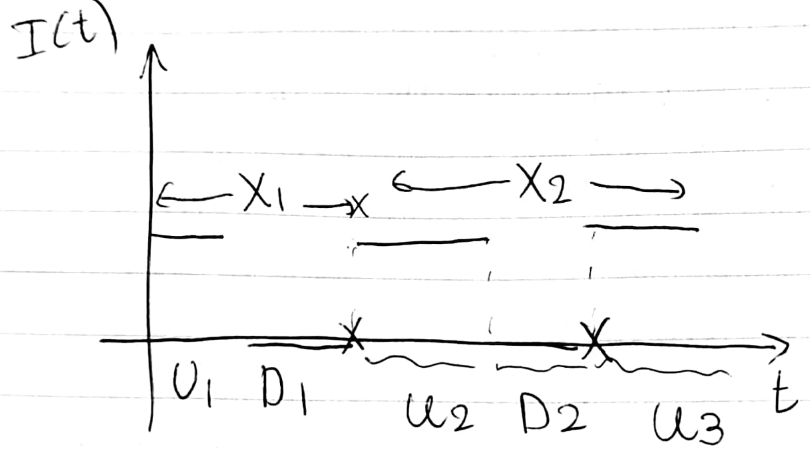
02/11/22 (11ο Μάθημα)

Άσκηση (εναλλασσόμενη ανανεωτική διαδικασία)

Θεωρούμε μηχανή που λειτουργεί, χαλάει, λειτουργεί

$$I(t)=\begin{cases}1, & \text{όταν λειτουργεί}\\ 0, & \text{χαλασμένη}\end{cases}$$



$\{(U_k, D_k)\}_{k\geq 0}$ ακολουθία ανεξ κ' ισον.

$$X_k = U_k + D_k$$

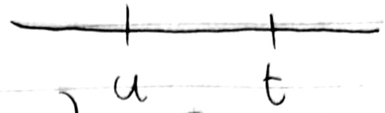
Υπάρχει ανανεωτική διαδικασία $\{N(t), t\geq 0\}$ με ακολουθία ενδ χρόνων $\{X_k, k\geq 1\}$ με σκ G και $E[X_k]=E[U_k]+E[D_k]<\infty$

Θεωρούμε ότι η G είναι απεριοδική

Ν.δ.ο. $$\lim_{t\to\infty} P(I(t)=1) = \frac{E[U_1]}{E[U_1]+E[D_1]}$$

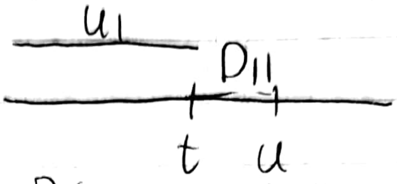
Λύση: $H(t)=P(I(t)=1)=\int_0^\infty P(I(t)=1\mid X_1=u)\,dG(u)$

Αν $u\le t$



$P(I(t)=1\mid X_1=u) = P(I(t-u)=1)=H(t-u)$

Αν $u>t$



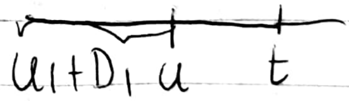
$P(I(t)=1\mid X_1=u)=P(U_1>t\mid X_1=u)$

Άρα $H(t)=\int_0^t H(t-u)\,dG(u)+\underbrace{\int_t^\infty P(U_1>t\mid X_1=u)\,dG(u)}_{D(t)}$

$$D(t)=\int_t^\infty P(U_1>t\mid X_1=u)\,dG(u)$$

$$P(U_1>t)\overset{\text{δεσμ. ως προς } X_1}{=}\int_0^\infty P(U_1>t\mid X_1=u)\,dG(u)$$

Όμως, $\int_0^t \underbrace{P(U_1>t\mid X_1=u)}_{0}\,dG(u)$



Άρα $D(t)=\int_0^\infty P(U_1>t\mid X_1=u)\,dG(u)=P(U_1>t)$

Η $D(t)$ γράφεται σαν διαφορά μη-αρνητικών φθινουσών κ' φραγμένων $(D(t)-0)$ συναρτήσεων.

$$\int_0^{\infty} |D(t)|dt = \int_0^{\infty} D(t)\,dt = \int_0^{\infty} P(U_1 > t)\,dt =$$

$$= E[U_1] < \infty$$

Εφαρμόζουμε ΒΑΘ

$$\lim_{t\to\infty} H(t) = \lim_{t\to\infty} P(I(t)=1) = \frac{1}{E[U_1]+E[D_1]} \cdot \int_0^{\infty} D(t)\,dt$$

$$= \frac{1}{E[U_1]+E[D_1]} E[U_1] = \frac{E[U_1]}{E[U_1]+E[D_1]}$$

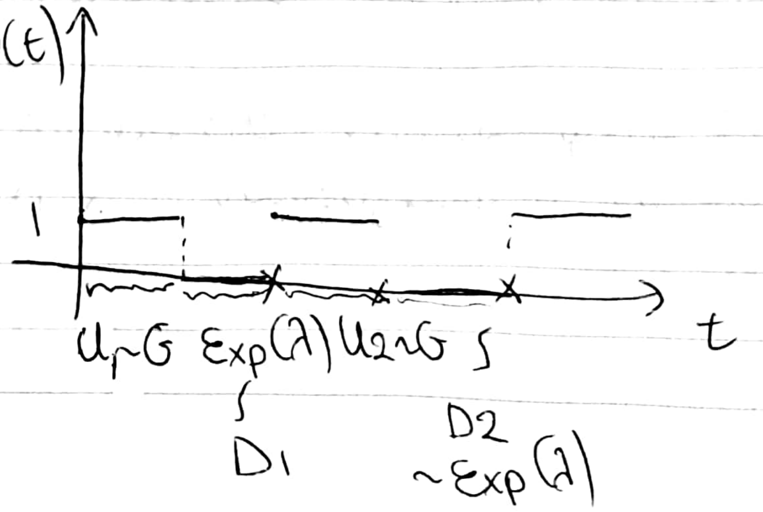
Παράδειγμα $(M|G|1|1)$ ουρά

- 1 υπηρέτης
- χωρητικότητα 1
- FCFS
- Διαδικασία αφίξεων $PP(\lambda)$
- Χρόνοι εξυπηρέτησης $\sim G$ με μ.τ $\frac{1}{\mu}$

$Q(t) = \#$πελατών στο σύστημα τη στιγμή t

$$\lim_{t\to\infty} P(Q(t)=1) = ?$$

Λύση: $Q(t)$



$U_1, U_2, U_3, \ldots$ ανεξ κ' ισον $\sim G$
$D_1, D_2, D_3, \ldots$ ανεξ κ' ισον $\sim Exp(\lambda)$

Έχουμε εναλλασσόμενη ανανεωτική διαδικασία. Από προηγούμενο παράδειγμα,

$$\lim_{t\to\infty} P(Q(t)=1) = \frac{E[U_1]}{E[U_1]+E[D_1]} = \frac{1/\mu}{1/\mu + \frac{1}{\lambda}}$$

$\rho=\lambda/\mu$

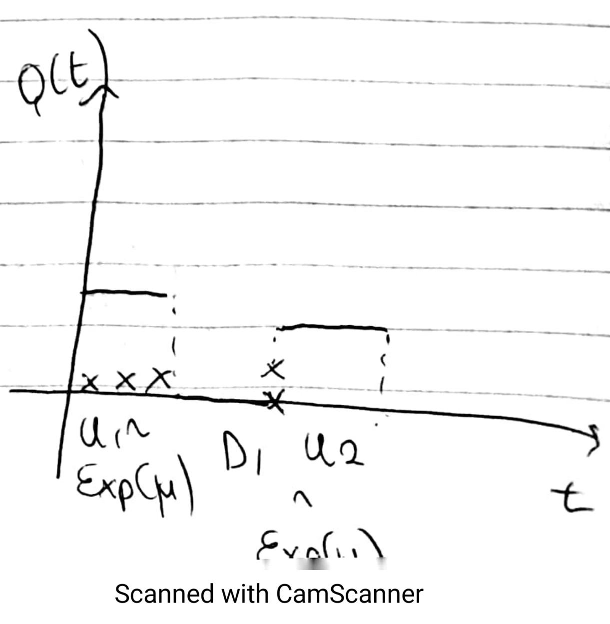
$$= \frac{\rho}{1+\rho}$$

Παράδειγμα: (G/M/1/1 ουρά)

- 1 υπηρέτης
- χωρητικ. 1
- FCFS
- Διαδικασία αφίξεων RP $\{N(t), t\geq 0\}$ με ενδ χρόνους, με σκ G και $\frac{1}{\lambda}$
- Χρόνοι εξυπηρ $\sim Exp(\mu)$ με μτ $\frac{1}{\mu}$

$Q(t)$ = #πελατών στο σύστημα τη στιγμή t

$$\lim_{t\to\infty} P(Q(t)=1) = ?$$



Τα $\{(U_k, D_k), k\geq 1\}$ ακολ. ανεξ κ' ισον

Εχουμε ενα λλαισσορευη αναvεωτικη διαδικασια·
Απο προηγ. παραδειγμα

$$\lim_{t\to\infty} P(Q(t)=1) = \frac{E[U_1]}{E[U_1]+E[D_1]} = ?$$

$U_1+D_1 : S_{N(U_1)+1}$
οπου $\{S_n, n\geq 1\}$ οι χρονοι διαδοχικων αφιξέων

$$E[S_{N(t)+1}] = \frac{1}{\lambda}[1+\underbrace{M(t)}_{=E[N(t)]}]$$

$$E[U_1+D_1] = E[S_{N(U_1)+1}] =$$

$$= \int_0^\infty E[S_{N(U_1)+1} \mid U_1 = t]\, dG_{U_1}(t)$$

$$= \int_0^\infty E[S_{N(t)+1}]\, \mu e^{-\mu t} dt$$

$$= \int_0^\infty \frac{1}{\lambda}[1+M(t)]\, \mu e^{-\mu t} dt$$

$$= \frac{1}{\lambda}\underbrace{\int_0^\infty \mu e^{-\mu t} dt}_{1} + \frac{1}{\lambda}\int_0^\infty M(t)\mu e^{-\mu t} dt$$

$$= \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda} \int_0^\infty \left(e^{-\mu t}\right)' M(t)\,dt$$

$$= \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda}\left\{\left[\cancel{e^{-\mu t} M(t)}\right]_0^\infty - \int_0^\infty e^{-\mu t} M'(t)\,dt\right\}$$

$$= \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda} \underbrace{\int_0^\infty e^{-\mu t}\,dM(t)}_{\tilde{M}(\mu)} = \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda} \frac{\tilde{G}(\mu)}{1-\tilde{G}(\mu)} =$$

$$= \frac{1}{\lambda(1-\tilde{G}(\mu))}$$

Άρα, $\lim_{t \to \infty} P(Q_1(t) = 1) = \frac{E[U_1]}{E[U_1 + D_1]} = \frac{\frac{1}{\mu}}{\frac{1}{\lambda(1-\tilde{G}(\mu))}}$

$$= \frac{\lambda}{\mu}(1-\tilde{G}(\mu))$$

Παράδειγμα: Θεωρούμε εναλλασσόμενη ανανεωτική διαδικασία, όπως στο 1^{o} παράδειγμα

Έστω, $W(t)$ = χρόνος που έχει περάσει στην κατάσταση 1 μέχρι τη στιγμή t.

$$H(t) = E[W(t)] - \frac{E[U]}{E[U] \cdot E[D]}\, t$$

Νδο η $H(t)$ ικανοποιεί την :

$$H(t) = E[\min(U,t)] - \frac{E[U]}{E[U]E[D]} E[\min(U+D,t)]$$

$$+ \int_0^t H(t-u)\, dG(u)$$

και να υπολογιστεί το $\lim_{t \to \infty} H(t)$

Λύση: $H(t) = E\left[W(t) - \frac{E[U]}{E[U]+E[D]} \cdot t\right]$

$$= \int_0^\infty E\left[W(t) - \frac{E[U]}{E[D]+E[U]} t \,\Big|\, X_1 = u\right] dG(u)$$

S $\qquad U_1 + D_1$

$U_1 + W(t-u)$

Αν $u \le t$

$u \qquad t$

$$E\left[W(t) - \frac{E[U]}{E[U]+E[D]} t \,\Big|\, X_1 = u\right]$$

$$= E[U_1 \mid X_1 = u] + E[W(t-u)] - \frac{E[U]}{E[U]+E[D]} t$$

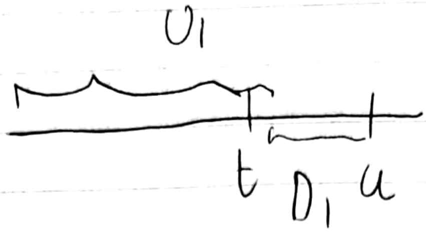
$$\left[H(t-u) = E[W(t-u)] - \frac{E[U]}{E[D]+E[U]}(t-u) \right]$$

$$= E[U_1 \mid X_1 = u] + \underbrace{E[W(t-u)] - \frac{E[U]}{E[U]+E[D]}(t-u)}_{H(t-u)}$$

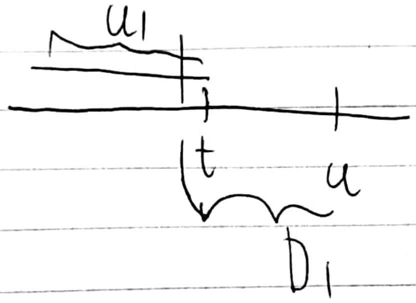
$$- \frac{E[U]}{E[U]+E[D]} u$$

$$= H(t-u) + E[U_1 \mid X_1 = u] - \frac{E[U]}{E[U]+E[D]}\, u$$

Αν $u > t$



$$E\left[W(t) - \frac{E[U]}{E[U]+E[D]}\, t \;\middle|\; X_1 = u\right] =$$



$$= E[\min\{U_1, t\} \mid X_1 = u] - \frac{E[U]}{E[U]+E[D]}\, t$$

Άρα, $$H(t) = \int_0^t H(t-u)\, dG(u) + \int_0^t \underbrace{E[U_1 \mid \overset{U_1+D_1}{\tilde{X}_1} = u]}_{\min\{U_1, D_1\}}\, dG(u)$$

$$- \int_0^t \frac{E[U]}{E[U]+E[D]}\, u\, dG(u)$$

$$+ \int_t^{\infty} E[\min\{U_1, t\} \mid X_1 = u]\, dG(u) - \int_t^{\infty} \frac{E[U]}{E[U]+E[D]}\, t\, dG(u)$$

$$= \int_0^t H(t-u)\, dG(u) - \int_0^{\infty} \frac{E[u]}{E[U]+E[D]} \min\{u, t\}\, dG(u)$$

$$+\int_0^\infty E[\min\{U_1,t\} \mid X_1=u]\, dG(u))$$

$$\Rightarrow H(t) = \int_0^t H(t-u)\, dG(u) \underbrace{- \frac{E[U]}{E[U]+E[D]} E[\min\{\overbrace{U_r+D}^{X_1}, t\}]}$$

$$+ \underbrace{E[\min\{U_1,t\}]}_{D(t)}]$$