07/11/22 (12ο Μάθημα)

Παραδειγμα (Συνεχεια)

$$D(t) = E[\min(U,t)] - \frac{E[U]}{E[U]+E[D]} E[\min(U+D,t)]$$

$\pm E[U]$

$\Rightarrow$

$$D(t) = \underbrace{E[U] - \frac{E[U]}{E[U]+E[D]} E[\min(U+D,t)]}_{D_1(t)} - \underbrace{(E[U] - E[\min(U,t)])}_{D_2(t)}$$

$$\frac{E[U]}{E[U]+E[D]} \left(E[U+D] - E[\min(U+D,t)]\right)$$

Έχουμε, $0 \leq E[\min(U,t)] \leq E[U]$

$$E[U] \geq \underbrace{E[U] - E[\min(U,t)]}_{D_2(t)} \geq 0$$

και $D_2(t) \downarrow$

Ομοίως, $0 \leq E[\min(U+D,t)] \leq E[U+D]$

Άρα, $0 \leq E[U+D] - E[\min(U+D,t)] \leq E[U+D]$

$\cdot \frac{E[U]}{E[U]+E[D]}$ $\Rightarrow$

$$0 \leq D_1(t) \leq E[U]$$

και $D_2(t) \downarrow$

$$D_2(t) = E[U] - E[\min(U,t)]$$

$$= \int_0^\infty u\, dG_u(u) - \int_0^\infty \min(u,t)\, dG_u(u)$$

$$= \int_0^\infty u\, dG_u(u) - \int_0^t u\, dG_u(u) - \int_t^\infty t\, dG_u(u)$$

$$= \int_t^\infty u\, dG_u(u) - \int_t^\infty t\, dG_u(u)$$

$$= \int_t^\infty (u-t)\, dG_u(u) = -\int_t^\infty (u-t)(1-G_u(u))'\, du$$

$$= [(u-t)(1-G_u(u))]\Big|_t^\infty + \int_t^\infty (1-G_u(u))\, du$$

Αντίστοιχα, $E[U+D] - E[\min(U+D,t)]$

$$= \int_t^\infty (1-G(u))\, du$$

$$\int_0^\infty D_2(t)\, dt = \int_0^\infty \int_t^\infty (1-G_u(u))\, du\, dt$$

$$\underset{0<t<u<\infty}{=\!=} \int_0^\infty \int_0^u (1-G_u(u))\, dt\, du$$

$$= \int_0^\infty (1-G_u(u))\, u\, du = \frac{E[U^2]}{2} < \infty$$

$$\int_0^\infty D_1(t)\, dt = \int_0^\infty \frac{E[U]}{E[U+D]} \int_t^\infty (1-G(u))\, du\, dt$$

$$\frac{E[U]}{E[U+D]}\int_0^{\infty}\int_t^{\infty}(1-G(u))\,du\,dt =$$

$$= \frac{E[U]}{E[U+D]}\,\frac{E[(U+D)^2]}{2} < \infty$$

Άρα, $\int_0^{\infty}|D(t)|dt \leq \int_0^{\infty}D_1(t)dt + \int_0^{\infty}D_2(t)dt$

$< \infty$

Εφαρμόζοντας ΒΑΘ

$$\lim_{t\to\infty}H(t) = \frac{1}{E[U+D]}\cdot\int_0^{\infty}D(t)dt = \frac{1}{E[U+D]}\left(\int_0^{\infty}D_1(t)dt - \int_0^{\infty}D_2(t)dt\right)$$

$$= \frac{1}{E[U+D]}\left\{\frac{E[U]}{E[U+D]}\,\frac{E[(U+D)^2]}{2} - \frac{E[U^2]}{2}\right\}$$

$$= \frac{E[U]E(U+D)^2] - E[U^2]E[U+D]}{2E^2[U+D]}$$

Μαρκοβιανές αλυσίδες διακριτού χρόνου

Μαρκοβιανή Ιδιότητα: Αν η παρούσα κατάσταση ενός συστήματος είναι γνωστή, το μέλλον δεν εξαρτάται από το παρελθόν.

Ορισμός: (Μαρκοβιανή αλυσίδα διακριτού χρόνου)
Μια στοχαστική διαδικασία $\{X_n, n\geq 0\}$ με Ε

χώρο καταστάσεων S αριθμήσιμο λέγεται Μαρκοβιανή αλυσίδα διακριτού χρόνου (ΜΑΔΧ) αν ισχύει

$$P(X_{n+1}=j \mid X_n=i, X_0=i_0, X_1=i_1, \dots, X_{n-1}=i_{n-1})$$

$$= P(X_{n+1}=j \mid X_n=i) \quad \forall n \geq 0, \; i,j=i_0,i_1,i_{n-1} \in S$$

Ορισμός: (Ομογενής ΜΑΔΧ)

Μια ΜΑΔΧ $\{X_n, n\geq 0\}$ με χκ S ονομάζεται ομογενής αν $P(X_{n+1}=j \mid X_n=i)$ είναι ανεξάρτητη του n. Τότε $p_{ij} = P(X_{n+1}=j \mid X_n=i$ $\forall i,j \in S$
$\forall i,j \in S$

Ορισμός: (Πίνακας πιθανοτήτων μετάβασης $1^{ης}$ τάξης)
Έστω $\{X_n, n\geq 0\}$ ΜΑΔΧ με χκ S. Τότε ο πίνακας $P=[p_{ij}]$ ονομάζεται πίνακας πιθανοτήτων μετάβασης $1^{ης}$ τάξης.

Ισχύουν: i) $p_{ij} = P(X_{n+1}=j \mid X_n=i) \geq 0 \quad \forall i,j \in S$

(ii) $\sum_{j\in S} p_{ij} = \sum_{j \in S} P(X_{n+1}=j \mid X_n=i)$

$= P(X_{n+1}\in S \mid X_n=i) = 1 \quad \forall i \in S$

Δηλαδή, ο P είναι στοχαστικός πίνακας

Ορισμός: (Αρχική κατανομή ΜΑΔΧ)
Έστω $\{X_n, n\geq 0\}$ ΜΑΔΧ με χκ S. Τότε

$$\pi^{(0)}(i) = P(X_0=i), \quad i\in S$$

Το διανυσμα $\pi^{(0)} = [\pi^{(0)}(i)]$ ονομάζεται αρχική κατανομή της ΜΑΔΧ,

Θεώρημα: Έστω $\{X_n, n \geq 0\}$ ΜΑΔΧ με X^k S αρχική κατανομή $\pi^{(0)}$ και πινακα πιθ μεταβασης P. Η $\{X_n, n \geq 0\}$ χαρακτηρίζεται απο τα $[\pi^{(0)}]$ και P.

Αποδειξη:

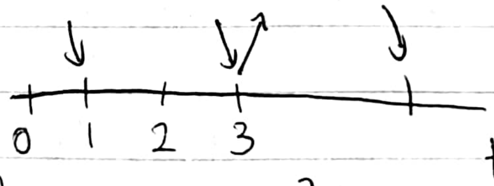
$$P(X_0=i_0, X_1=i_1, X_2=i_2, \ldots X_{n-1}=i_{n-1}, X_n=i_n)$$

πολ/κο νομο $= P(X_0=i_0)P(X_1=i_1 | X_0=i_0) \cdot P(X_2=i_2 | X_0=i_0, X_1=i_1) \cdots P(X_n=i_n | X_0=i_0, X_1=i_1, \ldots X_n=i_{n-1})$

Μαρκ. Ιδιοτητα $= P(X_0=i_0)P(X_1=i_1 | X_0=i_0) \cdot P(X_2=i_2 | X_1=i_1) \cdot P(X_n=i_n | X_{n-1}=i_{n-1}) \cdots$

$$= \pi^{(0)}(i_0) P_{i_0 i_1} \cdot P_{i_1 i_2} \ldots P_{i_{n-1} i_n}$$

Παράδειγμα 1: (Σύστημα εξυπηρέτησης διακριτού χρόνου)



Geo/Geo/1

Χωρίζουμε τον άξονα του χρονου σε διαστηματα
Συστημα εξυπηρετησης με ενα υπηρετη
Σε ενα διαστημα ερχεται ενας πελατης με πιθ p ή κανενας με πιθ 1 − p.
Θεωρουμε οτι οι αφιξεις γινονται ακριβως πριν το τελος του διαστηματος.
Αν στην αρχη ενος διαστηματος υπαρχει πελατης μεσα στο συστημα αυτος ολοκληρωνει την εξυπηρετηση μεσα σε αυτο το συστημα με πιθ q.

Η αναχωρηση γινεται πριν το τελος του διαστήματος.

$X_n = \#$ πελατων στο συστημα τη στιγμη n, $n \geq 0$

$\{X_n, n \geq 0\}$ ΜΑΔΧ ?

$$P_{01} = P(X_{n+1}=1 \mid X_n=0) = p$$
$$P_{00} = P(X_{n+1}=0 \mid X_n=0) = 1-p$$
$$P_{0j} = 0 \quad \forall j \geq 2$$

Για $i \geq 1$

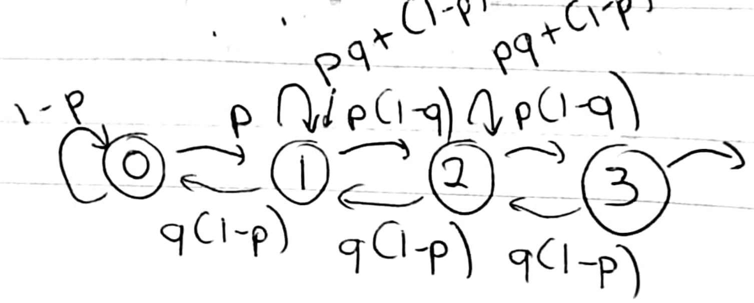
$$P_{i,i-1} = P(X_{n+1}=i-1, X_n=i) = q(1-p)$$

εξυπηρ. να μην ερθει πελατης

$$P_{i,i} = P(X_{n+1}=i \mid X_n=i) = qp + (1-q)(1-p)$$
$$P_{i,i+1} = P(X_{n+1}=i+1 \mid X_n=i) = p(1-q)$$

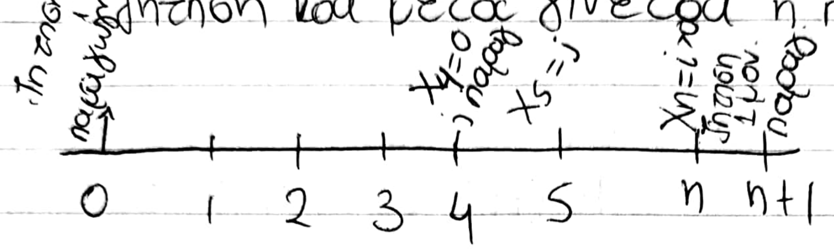
$$P_{i,j} = 0 \ \forall j \notin \{i-1, i, i+1\}$$

$$P = \begin{array}{c|cccc} & 0 & 1 & 2 & 3 \ \cdots \\ \hline 0 & 1-p & p & 0 & 0 \\ 1 & q(1-p) & pq+(1-p)(1-q) & p(1-q) & 0 \\ 2 & 0 & q(1-p) & pq+(1-p)(1-q) & p(1-q) \\ 3 & 0 & 0 & q(1-p) & pq+(1-p)(1-q) \\ \vdots & & & & \end{array}$$



Παράδειγμα: Συστημα παραγωγης-αποθηκευσης με μαζικη παραγωγη.

Συστημα παραγωγης-αποθηκευσης διακριτου-χρονου
Στην αρχη καθε περιοδου ικανοποιειται η ζητηση και μετα γινεται η παραγωγη. Η ποσότητα που απομενει αποθηκευεται ως αποθεμα μεχρι την επομενη περιοδο



X_n = ποσοτητα προιοντος στην αποθηκη τη στιγμη n
Η ζητηση σε καθε περιοδο ειναι 1 μοναδα και αν δεν υπαρχει αποθεμα χανεται. Η ποσοτητα που παραγεται τη στιγμη n ειναι τμ Y_n. Η $\{Y_n, n\geq 0\}$ ειναι ακολουθια ανεξ κ' ισονομων τμ με $P(Y_n=k)=a_k$, $k=0,1,2..$

$\{X_n, n\geq 0\}$ ΜΑΔΧ?

$$P_{0j}=P(X_{n+1}=j\mid X_n=0)=P(Y_n=j)=a_j$$

Για $i>0$

$$P_{ij}=P(X_{n+1}=j\mid X_n=i)=P(Y_n=j-i+1)=a_{j-i+1}$$

$j\geq i-1$

$$P_{ij}=0 \quad , j\leq i-2$$

Scanned with CamScanner