Φυλλάδιο 4 -

Άσκηση 1

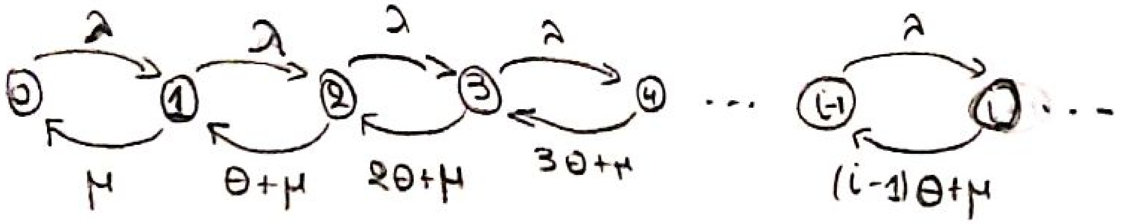
- Σύστημα εξυπηρέτησης με 1 υπηρέτη
- Διαδικασία αφίξεων $PP(\lambda)$
- Χρόνοι εξυπηρέτησης $\sim Exp(\mu)$
- Χρόνος υπομονής $\sim Exp(\theta)$

$X(t)$: # πελατών τη στιγμή t

Να βρεθεί ικανή & αναγκαία συνθήκη για να είναι η $\{X(t), t\geq 0\}$ θετικά επαναληπτική και να βρεθεί η στάσιμη κατανομή της.

Λύση

Η $\{X(t), t\geq 0\}$ είναι ΜΑΣΧ με χ.κ. $S=\{0,1,2,3,\dots\}$ και διάγραμμα ρυθμών μετάβασης



$\forall\ i=0,1,\dots$ γράφουμε τις εξισώσεις γενικευμένης ισορροπίας με $A_i=\{0,1,2,\dots,i\}$

$$\lambda p_0 = \mu p_1$$
$$\lambda p_1 = (\theta+\mu) p_2$$
$$\lambda p_2 = (2\theta+\mu) p_3$$
$$\vdots$$
$$\lambda p_{i-1} = [(i-1)\theta+\mu] p_i$$

Οπότε $$p_i = \frac{\lambda}{(i-1)\theta+\mu} p_{i-1} = \frac{\lambda^2}{((i-1)\theta+\mu)((i-2)\theta+\mu)} p_{i-2} = \dots$$

$$p_i = \frac{\lambda^i}{((i-1)\theta+\mu)((i-2)\theta+\mu)\cdots(\theta+\mu)\mu} p_0$$

Εξίσωση κανονικοποίησης

$$\sum_{i=0}^{\infty} p_i = 1 \Rightarrow p_0 \underbrace{\sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda^i}{((i-1)\theta+\mu)((i-2)\theta+\mu)\cdots(\theta+\mu)\mu}}_{k} = 1$$

$$k = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda^i}{((i-1)\theta+\mu)((i-2)\theta+\mu)\cdots(\theta+\mu)\mu}$$

Αν $\theta = \mu$,

$$k = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda^i}{i!\,\mu^i} \overset{\frac{\lambda}{\mu}=\rho}{=\!=} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\rho^i}{i!} = e^{\rho} < \infty$$

Αν $\theta < \mu$,

$$k < \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda^i}{i!\,\theta^i} = e^{\frac{\lambda}{\theta}} < \infty$$

Αν $\theta > \mu$

$$k < \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda^i}{i!\,\mu^i} = e^{\frac{\lambda}{\mu}} < \infty$$

Άρα η $\{X(t), t \geq 0\}$ είναι θετικά επαναληπτική πάντα και η στάσιμη κατανομή είναι

$$p_i = k^{-1} \frac{\lambda^i}{((i-1)\theta+\mu)((i-2)\theta+\mu)\cdots(\theta+\mu)\mu}, \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

Φυλλάδιο 1 -
Ασκηση 2

· Συστημα εξυπηρετησης με 1 υπηρετη
· διαδικασια αφιξεων PP(λ)
· Χρόνοι εξυπηρέτησης $\sim Exp(\mu)$
· Vacation policy = Όταν ο υπηρετης αδειάσει παραμενει ανενεργός οσο υπάρχουν N πελάτες στο σύστημα. Όταν μπει ο N-οστος πελάτης αρχίζει παλι να εξυπηρετει μεχρι να αδειάσει το σύστημα.

(α) Να μοντελοποιηθεί το συστημα σαν Μ.Α.Σ.Χ.
(β) Να βρείτε ικανή & αναγκαία συνθήκη ωστε να είναι θετικά επαναληπτική και να βρεθεί η στάσιμη κατανομή.

Λυση

(α) Όταν υπάρχουν το πολύ N πελάτες στο σύστημα, ο υπηρέτης μπορεί να είναι ενεργός ή ανενεργός. Για να περιγράψουμε την κατάσταση του συστήματος χρειαζόμαστε τις παρακάτω τ.μ

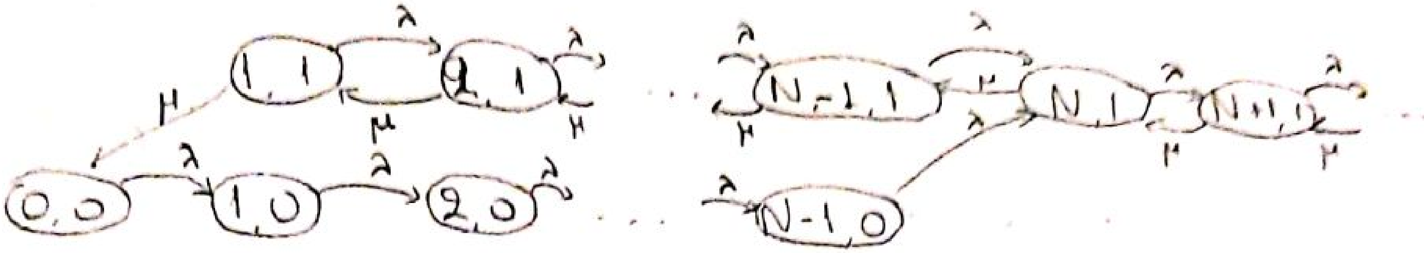
- $X(t)$: # πελατών στο σύστημα τη στιγμή t.
- $I(t)$: κατάσταση υπηρέτη τη στιγμή t.

$$I(t) = \begin{cases} 0, & \text{αν είναι ανενεργός} \\ 1, & \text{αν είναι ενεργός} \end{cases}$$

Η $\{(X(t), I(t)), t \geq 0\}$ είναι Μ.Α.Σ.Χ. με χ.κ

$$S = \{(0,0)\} \cup \{(i,0), (i,1), i \in \{1,2,\dots,N-1\}\} \cup \{(i,1), i \geq N\}$$

και διάγραμμα ρυθμών μετάβασης



(β) Γράφω τις εξισώσεις ισορροπίας :

$\forall\, j = N, N+1, N+2, \dots$, γράφω τις εξισώσεις γενικευμένης ισορροπίας με $A_j = \{(0,0)\} \cup \{(i,0),(i,1), i \in \{1,2,\dots,N-1\}\} \cup \{(i,1),\ i = N,\dots,j\}$

$$\left.\begin{aligned} \lambda p_{N,1} &= \mu p_{N+1,1} \\ \lambda p_{N+1,1} &= \mu p_{N+2,1} \\ &\vdots \end{aligned}\right\} \Rightarrow \lambda p_{i-1,1} = \mu p_{i,1} \quad \forall\ i = N+1, N+2, \dots$$

$$\Rightarrow p_{i,1} = \frac{\lambda}{\mu} p_{i-1,1} = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 p_{i-2,1} = \cdots$$

$$\Rightarrow p_{i,1} = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{i-N} p_{N,1} \quad , i = N+1, N+2, \dots$$

$$\xRightarrow{\frac{\lambda}{\mu} = \rho} \boxed{p_{i,1} = \rho^{i-N} p_{N,1} \quad , i = N+1, N+2, \dots} \quad (1)$$

$\forall\ i = 1, 2, \dots, N-1$, γράφω εξισώσεις πλήρους ισορροπίας για $(i,0)$

$$\left.\begin{aligned} \lambda p_{1,0} &= \lambda p_{0,0} \\ \lambda p_{2,0} &= \lambda p_{1,0} \\ &\vdots \\ \lambda p_{N-1,0} &= \lambda p_{N-2,0} \end{aligned}\right\} \Rightarrow p_{0,0} = p_{1,0} = p_{2,0} = \cdots = p_{N-1,0}$$

$$\Rightarrow \boxed{p_{i,0} = p_{0,0} \quad , i = 0, 1, \dots, N-1} \quad (2)$$

Εξισώσεις πλήρους ισορροπίας για $(0,0), (1,1), \dots, (N-1,1)$

$$\lambda p_{0,0} = \mu p_{1,1} \Rightarrow p_{1,1} = \rho p_{0,0}$$

$$(\lambda+\mu) p_{1,1} = \mu p_{2,1} \Rightarrow p_{2,1} = (\rho+1) p_{1,1} \Rightarrow p_{2,1} = \rho(\rho+1) p_{0,0}$$

$$(\lambda+\mu) p_{2,1} = \lambda p_{1,1} + \mu p_{3,1} \Rightarrow p_{3,1} = (\rho+1) p_{2,1} - \rho p_{1,1} \Rightarrow$$

$$p_{3,1} = (\rho+1)\rho(\rho+1) p_{0,0} - \rho \rho p_{0,0} \Rightarrow$$

$$p_{3,1} = \rho(\rho^2+\rho+1) p_{0,0}$$

$$(\lambda+\mu) p_{3,1} = \lambda p_{2,1} + \mu p_{4,1} \Rightarrow p_{4,1} = (\rho+1) p_{3,1} - \rho p_{2,1}$$

$$\Rightarrow p_{4,1} = (\rho+1)\rho(\rho^2+\rho+1) - \rho\rho(\rho+1) p_{0,0}$$

$$\Rightarrow p_{4,1} = \rho(\rho^3+\rho^2+\rho+1) p_{0,0}$$

$$\vdots$$

Γενικά, $\boxed{p_{i,1} = \rho(\rho^{i-1}+\rho^{i-2}+\dots+\rho+1) p_{0,0} \quad , i = 1, \dots, N}$ (3)

$$(1) \Rightarrow p_{i,1} = \rho^{i-N} p_{N,1} \overset{(3)}{\Rightarrow}$$

$$p_{i,1} = \rho^{i-N} \rho(\rho^{N-1}+\rho^{N-2}+\dots+\rho+1) p_{0,0} \Rightarrow$$

$$\boxed{p_{i,1} = \rho^{i-N+1} \sum_{k=0}^{N-1} \rho^k p_{0,0} \quad i = N+1, N+2, \dots} \quad (4)$$

Άρα

$$p_{i,0} = p_{0,0} \quad , i = 0, \dots, N-1$$

$$p_{i,1} = \rho \sum_{k=0}^{i-1} \rho^k p_{0,0} \quad , i = 1, \dots, N$$

$$p_{i,1} = \rho^{i-N+1} \sum_{k=0}^{N-1} \rho^k p_{0,0} \quad , i = N+1, N+2, \dots$$

Εξίσωση κανονικοποίησης

$$\sum_{i=0}^{N-1} p_{i,0} + \sum_{i=1}^{\infty} p_{i,1} = 1 \Rightarrow$$

$$\sum_{i=0}^{N-1} p_{0,0} + \sum_{i=1}^{N} \rho \sum_{k=0}^{i-1} \rho^k p_{0,0} + \sum_{i=N+1}^{\infty} \rho^{i-N+1} \sum_{k=0}^{N-1} \rho^k p_{0,0} = 1 \Rightarrow$$

$$p_{0,0}\Big(N + \underbrace{\sum_{i=1}^{N} \rho \sum_{k=0}^{i-1} \rho^k}_{\text{πεπερασμένο}} + \sum_{k=0}^{N-1} \rho^k \sum_{i'=0}^{\infty} \rho^{i'+N+1-N+1} \Big) = 1 \Rightarrow$$

$$p_{0,0}\Big(N + \sum_{i=1}^{N} \rho \sum_{k=0}^{i-1} \rho^k + \sum_{k=0}^{N-1} \rho^k \rho^2 \sum_{i'=0}^{\infty} \rho^{i'} \Big) = 1 \xRightarrow[0<\rho<1]{\text{Συνθήκη στασιμότητας}}$$

$$p_{0,0}\Big(N + \sum_{i=1}^{N} \rho \frac{1-\rho^i}{1-\rho} + \sum_{k=0}^{N-1} \rho^k \rho^2 \frac{1}{1-\rho} \Big) = 1 \Rightarrow$$

$$p_{0,0}\Big[N + \frac{\rho}{1-\rho}\Big(N - \sum_{i=1}^{N} \rho^i\Big) + \frac{\rho^2}{1-\rho} \sum_{k=0}^{N-1} \rho^k \Big] = 1 \Rightarrow$$

$$p_{0,0}\Big[N + N\frac{\rho}{1-\rho} - \frac{\rho}{1-\rho}\,\rho\,\frac{1-\rho^N}{1-\rho} + \frac{\rho^2}{1-\rho}\,\frac{1-\rho^N}{1-\rho} \Big] = 1 \Rightarrow$$

$$p_{0,0}\,\frac{N}{1-\rho} = 1 \Rightarrow p_{0,0} = \frac{1-\rho}{N}$$

Τελικά, η Μ.Α.Σ.Χ. είναι θετικά επαναληπτική αν $0<\rho<1$ και τότε η στάσιμη κατανομή είναι

$$p_{i,0} = \frac{1-\rho}{N} \quad , i=0,1,\dots,N-1$$

$$p_{i,1} = \rho \frac{1-\rho^{i}}{\cancel{1-\rho}} \frac{1-\rho}{N} = \frac{\rho(1-\rho^{i})}{N} \quad , i=1,\dots,N$$

$$p_{i,1} = \rho^{i-N+1} \frac{1-\rho^{N}}{\cancel{1-\rho}} \frac{1-\rho}{N} = \frac{\rho(\rho^{i-N}-\rho^{i})}{N} \quad , i=N+1,N+2,\dots$$

Φυλλάδιο 4-

Άσκηση 3

Σύστημα αποθεμάτων (inventory system) σε συνεχή χρόνο

- Η ζήτηση φθάνει με $PP(\lambda)$ και εξυπηρετείται άμεσα αν υπάρχει απόθεμα
- Αν δεν υπάρχει απόθεμα η ζήτηση χάνεται
- Μόλις το απόθεμα πέσει στις R μονάδες, η αποθήκη παραγγέλνει $K\,(k>R)$ μονάδες προϊόντος από τον προμηθευτή
- Η παραγγελία φθάνει μετά από χρόνο $Exp(\theta)$
- $X(0) \in \{R+1, R+2, \dots, k+R\}$

$X(t)$: # προϊόντων τη στιγμή t.

Ν.δ.ο η $\{X(t), t\geq 0\}$ είναι ΜΑΣΧ και να δοθεί ο χκ και ο πίνακας ρυθμών μετάβασης

Λύση

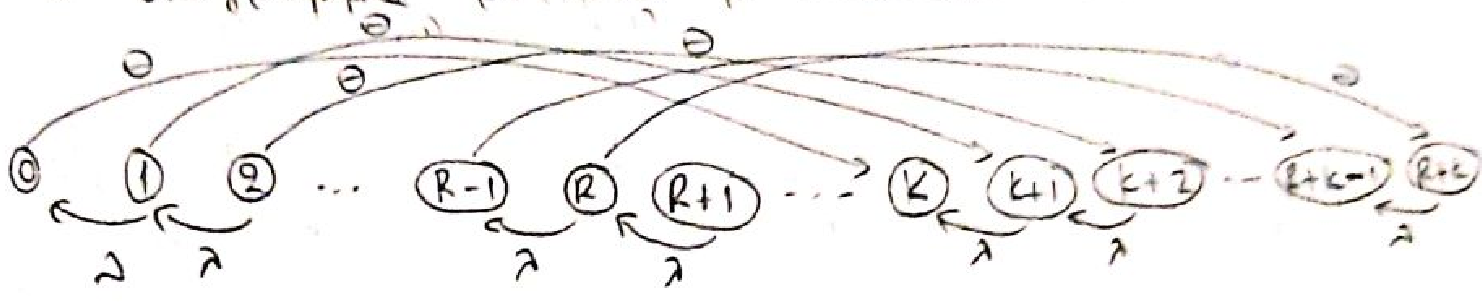
Η $\{X(t), t\geq 0\}$ είναι ΜΑΣΧ αφού

κατάσταση	επόμενη κατάσταση	χρόνος
0	K	$Exp(\theta)$
$i,\ i\in\{1,\dots,R\}$	$i-1$	$Exp(\lambda)$
	$i+K$	$Exp(\theta)$
$i,\ i\in\{R+1,\dots,R+k\}$	$i-1$	$Exp(\lambda)$

Ο # προϊόντων δεν θα γίνει ποτέ μεγαλύτερος του $R+k$ αφού αρχικά υπήρχαν $R < X(0) \le R+k$ μονάδες και η 1η παραγγελία θα γίνει όταν πέσει το απόθεμα στις R μονάδες.

Άρα, $S = \{0,1,2,\dots,R+k\}$

Το διάγραμμα ρυθμών μετάβασης είναι



Ο πίνακας ρυθμών μετάβασης είναι

$$
Q = \begin{array}{c|cccccccccccccccccc}
 & 0 & 1 & 2 & \cdots & R-1 & R & R+1 & \cdots & k & k+1 & k+2 & \cdots & R+k-1 & R+k \\
\hline
0 & -\theta & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & \theta & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
1 & \lambda & -(\theta+\lambda) & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \theta & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
2 & 0 & \lambda & -(\theta+\lambda) & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \theta & \cdots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & & & & & & & \vdots & \ddots & & \\
R-1 & 0 & 0 & 0 & & -(\lambda+\theta) & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & \theta & 0 \\
R & 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda & -(\lambda+\theta) & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \theta \\
R+1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda & -\lambda & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & & & & \ddots & & & & & & \\
k & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & -\lambda & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
k+1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda & -\lambda & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
k+2 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda & -\lambda & \cdots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & & & & & & & & & & \\
R+k-1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & -\lambda & 0 \\
R+k & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda & -\lambda
\end{array}
$$

Φυλλάδιο 4

Άσκηση 4

- Σύστημα εξυπηρέτησης με 1 υπηρέτη
- Διαδικασία αφίξεων PP(λ)
- Δύο τύποι πελατών: 1 πελάτης είναι τύπου 1 μ.π a και τύπου 2 μ.π $1-a$
- Χρόνος εξυπηρέτησης πελάτη τύπου $i \sim Exp(\mu_i)$, $i=1,2$

$X(t) = \#$ πελατών στο σύστημα τη στιγμή t

$Y(t)$: τύπος πελάτη που εξυπηρετείται

Ν.δ.ο. $\{(X(t), Y(t)), t \geq 0\}$ ΜΑΞΧ, να δωθεί ο χώρος καταστάσεων και το διάγραμμα ρυθμών μετάβασης.

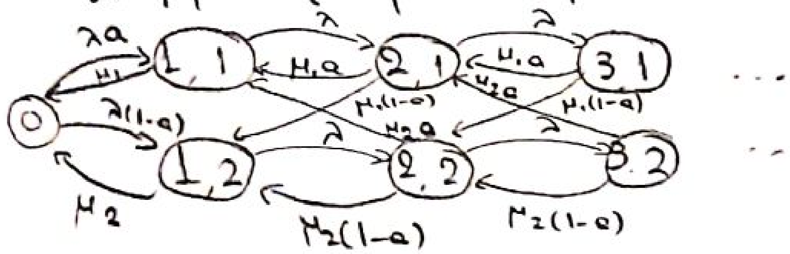
Λύση

$S = \{0\} \cup \{(i,1), i=1,2,\ldots\} \cup \{(i,2), i=1,2,\ldots\}$

κατάσταση	επόμενη	χρόνος
(0)	(1,1)	$Exp(\lambda a)$
	(1,2)	$Exp(\lambda(1-a))$
(1,1)	(2,1)	$Exp(\lambda)$
	0	$Exp(\mu_1)$
(1,2)	(2,2)	$Exp(\lambda)$
	0	$Exp(\mu_2)$
(i,1), $i=2,3,\ldots$	(i+1,1)	$Exp(\lambda)$
	(i-1,1)	$Exp(\mu_1 a)$
	(i-1,2)	$Exp(\mu_1(1-a))$

κατάσταση	επόμενη	χρόνος
$(i,2)$	$(i+1,2)$	$Exp(\lambda)$
	$(i-1,1)$	$Exp(\mu_2 a)$
	$(i-1,2)$	$Exp(\mu_2(1-a))$

Διάγραμμα ρυθμών μετάβασης



Scanned with CamScanner

Φυλλάδιο 4
Άσκηση 5.

Εργασίες φθάνουν σε υπολογιστή με $PP(\lambda)$.
Ο υπολογιστής τις διεκπεραιώνει μία-μία και ο χρόνος διεκπεραίωσης $\sim Exp(\mu)$
Ο υπολογιστής μπορεί να χαλάσει.
χρόνος λειτουργίας $\sim Exp(a)$
χρόνος επισκευής $\sim Exp(b)$

Μόλις χαλάσει όλες οι εργασίες χάνονται.
Οι εργασίες που φθάνουν ενώ είναι χαλασμένος χάνονται

Να μοντελοποιηθεί το σύστημα σαν ΜΑΣΧ, να βρείτε τον χ.κ και το διάγραμμα ρυθμών μετάβασης

Λύση

Έστω $X(t)$: # εργασιών τη στιγμή t
$I(t)$: κατάσταση υπολογιστή τη στιγμή t

$$I(t) = \begin{cases} 0 & \text{, αν είναι χαλασμένος} \\ 1 & \text{, αν λειτουργεί} \end{cases}$$

Θ.δ.ο η $\{(X(t), I(t)), t \geq 0\}$ είναι ΜΑΣΧ. με

$S = \{(0,0), (i,1), i = 0,1,2,\dots\}$

κατασταση	επομενη κατ.	χρονος
$(0,0)$	$(0,1)$	$Exp(b)$
$(0,1)$	$(0,0)$	$Exp(a)$
	$(1,1)$	$Exp(\lambda)$
$(i,1)$, $i=1,2,\ldots$	$(i-1,1)$	$Exp(\mu)$
	$(i+1,1)$	$Exp(\lambda)$
	$(0,0)$	$Exp(a)$

Διάγραμμα ρυθμων μετάβασης: