k)} + \sum_{i_1\neq k} \sum_{i_2 \neq k} \lambda_{i_2} p_{i_2 i_1} p_{i_1 j}$$

Επαγωγικά,

$$\lambda_j \geq \sum_{n=1}^{\infty} P(X_n = j, \tau_k \geq n \mid X_0 = k)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} E[1\{X_n = j, \tau_k \geq n\} \mid X_0 = k]$$

$$= E\Big[\sum_{n=1}^{\infty} 1\{X_n = j, \tau_k \geq n\} \,\Big|\, X_0 = k\Big]$$

$$= E\Big[\sum_{n=1}^{\tau_k} 1\{X_n = j\} \,\Big|\, X_0 = k\Big]$$

$$= m_j^{(k)}$$

Αν $\{X_n, n \geq 1\}$ επαναληπτική, θδο

$$\lambda = m^{(k)}$$

Γνωρίζουμε ότι το $m^{(k)}$ είναι στάσιμο μέτρο και $m_k^{(k)} = 1$

Οπότε, $\lambda = \lambda P$ και $m^{(k)} = m^{(k)} P$

Τότε το $\lambda = m^{(k)}$ είναι στάσιμο μέτρο, δίοτι

$\lambda = m^{(k)} \cdot (\lambda - m^{(k)}) P$ και $\lambda \geq m^{(k)}$

Επίσης, $\lambda_k = m_k^{(k)} = 1 - 1 = 0$

$$\text{Άρα, } 0 = \lambda_k = m_k^{(k)} = \sum_{i \in S} (\underbrace{\lambda_i - m_i^{(k)}}_{\geq 0}) \underbrace{P_{ik}^{(n)}}_{\geq 0}$$

Όμως, $\forall j \in S$ $j \leftrightarrow k$ άρα $\exists n_1 : P_{jk}^{(n_1)} > 0$

$$\Rightarrow \lambda_j - m_j^{(k)} = 0 \Rightarrow \lambda_j = m_j^{(k)}$$

λ με $\lambda_k = 1$

$\lambda = m^{(k)}$

Θεώρημα: Αν η $\{X_n, n \geq 0\}$ αδιαχώριστη ΜΑΔΧ τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

i) Κάθε κατάσταση είναι θετικά επαναληπτική

ii) Μια κατάσταση είναι θετικά επαναληπτική

iii) $\exists$ στάσιμη κατανομή $\pi = [\pi_i]_{i \in S}$

Απόδειξη: $(i) \Rightarrow (ii)$ άμεσο

$(ii) \Rightarrow (iii)$ Εστω i θετικα επαναληπτική

i επαναληπτική $\Rightarrow$ αδιαχωριστη
καθε $j \in S$ ειναι επαναληπτική.

Αρα $\exists\, m^{(i)}$ με $m_i^{(k)} = 1$

$m^{(i)}$ στάσιμο μέτρο

$0 < m_j^{(i)} < \infty,\ j \in S$

$\sum_{j \in S} m_j^{(k)} = \quad E[\tau_i | X_0 = i] < \infty$
διοτι i θετικα επαναληπτική

Οποτε $\pi_j = \dfrac{m_j^{(i)}}{\sum_{j \in S} m_j^{(k)}} = \dfrac{m_k^{(i)}}{m_i}$ τότε το

$\pi = [\pi_k]_{k \in S}$

είναι στάσιμη κατανομή.

$(iii) \Rightarrow (i)$ Έστω οτι υπαρχει στάσιμη κατανομή
$\pi = [\pi_i]_{i \in S}$

Έστω $k \in S$, θδο k ειναι επαναληπτική
κατάσταση.

1^o Βημα: Θα φτιαξω στασιμο μετρο με $\lambda_k = 1$

Η π ειναι στασιμη κατανομή $\Rightarrow \sum_{j \in S} \pi_j = 1$ και $\pi_j \geq 0, j \in S$

Αρα $\exists i : \pi_i > 0$

Επίσης $\exists n : P_{ik}^{(n)} > 0$, διότι η ΜΑΔΧ ειναι αδιαχώριστη. Εχουμε $\pi = \pi P^{(n)}$

$$\Rightarrow \quad \pi_k = \sum_{j \in S} \pi_j P_{jk}^{(n)} \geq \underbrace{\pi_i}_{>0} \cdot \underbrace{P_{ik}^{(n)}}_{>0} > 0$$

Οπότε, αν $\lambda_i = \dfrac{\pi_i}{\pi_k}$, $i \in S$

έχουμε, $\lambda = [\lambda_i]_{i \in S}$ ικανοποιει τις εξισώσεις ισορροπιας και $\lambda_k = \dfrac{\pi_k}{\pi_k} = 1$

Βημα 2^o: Ψαχνω ενα φραγμα για το $m^{(k)}$

Γνωριζουμε οτι αν $\{X_n, n \geq 0\}$ αδιαχωριστη με στασιμο μετρο $\lambda = [\lambda_i]_{i \in S}$ με $\lambda_k = 1$, τοτε $\lambda \geq m^{(k)} \Rightarrow m_i^{(k)} \leq \lambda_i \ \forall i \in S$

$$\Rightarrow \sum_{i \in S} m_i^{(k)} \leq \sum_{i \in S} \lambda_i = \sum_{i \in S} \frac{\pi_i}{\pi_k} = \frac{\sum_{i \in S} \pi_i}{\pi_k} = \frac{1}{\pi_k} < \infty$$

$$\Rightarrow m_k = \sum_{i \in S} m_i^{(k)} < \infty$$

$\Rightarrow$ k θετικα επαναληπτική.

30/11/22 (17º Μάθημα)

Πόρισμα: $\{X_n, n \geq 0\}$ αδιαχώριστη κ' θετικά επαναληπτική, ανν έχει στάσιμη κατανομή $\pi = [\pi_i]_{i \in S}$. Τότε ισχύει $m_i = \frac{1}{\pi_i}$, $i \in S$

Απόδειξη: Έστω ότι υπάρχει στάσιμη κατανομή $\pi = [\pi_i]_{i \in S}$, $\forall k \in S$ διαιρώντας το π με π_k, παίρνουμε στάσιμο μέτρο $\lambda = [\lambda_i]_{i \in S}$ με $\lambda_i = \frac{\pi_i}{\pi_k}$, $i \in S$ και $\lambda_k = 1$.

Έχουμε $\lambda = m^{(k)}$

$m^{(k)} = [m_i^{(k)}]$ T_{k-1}

$m_i^{(k)} = E[\sum_{n=0} 1\{X_n = i\} | X_0$

$m_k = \sum_{i \in S} m_i^{(k)} = E[T_k | X_0$

$$\Rightarrow \sum_{i \in S} \lambda_i = \sum_{i \in S} m_i^{(k)}$$

$$\sum_{i \in S} \frac{\pi_i}{\pi_k} = m_k$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\pi_k} \underbrace{\sum_{i \in S} \pi_i}_{1} = m_k$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{1}{\pi_k} = m_k}$$

$$\pi_k = \frac{1}{m_k}$$

Θεώρημα: (Οριακή συμπεριφορά Αδιαχώριστης και Θετικά επαναλ)

Έστω, $\{X_n, n \geq 0\}$ αδιαχώριστη ΜΑΔΧ

Τότε $\{X_n, n \geq 0\}$ θετ. επαναλ αν και μόνο αν έχω στάσιμη κατανομή $\pi = [\pi_i]_{i \in S}$.

Επιπλέον, η στάσιμη είναι μοναδική, $0 < \pi_i \le \frac{1}{m_i}$ και αν υπάρχει στάσιμο μέτρο $\lambda = [\lambda_i]_{i \in S}$ με $\sum_{i \in S} \lambda_i < \infty$, τότε $\lambda = c\pi$.

Ακόμη ισχύουν: i) $\pi_i = \frac{1}{m_i}$

ii) $$\underbrace{\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=0}^{n-1} 1\{X_k = i\}}{n}}_{\text{μακροπρόθεσμο ποσοστό βημάτων που η αλυσίδα βρίσκεται στην } i.} = \frac{1}{m_i} = \pi_i \text{ με πιθ } 1.$$

$\sum_{k=0}^{n-1} 1\{X_k = i\}$ → # επισκέψεων στην i στα πρώτα n βήματα.

$\left(\lim_{n\to\infty} \frac{N(n)}{n}\right)$

iii) $$\underbrace{\lim_{n\to\infty} \frac{E\left[\sum_{k=0}^{n-1} 1\{X_k = i\}\right]}{n}}_{\text{μακροπρόθεσμο μέσο ποσοστό βημάτων που η αλυσίδα βρίσκεται στην } i.} = \frac{1}{m_i} = \pi_i$$

iv) $$\underbrace{\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=0}^{n-1} P(X_k = i)}{n}}_{\text{Cezaro-}\lim_{n\to\infty} P(X_n = i)} = \frac{1}{m_i} = \pi_i$$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n} P(X_k=i)$$

πιθ να επιλεξω ομοιομορφα ενα απο τα πρωτα n βηματα για να δω που βρισκεται η αλυσιδα.

v) Αν $\pi^{(0)}=\pi$, τοτε $\pi^{(n)}=\pi$, $\forall n\geq 0$

vi) Αν επιπλεον η αλυσιδα ειναι και απεριοδικη, $\lim_{n\to\infty} P(X_n=i)=\pi_i$

και $\lim_{n\to\infty} P_{ij}^{(n)}=\pi_j$

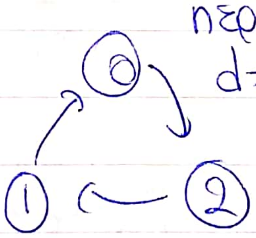
Ορισμός: (Περιοδικη/Απεριοδικη)

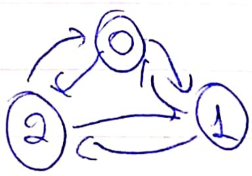
Η $j\in S$ ονομάζεται περιοδικη με περιοδο d αν ο $ΜΚΔ\{n: P_{jj}^{(n)}>0\}=d>1$

Η $j\in S$ λεγεται απεριοδικη αν $ΜΚΔ\{n: P_{jj}^{(n)}>0\}=1$.

Παραδειγματα:

περιοδικες με d=3





απεριοδικες d=1

Θεώρημα: Η περιοδικότητα (απεριοδικοτητα είναι ιδιοτητα της κλασης επικοινωνιας).

Ερμηνεια για εξισωσεις πληρους ισορροπιας

$$\pi_i = \sum_{j \in S} \pi_j P_{ji}$$

π_j = μακροπροθεσμο ποσοστο βηματων στην καταστασαση j.
= μακρ. ποσοστο μεταβασεων που ξεκινουν απο την j.
$= \dfrac{\#\text{μεταβασεων } j\to}{\#\text{μεταβασεων}}$

P_{ji} = : ποσοστο μεταβασεων τυπου $j \to i$ (ως προς τις μεταβασεις που ξεκινουν απο την j)
$= \dfrac{\#\text{μεταβ } j\to i}{\#\text{μεταβ } j\to}$

$$\pi_j P_{ji} = \frac{\#\text{μετ } j\to}{\#\text{μετ}} \cdot \frac{\#\text{μεταβ } j\to i}{\#\text{μεταβ } j\to} = \frac{\#\text{μεταβ } j\to i}{\#\text{μετ}}$$

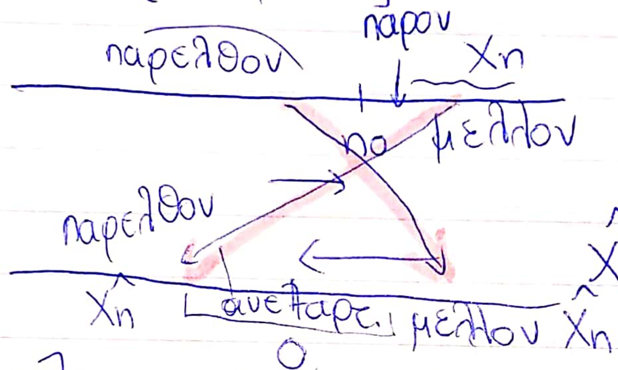
μακροπροθεσμο ποσοστο μεταβ. $j \to i$

Οποτε, $\underbrace{\pi_i}_{\text{μακροπροθ. ποσοστο μεταβ. τυπου } i\to} = \underbrace{\sum_{j \in S} \pi_j P_{ji}}_{\text{μακρ ποσοστο μεταβ τύπου } \to i}$

3.7 Αναστρεψιμοτητα ΜΑΔΧ

$\{X_n, n\in\mathbb{N}\}$ ΜΑΔΧ αδιαχωριστη κ' θετ. επαναληπτικη π ειναι η στασιμη κατανομη. Αν $\pi^{(0)}=\pi$ τοτε $\pi^{(n)}=\pi$. Μπορουμε να θεωρησουμε οτι το συστημα ξεκιναει απο $n=-\infty$, αρα $\{X_n, n\in\mathbb{Z}\}$

Ορισμος (Αντιστροφη μιας στοχαστικης ανελιξης)
Εστω $\{X_n, n\in\mathbb{N}\}$ μια στοχαστικη ανελιξη
Τοτε $\{\hat{X}_n, n\in\mathbb{Z}\}$ με $\hat{X}_n = X_{n_0-n}$, $n_0\in\mathbb{Z}, n\in\mathbb{Z}$



$\hat{X}_n = X_{n_0-n}$

ονομαζεται αντιστροφη της $\{X_n, n\in\mathbb{Z}\}$ ως προς τη χρονικη στιγμη n_0.
Αν $n_0=0$, τοτε η $\{\hat{X}_n, n\in\mathbb{Z}\}$ με $\hat{X}_n = X_{-n}$, $n\in\mathbb{Z}$ λεγεται τυπικη αντιστροφη της $\{X_n, n\in\mathbb{Z}\}$

Θεωρημα: Αν $\{X_n, n\in\mathbb{Z}\}$ ΜΑΔΧ αδιαχωριστη και θετ. επαναληπτικη με στασιμη κατανομη $\pi=[\pi_i]$, $i\in S$, τοτε η αντιστροφη της $\{X_n, n\in\mathbb{Z}\}$ ειναι αδιαχωριστη κ' θετικα επαναληπτικη ΜΑΔΧ (*)

νακά πιθ
ετ. P

π_i = μακροπ. ποσοστο βηματων που βρισκεται στην i η $\{X_n\}$
= μακρ. ποσοστο βηματων η $\{\hat{X}_n\}$
$\pi=[\pi_i]_{i\in S}$ στασιμη της $\{\hat{X}_n\}$

(*) με στασιμη κατανομη $\pi=[\pi_i]_{i\in S}$ και πινακα πιθ μεταβασης $\hat{P}=[\hat{P}_{ij}]$ με $\hat{P}_{ij} = \frac{\pi_j P_{ji}}{\pi_i}$ $\forall i,j\in S$.

Μακροπροθεσμο ποσοστο μεταβ $i \to j$ στην $\{X_n\}$ = μακρ. ποσοστο μεταβ. $j \to i$ στην $\{\hat{X}_n\}$

$$\pi_i p_{ij} = \pi_j \hat{p}_{ji}$$

$$\hat{P}_{ij} = \frac{\pi_i P_{ij}}{\pi_j}$$

Αποδειξη: $\{X_n, n \in \mathbb{Z}\}$ ΜΑΔΧ με P και αρχικη κατανομη π.
Θδο $\{\hat{X}_n, n \in \mathbb{Z}\}$ ΜΑΔΧ με $\hat{P}$ και αρχικη κατανομη $\pi^{(0)} = \pi$.
Ανδο $P(\hat{X}_0 = i_0, \hat{X}_1 = i_1, \hat{X}_2 = i_2, \dots \hat{X}_n = i_n)$

$$= \pi_{i_0} \cdot \hat{p}_{i_0 i_1} \hat{P}_{i_1 i_2} \dots \hat{P}_{i_{n-1}, i_n}$$

Εχουμε $P(\hat{X}_0 = i_0, \hat{X}_1 = i_1, \dots \hat{X}_n = i_n)$

$$= P(X_{n_0} = i_0, X_{n_0 - 1} = i_1, X_{n_0 - 2} = i_2, \dots X_{n_0 - n} = i_n)$$
$$= P(X_{n_0 - n} = i_n, \dots X_{n_0 - 2} = i_2, \dots, X_{n_0 - 1} = i_1, X_{n_0} = i_0)$$
$$= \pi_{i_n} P_{i_n, i_{n-1}} \dots p_{i_2 i_1} p_{i_1 i_0}$$

$$= \underbrace{\frac{\pi_{i_n} p_{i_n, i_{n-1}}}{\pi_{i_{n-1}}}}_{\hat{P}_{i_{n-1}, i_n}} \underbrace{\frac{\pi_{i_{n-1}} P_{i_{n-1}, i_{n-2}}}{\pi_{i_{n-2}}}}_{\hat{P}_{i_{n-2}, i_{n-1}}} \dots \underbrace{\frac{\pi_{i_2} \cdot P_{i_2 i_1}}{\pi_{i_1}}}_{\hat{P}_{i_1, i_2}} \underbrace{\frac{\pi_{i_1} P_{i_1 i_0}}{\pi_{i_0}}}_{\hat{P}_{i_0 i_1}} \pi_{i_0}$$

$$= \pi_{i_0} \hat{P}_{i_0 i_2} \hat{P}_{i_1 i_2} \cdot \hat{P}_{i_{n-2}, i_{n-1}} \hat{P}_{i_{n-1}, i_n}$$

Τώρα, θδο η $\pi = [\pi_i]_{i\in S}$ ειναι στασιμη της $\{\hat{X}_n, n\in\mathbb{Z}\}$

πρεπει $\pi_i = \sum_{j\in S} \pi_j \hat{P}_{ji}$, $i\in S$

$$\Leftrightarrow \pi_i = \sum_{j\in S} \pi_j \frac{\pi_i P_{ij}}{\pi_j}, \quad i\in S$$

$$\Leftrightarrow \pi_i = \pi_i \underbrace{\sum_{j\in S} P_{ij}}_{1}, \quad i\in S$$

$$\Leftrightarrow \pi_i = \pi_i$$

Ορισμός (Αντιστρέψιμη)

Μια στοχαστικη ανελιξη $\{X_n, n\in\mathbb{Z}\}$ ονομαζεται αντιστρεψιμη αν ειναι ισοδυναμη με την αντιστροφη της $\{\hat{X}_n, n\in\mathbb{Z}\}$.

Θεώρημα: Εστω $\{X_n, n\in\mathbb{Z}\}$ ΜΑΔΧ αδιαχωριστη θετικα επαναληπτικη με στασιμη κατανομη π και πινακα πιθ μετ. P, τοτε η $\{X_n, n\in\mathbb{Z}\}$ ειναι αντιστρεψιμη ανν $P=\hat{P}$.

$$\Leftrightarrow P_{ij} = \hat{P}_{ij} \quad i,j\in S \Leftrightarrow$$

$$P_{ij} = \frac{\pi_j P_{ij}}{\pi_i} \quad i,j\in S$$

$$\underbrace{\pi_i p_{ij}}_{\text{μακρ. ποσοστο μετ } i\to j} = \underbrace{\pi_j P_{ji}}_{\text{μακρ. ποσοστο μετ. } j\to i}, \quad i,j\in S$$