Στοχαστικές Ανελίξεις
Ασκήσεις στη Διαδικασία Poisson

Άσκηση 1. Να δείξετε ότι μία συνεχής και μη-αρνητική τυχαία μεταβλητη έχει CFR (constant failure rate - σταθερό ρυθμό βλάβης) ίσο με λ αν και μόνο αν είναι Εκθετικά κατανεμημένη με ρυθμό λ.

Άσκηση 2. Θεωρούμε την τυχαία μεταβλητή $X \sim \text{Erlang}(n, \lambda)$. Να δείξετε ότι η X έχει IFR (increasing failure rate), δηλαδή ότι ο ρυθμός βλάβης $h(x), x \in (0, \infty)$ είναι αύξουσα συνάρτηση του x.

Άσκηση 3. Θεωρούμε n εκθετικά κατανεμημένες τυχαίες μεταβλητές, τις $Y_i \sim \text{Exp}(\lambda_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, και μία διακριτή τυχαία μεταβλητή με τιμές στο $\{1, 2, \ldots, n\}$, την I, με $\Pr(I = i) = a_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Η τυχαία μεταβλητή X για την οποία ισχύει ότι $(X|I = i) = Y_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, ακολουθεί Υπερεκθετική κατανομή και είναι μίξη Εκθετικών με ρυθμούς λ_i και πιθανότητες a_i, αντίστοιχα. Να βρείτε τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας, τη συνάρτηση επιβίωσης, τη μέση τιμή και τη διασπορά της X. Να δείξετε ότι η X έχει DFR (decreasing failure rate), δηλαδή ότι ο ρυθμός βλάβης $h(x), x \in (0, \infty)$ είναι φθίνουσα συνάρτηση του x.

Άσκηση 4. Θεωρούμε ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές $X_i \sim Exp(\lambda_i)$, $i = 1, 2, 3$. Αν $Z = \min\{X_1 + X_2, X_3\}$, να βρεθεί η συνάρτηση κατανομής της Z.

Άσκηση 5. Ο χρόνος ζωής μιας μηχανής ακολουθεί Εκθετική κατανομή με παράμετρο λ. Ένας επιθεωρητής περνά κάθε T χρονικές μονάδες και ελέγχει τη μηχανή, ξεκινώντας τη στιγμή 0, όπου $T > 0$ σταθερά. Αν X η χρονική στιγμή που ο επιθεωρητής βρίσκει τη μηχανή χαλασμένη και Y το χρονικό διάστημα που είναι χαλασμένη μέχρι να το καταλάβει ο επιθεωρητής, να βρεθούν οι $E[X]$ και $E[Y]$.

Άσκηση 6. Το σύστημα Α αποτελείται απο 2 συσκευές παράλληλα συνδεδεμένες με χρόνους ζωής ανεξάρτητους και εκθετικά κατανεμημένους με παράμετρο λ. Το σύστημα Β αποτελείται από 1 συσκευή με χρόνο ζωής εκθετικά κατανεμημένο με παράμετρο μ. Να βρεθεί η πιθανότητα να χαλάσει το σύστημα Α πριν το σύστημα Β.

Άσκηση 7. Έστω $\{N(t), t \geq 0\}$ μία διαδικασία Poisson με ρυθμό λ. Να βρεθεί η
$P(N(t) = k|N(t + s) = k + m)$, για $s, t \geq 0, k, m \geq 0$.

Άσκηση 8. Πελάτες φθάνουν σε σύστημα εξυπηρέτησης με s υπηρέτες σύμφωνα με διαδικασία Poisson με ρυθμό λ. Οι χρόνοι εξυπηρέτησης είναι ανεξάρτητοι και εκθετικά κατανεμημένοι με παράμετρο μ. Τη στιγμή 0, όλοι οι υπηρέτες είναι απασχολημένοι και κανένας πελάτης δεν βρίσκεται σε αναμονή.
(α) Να βρεθεί η πιθανότητα ο επόμενος πελάτης που θα φθάσει να βρει όλους τους υπηρέτες απασχολημένους.
(β) Αν N είναι ο αριθμός των αφίξεων μέχρι την πρώτη εξυπηρέτηση, να βρεθεί η συνάρτηση πιθανότητας της τ.μ. N.
(γ) Να βρεθεί η πιθανότητα ο επόμενος πελάτης που θα φθάσει να βρει τουλάχιστον 2 ελεύθερους υπηρέτες.

Άσκηση 9. Πελάτες φθάνουν σε τράπεζα σύμφωνα με διαδικασία Poisson με ρυθμό 8 πελάτες την ώρα. Να υπολογίσετε:
(α) τη μέση τιμή και τη διασπορά του αριθμού των πελατών που φθάνουν στη τράπεζα σε διάστημα 8 ωρών.
(β) την πιθανότητα κατά τη διάρκεια ενός διαλείμματος που διαρκεί 15 λεπτά να φθάσουν στην τράπεζα πάνω από 4 πελάτες.
(γ) τον συντελεστή συσχέτισης του αριθμού των πελατών που φθάνουν μεταξύ 9:00 και 11:00 με τον αριθμό των πελατών που φθάνουν μεταξύ 10:00 και 12:00.

Άσκηση 10. Πελάτες φθάνουν σε τράπεζα σύμφωνα με διαδικασία Poisson με ρυθμό 10 πελάτες την ώρα. Το 40% των πελατών είναι γυναίκες, οι υπόλοιποι άντρες. Δεδομένου ότι 10 αντρες έφθασαν σε διάστημα μίας ώρας, να βρείτε τον μέσο αριθμό γυναικών που έφθασαν την ίδια ώρα.