Στοχαστικές Ανελίξεις
Ασκήσεις στις Μαρκοβιανές Αλυσίδες Συνεχούς Χρόνου

Άσκηση 1. Θεωρούμε ένα σύστημα εξυπηρέτησης με έναν υπηρέτη. Οι πελάτες φθάνουν με διαδικασία Poisson με ρυθμό λ και ο χρόνος εξυπηρέτησης κάθε πελάτη ακολουθεί Εκθετική κατανομή με παράμετρο μ. Οι χρόνοι εξυπηρέτησης των πελατών είναι ανεξάρτητοι μεταξύ τους και ανεξάρτητοι από τη διαδικασία αφίξεων. Κάθε πελάτης έχει έναν χρόνο υπομονής τέτοιον ώστε αν ο χρόνος παραμονής στο χώρο αναμονής ξεπεράσει το χρόνο υπομονής, αυτός φεύγει από το σύστημα χωρίς να εξυπηρετηθεί. Υποθέτουμε ότι οι χρόνοι υπομονής των διαδοχικών πελατών είναι ανεξάρτητες και εκθετικά κατανεμημένες τ.μ. με παράμετρο θ. Έστω $X(t)$ ο αριθμός των πελατών στο σύστημα τη στιγμή t. Να βρεθεί ικανή και αναγκάια συνθήκη ώστε η $\{X(t), t \geq 0\}$ να είναι θετικά επαναληπτική και βρεθεί η στάσιμη κατανομή της.

Άσκηση 2. Θεωρούμε ένα σύστημα εξυπηρέτησης με έναν υπηρέτη. Οι πελάτες φθάνουν με διαδικασία Poisson με ρυθμό λ και ο χρόνος εξυπηρέτησης κάθε πελάτη ακολουθεί Εκθετική κατανομή με παράμετρο μ. Οι χρόνοι εξυπηρέτησης των πελατών είναι ανεξάρτητοι μεταξύ τους και ανεξάρτητοι από τη διαδικασία αφίξεων. Θεωρούμε την ακόλουθη πολιτική λειτουργίας: Από τη στιγμή που το σύστημα αδειάσει, ο υπηρέτης θα παραμείνει ανενεργός όσο υπάρχουν κάτω από N πελάτες στο σύστημα. Μόλις μπει ο N-οστος πελάτης θα αρχίσει πάλι να εξυπηρετεί και συνεχίζει μέχρι να αδειάσει το σύστημα. Να μοντελοποιηθεί το σύστημα σαν Μ.Α.Σ.Χ, να βρεθεί ικανή και αναγκαία συνθήκη για να είναι θετικά επαναληπτική και να βρεθεί η στάσιμη κατανομή της.

Άσκηση 3. Θεωρούμε σύστημα αποθεμάτων (αποθήκη) σε συνεχή χρόνο που λειτουργεί ως εξής: Η ζήτηση (μίας μονάδας προϊόντος) φθάνει με διαδικασία Poisson με παράμετρο λ και εξυπηρετείται άμεσα αν υπάρχει απόθεμα στην αποθήκη. Αν δεν υπάρχει απόθεμα η ζήτηση χάνεται. Μόλις το απόθεμα πέσει στις R μονάδες (R θετική ακέραια σταθερά), η αποθήκη παραγγέλνει K (K θετική ακέραια σταθερά, $K > R$) μονάδες προϊόντος από τον προμηθευτή. Η παραγγελία φθάνει μετά από Εκθετικό χρόνο με παράμετρο θ. Έστω $X(t)$ ο αριθμός προϊόντων στην αποθήκη τη στιγμή t, υποθέτοντας ότι $R < X(0) \leq K + R$. Να δείξετε ότι $\{X(t), t \geq 0\}$ είναι Μ.Α.Σ.Χ. και να δωθεί ο χώρος καταστάσεων και ο πίνακας ρυθμών μετάβασης.

Άσκηση 4. Θεωρούμε ένα σύστημα εξυπηρέτησης με έναν υπηρέτη. Οι πελάτες φθάνουν με διαδικασία Poisson με ρυθμό λ. Υπάρχουν 2 τύποι πελατών. Ένας πελάτης είναι τύπου 1 με πιθανότητα a και τύπου 2 με πιθανότητα $1 - a$. Ο χρόνος εξυπηρέτησης πελάτη τύπου i ακολουθεί Εκθετική κατανομή με παράμετρο μ_i, $i = 1, 2$, με $\mu_1 \neq \mu_2$. Οι χρόνοι εξυπηρέτησης των πελατών είναι ανεξάρτητοι μεταξύ τους και ανεξάρτητοι από τη διαδικασία αφίξεων. Έστω $X(t)$ ο αριθμός των πελατών στο σύστημα τη στιγμή t και $Y(t)$ ο τύπος του πελάτη που εξυπηρετείται. Να δείξετε ότι η $\{(X(t), Y(t)), t \geq 0\}$ είναι Μ.Α.Σ.Χ. και να δωθεί ο χώρος καταστάσεων και ο πίνακας ρυθμών μετάβασης.

Άσκηση 5. Εργασίες φθάνουν σε έναν κεντρικό υπολογιστή σύμφωνα με διαδικασία αφίξεων Poisson με ρυθμό λ. Ο υπολογιστής διεκπεραιώνει τις εργασίες μία-μία και οι χρόνοι διεκπεραίωσης κάθε εργασίας ακολουθούν Εκθετική κατανομή με παράμετρο μ. Ο υπολογιστής μπορεί να χαλάσει. Ο χρόνος λειτουργίας είναι Εκθετικός με παράμετρο a και ο χρόνος επισκευής Εκθετικός με παράμετρο b. Οι διαδοχικοί χρόνοι λειτουργίας και επισκευής είναι ανεξάρτητες τ.μ. Μόλις ο υπολογιστής χαλάσει, όλες οι εργασίες χάνονται. Ακόμη, οι εργασίες που φθάνουν ενώ ο υπολογιστής είναι χαλασμένος χάνονται. Να μοντελοποιήσετε το σύστημα σαν Μ.Α.Σ.Χ. και να βρείτε τον χώρο καταστάσων και τον πίνακα ρυθμών μετάβασης.